Mathématiques

Enseignement de 1$^{\text{re}}$ spécialité 2024-2025

Hicham AMARIR,

Lycées Val de Seine,

Le Grand-Quevilly.

Rédigé avec LaTeX

le 3 octobre 2024

Chapitre 1

Polynôme du second degré

Définition 1.1 : (*Polynôme du second degré*)

On appelle ***polynôme du second degré*** un fonction de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la ***forme dévloppée*** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

a, b et c peuvent être connus ou inconnus et il faut bien comprendre que la notation « $f(x)$ » nous informe que c'est x la variable.

Les termes ax^2, bx et c sont appelés ***monôme***. Et donc $ax^2 + bx + c$ est aussi appelé ***trinôme*** *(il y a 3 monômes)*.

La valeur a est appelée ***coefficient dominant*** de f.

L'***ensemble des polynômes du second degré*** est noté $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$.

Exemple :

Les fonctions suivantes sont des polynômes du second degré :

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ car $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$ donc $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

$g(x) = -x^2 + 4x - 3$ car $a = -1$; $b = 4$; $c = -3$ donc $g \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

$h(x) = (x-2)(x+1)$ car un monôme en x^2 non nul va apparaître après dévloppement. Donc $h \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

$k(x) = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x$ car $a = \sqrt{2}$; $b = 0$; $c = -\sqrt{3}$ donc $k \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

Les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes du second degré :

$l(x) = 4x - 2$ car $a = 0$ et il faut que $a \in \mathbb{R}^*$. Donc $l \notin \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

$m(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 5}$ car la racine carrée transforme les monômes. Donc $m \notin \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

$n(x) = \dfrac{3x}{-7x^2 + 2x - 1}$ car la fonction inverse transforme les monômes du dénominateur. Donc $n \notin \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

Définition 1.2 : (*Forme canonique d'un polynôme du second degré*)

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ un polynôme du second degré, défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle ***forme canonique de f*** l'écriture de f sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. *(Ces lettres se lisent « alpha » et « bêta ». Voir l'alphabet grec.)*

Preuve :

Soit f un polynôme du second degré, défini par sa forme dévloppée $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On souhaite montrer qu'il existe trois réels α, β et a tels que :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Développons le membre de droite :

$$a(x - \alpha)^2 + \beta = a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$$

En identifiant les coefficients des monômes avec ceux de la forme dévloppée de $f(x)$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -2a\alpha = b \\ a\alpha^2 + \beta = c \end{cases}$$

De la première équation, on tire que $\alpha = -\frac{b}{2a}$. En substituant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient :

$$\beta = c - a\alpha^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - a\frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Ainsi, on a trouvé les valeurs de α et β en fonction de a, b et c.

Conclusion :

Tout polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme canonique :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Ce qui achève la démonstration.

Exemple :

- Soit $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

  Pour mettre f sous forme canonique, on complète le début de l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2$. Cette technique de calcul s'appelle la ***méthode de complétion du carré*** :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left(x^2 - 2x\right) + 5 \\ &= 3\left(x^2 - 2x + 0\right) + 5 \\ &= 3\Big(\underbrace{x^2 - 2x + 1^2}_{a^2-2ab+b^2} - 1^2\Big) + 5 \\ &= 3\left((x-1)^2 - 1\right) + 5 \\ &= 3\left(x-1\right)^2 - 3 + 5 \\ &= 3\left(x-1\right)^2 + 2 \end{aligned}$$

  Donc, la forme canonique de f est $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$.

- Soit $g(x) = -2x^2 + 8x - 3$.

  Pour mettre g sous forme canonique, on utilise la ***méthode de complétion du carré*** avec l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} g(x) &= -2\left(x^2 - 4x\right) - 3 \\ &= -2\left(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2\right) - 3 \\ &= -2\left((x-2)^2 - 4\right) - 3 \\ &= -2\left(x-2\right)^2 + 8 - 3 \\ &= -2\left(x-2\right)^2 + 5 \end{aligned}$$

  Donc, la forme canonique de g est $g(x) = -2(x-2)^2 + 5$.

- Soit $h(x) = 5x^2 + 10$. On a automatiquement :

$$h(x) = 5\left(x - 0\right)^2 + 10$$

  Dans ce cas, la forme canonique est identique à la forme développée : $h(x) = 5x^2 + 10$.

