Mathématiques

Enseignement de 2^{de} 2025-2026

Hicham AMARIR,

Lycées Val de Seine,

Le Grand-Quevilly.

Rédigé avec LaTeX

le 26 janvier 2026

Table des matières

1 Ensembles de nombres **3**

2 Projeté orthogonal **13**

3 Fonctions (partie géométrique) **17**

4 Proportions et pourcentages **28**

5 Multiples et diviseurs **32**

6 Vecteurs du plan **35**

7 Valeur absolue et distance dans le plan **40**

8 Fonctions (partie algébrique) **43**

9 Repérage dans le plan **47**

10 Fonctions affines **50**

11 Evolutions et pourcentages **55**

12 Calculs des vecteurs **60**

13 Fonctions de référence **65**

Chapitre 1

Ensembles de nombres

Définition 1.1 : (*Ensemble*)

On appelle ***ensemble*** un rassemblement d'objets distincts. Il est généralement noté par une lettre majuscule. Si deux ensembles distincts possèdent la même lettre, on les distinguer avec des indices.

Exemple :

- La classe de Seconde 6 forme un ensemble. On peut noter cette ensemble avec une lettre majuscule et un nombre en indice : S_6. On peut expliciter les objets de cette ensemble :

$$S_6 = \{\text{Şeyma}; \text{Déborah}; \text{Elodie}; \text{Maïssame}; \text{Sarah}; \text{Fanny}; \text{Julianne}; \text{Jade}; \ldots\}$$

  Cette façon de définir S_6 en listant les objets entre accolade séparés par des points-virgules s'appelle la ***notation en extension***.

- On peut aussi définir un ensemble en donnant ses propriétés caractéristiques. Si on définit P_r l'ensemble des pommes rouges qui existent on notera :

$$P_r = \{\text{pomme} \mid \text{pomme est rouge}\}$$

  Cette façon de définir P_r s'appelle la ***notation en compréhension***. La barre verticale peut se lire « *tel que* », « pomme » représente un élément générique de l'ensemble P_r et « pomme est rouge » est une propriété que doit vérifier l'objet « pomme » pour appartenir à l'ensemble P_r. Ainsi, tous les objets qui sont des « pommes » et qui vérifient la propriété « pomme est rouge » appartiennent à l'ensemble P_r.

Définition 1.2 : (*Elément*)

Soit E un ensemble.

On appelle ***élément*** de E tout objet appartenant à E.

Si x est un objet de E, on dira que x appartient à E et on notera $x \in E$.

Si x n'est pas un objet de E, on dira que x n'appartient pas à E et on notera $x \notin E$.

Exemple :

Elodie est un élément de S_6 donc Elodie $\in S_6$.

Définition 1.3 : (*Ensemble des entiers naturels*)

On appelle ***ensemble des entiers naturels*** l'ensemble des nombres entiers qui sont positifs.

On note $\mathbb{N}$ cet ensemble. On a donc :

$$\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ est un nombre entier positif}\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...\}$$

Exemple :

$4 \in \mathbb{N}$ $\quad 214\ 641\ 264\ 125\ 623 \in \mathbb{N}$ $\quad -51\ 312 \notin \mathbb{N}$ $\quad 0,2 \notin \mathbb{N}$ $\quad -4,5 \notin \mathbb{N}$ $\quad \frac{4}{2} \in \mathbb{N}$ $\quad -7+10 \in \mathbb{N}$ $\quad 80-53 \in \mathbb{N}$

Définition 1.4 : (*Ensemble des entiers relatifs*)

On appelle ***ensemble des entiers relatifs*** l'ensemble des nombres entiers qui sont positifs ou négatifs.

On note cet ensemble $\mathbb{Z}$ et on a :

$$\mathbb{Z} = \{n \mid n \text{ est un nombre entier positif ou négatif}\} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$$

Exemple :

$4 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $214\ 641\ 264\ 125\ 623 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $-51\ 312 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $0,2 \notin \mathbb{Z}$ $\quad$ $-4,5 \notin \mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{4}{2} \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $-7+10 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $80-53 \in \mathbb{Z}$

Définition 1.5 : (*Ensemble des décimaux*)

On appelle ***ensemble des nombres décimaux*** l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre de chiffres fini après la virgule. Donc il peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

On note cet ensemble $\mathbb{D}$ et on a :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Exemple :

$4 = \frac{4}{1} = \frac{4}{10^0} \in \mathbb{D}$ $\quad$ $214\ 641\ 264\ 125\ 623 = \frac{214\ 641\ 264\ 125\ 623}{10^0} \in \mathbb{D}$ $\quad$ $-51\ 312 = \frac{-51\ 312}{10^0} \in \mathbb{D}$ $\quad$ $0,2 = \frac{2}{10^1} \in \mathbb{D}$

$-4,5 = \frac{-45}{10^1} \in \mathbb{D}$ $\quad$ $\frac{4}{2} = \frac{4\times5}{2\times5} = \frac{20}{10^1} \in \mathbb{D}$ $\quad$ $-7+10 = \frac{3}{10^0} \in \mathbb{D}$ $\quad$ $80-53 = \frac{27}{10^0} \in \mathbb{D}$

$0,333... = \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (voir preuve à la fin du chapitre) $\quad$ $\pi \notin \mathbb{D}$ $\quad$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{D}$ $\quad$ $-0,000\ 24 = \frac{-24}{10^5} \in \mathbb{D}$

Définition 1.6