Proposition 1.3 : *(Extremum, Variation d'un polynôme du second degré)*

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $a > 0$:

La fonction f admet un ***minimum*** en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Elle est ***strictement décroissante*** sur $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ et ***strictement croissante*** sur $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right[$.

Si $a < 0$:

La fonction f admet un ***maximum*** en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

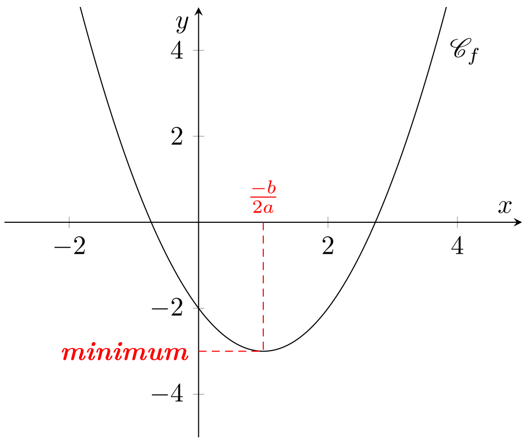
Elle est ***strictement croissante*** sur $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ et ***strictement décroissante*** sur $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right[$.

Preuve :

A faire quand j'aurai pas la flemme.

Exemple :

Cas $a > 0$:



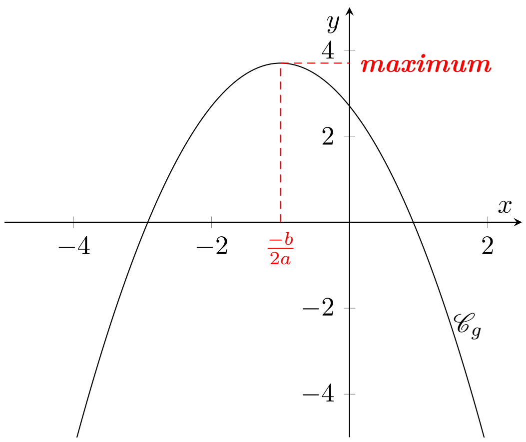
Soit $f(x) = x^2 - 2x - 2$.

On remarque que $a = 1 > 0$.

La courbe représentative de f ci-contre montre bien une courbe ***strictement décroissante*** jusqu'à $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times 1} = 1$ et qu'ensuite elle est ***strictement croissante***.

Donc elle admet bien un ***minimum*** en $x = 1$.

Cas $a < 0$:



Soit $g(x) = -x^2 - 2x + \frac{27}{10}$.

On remarque que $a = -1 < 0$.

La courbe représentative de g ci-contre montre bien une courbe ***strictement croissante*** jusqu'à $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times(-1)} = -1$ et qu'ensuite elle est ***strictement décroissante***.

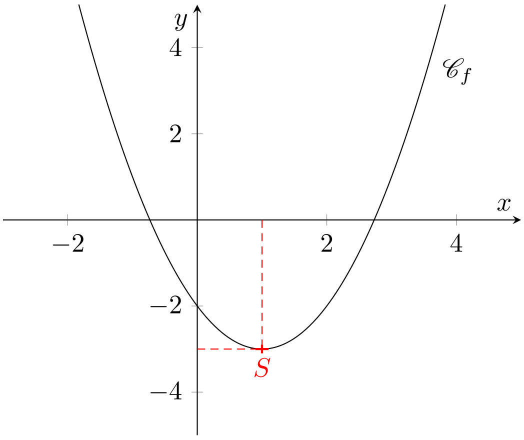
Donc elle admet bien un ***maximum*** en $x = -1$.

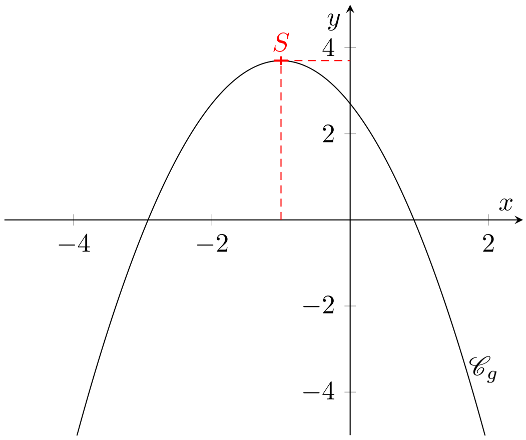
Définition 1.4 : *(Sommet d'un polynôme du second degré)*

On appelle ***sommet d'un polynôme du second degré*** le point de la parabole représentant ce polynôme qui correspond à son extremum (maximum ou minimum).

Exemple :

Le ***sommet*** des polynômes du second degrés f et g suivants sont représentés par le point S sur leur courbe représentative :





Proposition 1.5 : (*Coordonnées du sommet d'un polynôme du second degré*)

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ un polynôme du second degré dont :

- la forme dévloppée est : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- la forme canonique est : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Soit S le ***sommet*** de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x_S; y_S)$. On a la propriété suivante :

- si f est sous forme dévloppée :

$$\begin{cases} x_S &= -\frac{b}{2a} \\ y_S &= f(x_S) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) \end{cases}$$

- si f est sous forme canonique :

$$\begin{cases} x_S &= \alpha \\ y_S &= \beta \end{cases}$$

Dans tous les cas, on a :

$$S(x_S; y_S) = S(\alpha; \beta) = S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Preuve :

A faire quand j'aurai pas la flemme.

Exemple :

Soit $P(x) = x^2 - 4x + 7$ un polynome du second degré.

1. Calculer avec la forme dévloppée de P les coordonnées du sommet S.

2. Mettre la fonction P sous la forme canonique.

3. En déduire les coordonnées du sommet S de P.

4. Que remarque-t-on ?

1. D'après la propriété 1.5, on peut calculer les coordonnées de S de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_S &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times 1} = 2 \\ y_S &= P(x_S) = P\left(-\frac{b}{2a}\right) = P\left(-\frac{-4}{2\times 1}\right) = P(2) = 2^2 - 4\times 2 + 7 = 3 \end{cases}$$

2. On commence par identifier avec quelle identité remarquable on pourra potentiellement "forcer son passage". Rapel : cette méthode s'appelle la méthode de complétion du carré.

La partie $-4x$ nous indique clairement que l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2$ est un bon candidat car elle ressemble fortement à $-2ab$.

De plus x^2 ressemble fortement à a^2 de l'identité remarquable.

En modifiant un peu l'écriture de P, on peut commencer à faire apparaître a et b dans P :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 4x + 7 \\ &= x^2 - 2 \times 2 \times x + 7 \end{aligned}$$

Ainsi il est claire que pour l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2$ on identifie facilement a et b :

$$a = x$$
$$b = 2$$

Il ne reste plus qu'à faire apparître b^2 dans P pour "forcer le passage" de l'identité remarquable :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 2 \times 2 \times x + 7 \\ &= x^2 - 2 \times 2 \times x + 0 + 7 \\ &= \underbrace{x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2}_{a^2-2ab+b^2} - 2^2 + 7 \\ &= (x-2)^2 - 2^2 + 7 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 7 \\ &= (x-2)^2 + 3 \end{aligned}$$

3. Ainsi $a(x-\alpha)^2 + \beta = (x-2)^2 + 3$ donc $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ donc d'après la proposition 1.5 les coordonnées du sommet S de P sont $(\alpha; \beta) = (2; 3)$.

4. On remarque que les coordonnées calculées dans **1.** sont les mêmes que ceux dans **3.**. Ce qui est cohérent car l'on détermine les coordonnées du même point S de deux manières différentes.

Proposition 1.6 : *(Axe de symétrie de la courbe représentative d'un polynôme du second degré)*

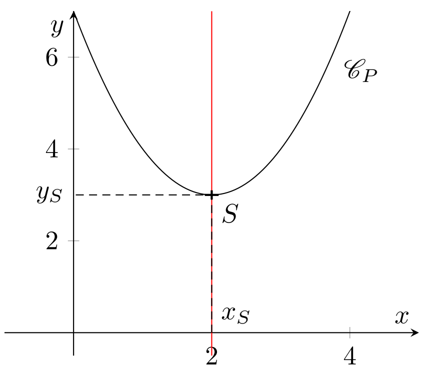
Soient $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ et $S\,(x_S; y_S) \in \mathscr{C}_f$ le sommet de $\mathscr{C}_f$.

$\mathscr{C}_f$ admet toujours un ***axe de symétrie*** d'équation $x = x_S$.

Preuve :

A faire quand j'aurai toujours pas la flemme.

Exemple :



En reprenant l'exemple précédent avec $P(x) = x^2 - 4x + 7$, on a déjà déterminé les coordonnées du sommet S de $\mathscr{C}_P$ qui sont $(x_S; y_S) = (2; 3)$.

On en déduit immédiatement d'après la propriété 1.6 que l'équation $x = 2$ est l'équation de l'***axe de symétrie*** de P représenté en ***rouge***.

Proposition 1.7 : (*Tableau de variation d'un polynôme du second degré*)

Soient $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, $a \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de f et $S\left(x_S; y_S\right) \in \mathscr{C}_f$ le sommet de $\mathscr{C}_f$.

Le ***tableau de variation*** de f est :

dans le cas où $a > 0$:

x	$-\infty$		x_S		$+\infty$
f	$-\infty$	$\searrow$	y_S	$\nearrow$	$+\infty$

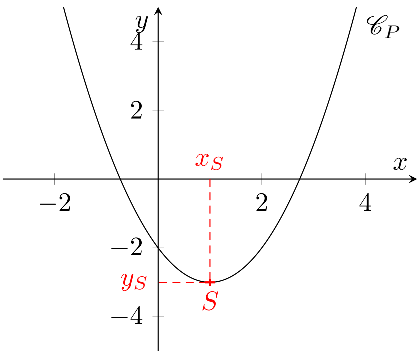
dans le cas où $a < 0$:

x	$-\infty$		x_S		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	y_S	$\searrow$	$+\infty$

Preuve :

A faire quand j'aurai toujours et encore toujours pas la flemme.

Exemple :

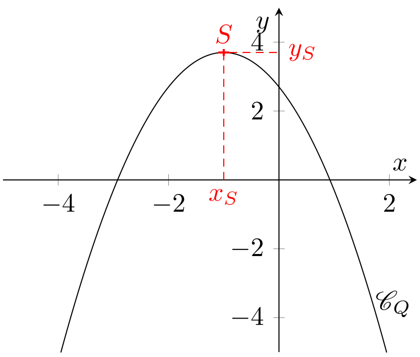


Soit $P(x) = x^2 - 2x - 2$ avec $\mathscr{C}_P$ représentée ci-contre, on peut par exemple directement calculer les coordonnées du sommet S de $\mathscr{C}_P$ avec la forme dévloppée de P qui sont :

$$\begin{cases} x_S &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times 1} = 1 \\ y_S &= P\left(x_S\right) = P\left(2\right) = 2^2 - 4\times 2 + 7 = 3 \end{cases}$$

Comme le coefficient dominant de P qui est $a > 0$, on en déduit immédiatement d'après la propriété 1.7 que le ***tableau de variation*** de P est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$



Soit $Q(x) = -x^2 - 2x + \frac{27}{10}$ avec $\mathscr{C}_Q$ représentée ci-contre, on peut aussi par exemple d'abord déterminer la forme canonique de Q en utilisant la méthode de complétion du carré pour ensuite directement avoir les coordonnées du sommet S de $\mathscr{C}_Q$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Q(x) &= -x^2 - 2x + \frac{27}{10} \\ &= -(x^2 + 2x + 0) + \frac{27}{10} \\ &= -(x^2 + 2x + 1^2 - 1^2) + \frac{27}{10} \\ &= -\left((x+1)^2 - 1\right) + \frac{27}{10} \\ &= -(x+1)^2 + 1 + \frac{27}{10} \\ &= -(x+1)^2 + \frac{37}{10} \end{aligned}$$

On a donc directement grâce à la propriété 1.5 les coordonées du sommet S :

$$S\left(x_S;y_S\right)=S\left(\alpha;\beta\right)=S\left(-1;\frac{37}{10}\right)$$

Comme le coefficient dominant de Q qui est $a<0$, on en déduit immédiatement d'après la propriété 1.7 que le ***tableau de variation*** de Q est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{37}{10}$	↘ $+\infty$

Définition 1.8 : *(Equation du second degré)*

Soit $f\in\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$.

On appelle ***équation du second degré*** toute équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)=0$$

Exemple :

- $x^2-5x+6=0$ est une ***équation du second degré***. On a bien le membre de gauche qui est un polynôme du second degré et le membre de droite qui est 0.
- $4x^2-12x+6=-3$ est aussi une ***équation du second degré*** car elle est équivalente à l'équation $4x^2-12x+9=0$.
- $3x-5=7$ ***n'est pas*** une équation du second degré car le monôme en x^2 est nul.
- $\frac{1}{2x^2}+6x-57=0$ ***n'est pas*** une équation du second degré car le terme $\frac{1}{2x^2}$ n'est pas un monôme.

Définition 1.9 : *(Discriminant)*

Soient $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, tels que $f(x)=ax^2+bx+c$.

On appelle ***discriminant*** de f la valeur b^2-4ac. Cette valeur est généralement noté Δ *(se lit « **Delta** » c'est la lettre majuscule de δ qui se lit « delta ». Voir alphabet grec)*. On a donc :

$$\Delta=b^2-4ac$$

Exemple :

- Pour $f(x)=x^2+2x+5$, on a :

$$\Delta_f=(2)^2-4\times1\times5=4-20=-16$$

- Pour $g(x)=4x^2-12x+9$, on a :

$$\Delta_g=(-12)^2-4\times4\times9=144-144=0$$

- Pour $h(x)=x^2-5x+6$, on a :

$$\Delta_h=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1$$

Proposition 1.10 : *(Solutions d'une équation du second degré)*

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta \in \mathbb{R}$ le discriminant de f.

Les solutions de $f(x) = 0$ sont déterminées par 3 cas possibles :

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x) = 0$ ***n'a pas de solution réelle***.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = 0$ a ***une seule et unique solution*** qui est :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = 0$ a ***deux solutions distinctes*** qui sont :

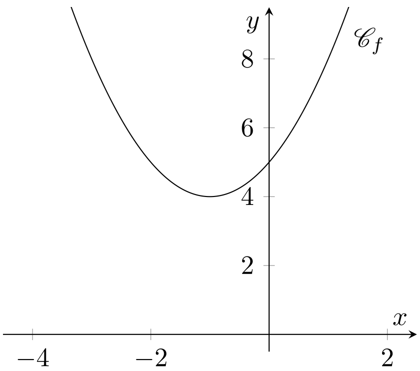
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Preuve :

A faire en ***prio***! Elle est au programme. Mais pour l'instant flemme.

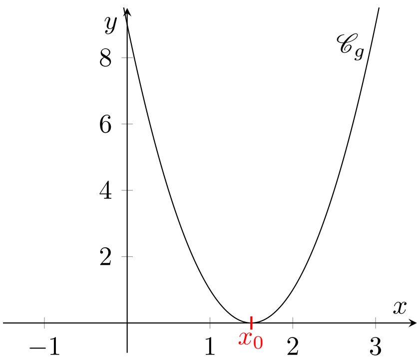
Exemple :

En reprenant l'exemple précédent :



Pour $f(x) = x^2 + 2x + 5$, on a $\Delta_f = -16 < 0$.

Donc d'après 1.10 l'équation $x^2 + 2x + 5 = 0$ ***n'a pas de solution réelle***.



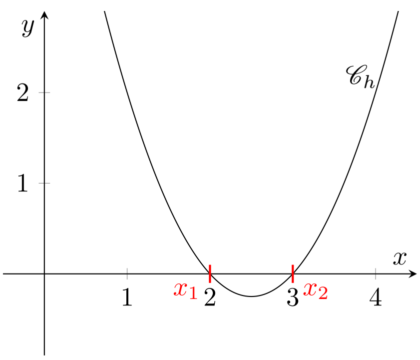
Pour $g(x) = 4x^2 - 12x + 9$, on a $\Delta_g = 0$

Donc d'après 1.10 l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$ a ***une seul solution*** qui est :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 4} = \frac{3}{2}$$

On peut vérifier si on n'a pas fait d'erreur. En remplaçant x par x_0 dans $g(x)$ on devrait obtenir un résultat qui vaut 0 :

$$g(x_0) = g\left(\frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{2}\right) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$$



Pour $h(x) = x^2 - 5x + 6$, on a $\Delta_h = 1 > 0$

Donc d'après 1.10 l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a ***deux solutions distinctes*** qui sont :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta_h}}{2a} = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta_h}}{2a} = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \dfrac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$$

On peut vérifier si on n'a pas fait d'erreur. En remplaçant x par x_1 puis par x_2 dans $h(x)$ on devrait obtenir un résultat qui vaut 0 :

$$h(x_1) = g(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$$h(x_2) = g(3) = 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

Définition 1.11 : *(Racine d'un polynôme du second degré)*

Soient $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ et $\Delta \in \mathbb{R}$ le discriminant de f.

On appelle ***racine*** de f une solution de $f(x) = 0$.

- Si $\Delta < 0$ alors f ***n'a pas*** de racine.
- Si $\Delta = 0$ alors la seul solution de $f(x) = 0$ est appelée ***racine double*** de f.
- Si $\Delta > 0$ alors f admet ***deux racines distinctes***.

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent et d'après 1.11 :

- f ***n'a pas*** de racine.
- x_0 est solution de $g(x) = 0$. Donc x_0 est une ***racine double*** de g.
- x_1 et x_2 sont solutions de $h(x) = 0$. Donc x_1 et x_2 sont des ***racines distinctes*** de h.

Proposition 1.12 : *(Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré)*

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La ***somme des racines*** de f est notée Σ *(se lit « Sigma », c'est la lettre majuscule de σ qui se lit « sigma », voir alphabet grec)* et a pour valeur $\frac{-b}{a}$. Autrement dit :

$$\Sigma = \frac{-b}{a}$$

La ***produit des racines*** de f est notée Π *(se lit « Pi », c'est la lettre majuscule de π qui se lit « pi », voir alphabet grec)* et a pour valeur $\frac{c}{a}$. Autrement dit :

$$\Pi = \frac{c}{a}$$

Preuve :

A faire. Quoi ? La flemme ? Bah je crois qu'elle est toujours présente.

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent et d'après 1.12 :

- Pour la fonction f, Σ_f et Π_f existe bien malgré qu'elle n'a pas de racine réelle :

$$\begin{cases} \Sigma_f = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-2}{1} = -2 \\ \Pi_f = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{1} = 5 \end{cases}$$

  Cela s'explique avec l'ensemble nombres complexe $\mathbb{C}$. Les racines de f sont dans $\mathbb{C}$ et leur somme donne bien -2 et leur produit donne bien 5 *(voir chapitre sur $\mathbb{C}$ en T^{le})*.

- Pour la fonction g, Σ_g et Π_g existe bien malgré qu'elle a qu'une seul racine. En effet c'est une racine double donc :

$$\begin{cases} \Sigma_g = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-12)}{4} = 3 = x_0 + x_0 \\ \Pi_g = \dfrac{c}{a} = \dfrac{9}{4} = x_0 \times x_0 \end{cases} \qquad \textit{Rappel : } x_0 = \frac{3}{2}$$

- Pour la fonction h, Σ_h et Π_h on a bien :

$$\begin{cases} \Sigma_h = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-5)}{1} = 5 = x_1 + x_2 \\ \Pi_h = \dfrac{c}{a} = \dfrac{6}{1} = 6 = x_1 \times x_2 \end{cases} \qquad \textit{Rappel : } x_1 = 2 \ \text{ et } \ x_2 = 3$$

Proposition 1.13 : *(Factorisation d'un polynôme du second degré)*

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta \in \mathbb{R}$ le discriminant de f.

Pour la ***forme factorisée*** de f, il y a 3 cas :

- Si $\Delta < 0$ alors f ***n'a pas*** de forme factorisée dans $\mathbb{R}$ *(elle existe dans $\mathbb{C}$, voir en T^{le}).*
- Si $\Delta = 0$ alors soit $x_0 \in \mathbb{R}$ la racine double de f, la ***forme factorisée*** de f est :

$$f(x) = a\left(x - x_0\right)\left(x - x_0\right) = a\left(x - x_0\right)^2$$

- Si $\Delta > 0$ alors soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ les racines de f, la ***forme factorisée*** de f est :

$$f(x) = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

Preuve :

Soient $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, $l \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, $e \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, $m \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ et $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$. On a :

$$f \times l \times e \times m \times m \times e = flemme \qquad \text{A faire plus tard.}$$

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent et d'après 1.13 :

- Pour la fonction f, on a $\Delta_f < 0$ donc f ***n'a pas*** de forme factorisée.
- Pour la fonction g, on a $\Delta_g = 0$ et $x_0 = \frac{3}{2}$. Donc la ***forme factorisée*** de f est :

$$g(x) = a\left(x - x_0\right)^2 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

- Pour la fonction h, on a $\Delta_h > 0$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. Donc la ***forme factorisée*** de f est :

$$h(x) = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) = \left(x - 2\right)\left(x - 3\right)$$

Proposition 1.14 : *(Signe d'un polynôme du segond degré)*

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$, tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta \in \mathbb{R}$ le discriminant de f.

Le ***tableau de signes*** de f est donné par l'un des 3×2 cas possibles suivants :

- Si $\Delta < 0$ alors f n'a pas de racine, on a donc le ***tableau de signes*** de f qui est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors soit $x_0 \in \mathbb{R}$ la racine double de f, on a donc le ***tableau de signes*** de f qui est :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$ alors soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ les racines distinctes de f, on a donc le ***tableau de signes*** de f :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

Preuve :

Toujours la flemme, à faire plus tard.

Exemple :

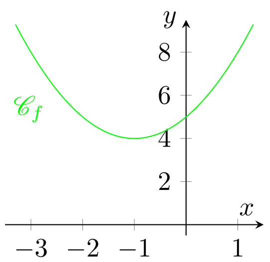
⊛ Soit $f(x) = x^2 + 2x + 5$. On a :

$$\Delta_f = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

Donc d'après la propriété 1.10, f n'a pas de racine. Comme $a = 1 > 0$, on a d'après la propriété 1.14 le ***tableau de signes*** suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

On peut vérifier en traçant $\mathscr{C}_f$ sur un graphique. Elle se trouve bien au dessus de l'axe des abscisses :



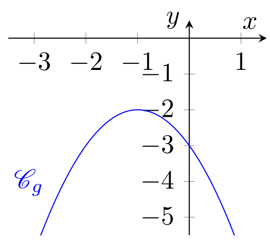
⊛ Soit $g(x) = -x^2 - 2x - 3$. On a :

$$\Delta_g = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4 - 12 = -8 < 0$$

Donc d'après la propriété 1.10, g n'a pas de racine. Comme $a = -1 < 0$, on a d'après la propriété 1.14 le ***tableau de signes*** suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

On peut vérifier en traçant $\mathscr{C}_g$ sur un graphique. Elle se trouve bien en dessous de l'axe des abscisses :



⊛ Soit $h(x) = x^2 - 4x + 4$. On a :

$$\Delta_h = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$$

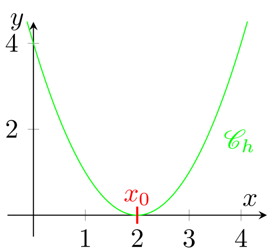
Donc d'après la propriété 1.10, h a une racine double qui est :

$$x_0 = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2$$

Comme $a = 1 > 0$, on a d'après la propriété 1.14 le ***tableau de signes*** suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

On peut vérifier en traçant $\mathscr{C}_h$ sur un graphique. Elle se trouve bien au dessus de l'axe des abscisses :



⊛ Soit $k(x) = -2x^2 + 4x - 2$. On a :

$$\Delta_k = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

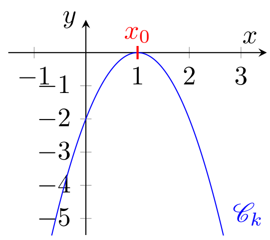
Donc d'après la propriété 1.10, k a une racine double qui est :

$$x_0 = \frac{-4}{2 \times (-2)} = 1$$

Comme $a = -2 < 0$, on a d'après la propriété 1.14 le ***tableau de signes*** suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$-$	

On peut vérifier en traçant $\mathscr{C}_k$ sur un graphique. Elle se trouve bien en dessous de l'axe des abscisses :



⊛ Soit $l(x) = x^2 - 5x + 6$. On a :

$$\Delta_l = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$$

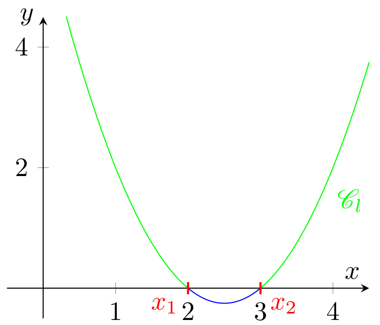
Donc d'après la propriété 1.10, l a deux racines distinctes qui sont :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3 \end{cases}$$

Comme $a = 1 > 0$, on a d'après la propriété 1.14 le ***tableau de signes*** suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$l(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut vérifier en traçant $\mathscr{C}_l$ sur un graphique. Elle se trouve bien au dessus de l'axe des abscisses :



⊛ Soit $m(x) = -x^2 + 3x + 4$. On a :

$$\Delta_m = 3^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 9 + 16 = 25$$

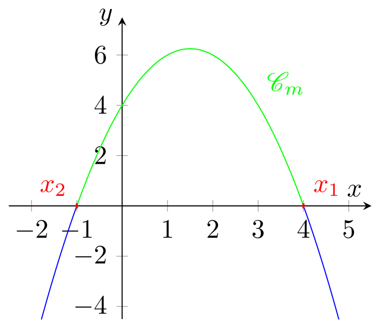
Donc d'après la propriété 1.10, m a deux racines distinctes qui sont :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = 4 \\ x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = -1 \end{cases}$$

Comme $a = 1 > 0$, on a d'après la propriété 1.14 le ***tableau de signes*** suivant :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut vérifier en traçant $\mathscr{C}_l$ sur un graphique. Elle se trouve bien au dessus de l'axe des abscisses :



⊛ Soit l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$. Résoudre l'inéquation c'est trouver les solutions de cette inéquation. On peut d'abord modifier le problème avec des inéquations équivalentes :

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x - 5 < -x + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 3x - 5 + x - 2 < -x + 2 + x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 4x - 7 < 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le problème devient « trouver les valeurs de x tel que $x^2 + 4x - 7$ est négatif ». On peut déterminer les solutions avec le ***tableau de signes*** de $x^2 + 4x - 7$ car ce tableau donnera en particulier les valeurs de x tel que le trinôme soit négatif.

Il faut donc d'abord calculer le discriminant pour savoir combien il y a de racine :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44 > 0$$

Donc il y a deux racines distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = \dfrac{-4 - \sqrt{4 \times 11}}{2} = \dfrac{-4 - \sqrt{4} \times \sqrt{11}}{2} = \dfrac{-4 - 2\sqrt{11}}{2} = -2 - \sqrt{11} \\ x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11} \end{cases}$$

On remarque que $-\sqrt{11} < \sqrt{11}$ donc en ajoutant -2 à chaque membre on a $-2 - \sqrt{11} < -2 + \sqrt{11}$ et donc que

$x_1 < x_2$. On peut donc les placer correctement dans l'ordre dans le ***tableau de signes*** de $x^2 + 4x - 7$ dont le coefficient dominant est $a = 1 > 0$. Ainsi d'après la propriété 1.14 on a :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^2+4x-7		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le ***tableau de signes*** de $x^2 + 4x - 7$ nous montre clairement que l'ensemble des solutions de $x^2 + 4x - 7 < 0$ est $\mathscr{S} = \left]-2-\sqrt{11}; -2+\sqrt{11}\right[$.

Mais comme l'inéquation $x^2 + 4x - 7 < 0$ est équivalente à $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ *(voir début de l'exemple)* donc l'ensemble des solutions de $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est aussi $\mathscr{S}$.

$\circledast$ *Dans cet exemple, une grande partie des calculs sera laissé au lecteur qui doit vérifier les résultats.*

Soient $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$. On cherche à déterminer la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$.

Par définition de la soustraction, le calcul $f(x) - g(x)$ nous dira quelle fonction est plus grand que l'autre :

$$\text{Si } f(x)-g(x) > 0 \text{ alors } f(x) > g(x)$$
$$\text{Si } f(x)-g(x) = 0 \text{ alors } f(x) = g(x)$$
$$\text{Si } f(x)-g(x) < 0 \text{ alors } f(x) < g(x)$$

On commence donc par déterminer la différence :

$$f(x) - g(x) = -x^2 + 7x - 10$$

On remarque que $f(x) - g(x)$ est un trinôme donc pour avoir son signe on détermine d'abord son discriminant :

$$\Delta_{f(x)-g(x)} = 9 > 0$$

Donc $f(x) - g(x)$ a deux racines distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

On remarque que $2 < 5$ donc $x_2 < x_1$. De plus le coefficient dominant de $f(x) - g(x)$ est $a = -1 < 0$ donc le ***tableau de signes*** est :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en conclue donc que

$$\begin{aligned} &\forall x \in \left]-\infty; 2\right[\cup \left]5; +\infty\right[, && f(x) < g(x) \\ &\forall x \in \left]-\infty; 2\right[, && f(x) > g(x) \\ &\forall x \in \{2; 5\}, && f(x) = g(x) \end{aligned}$$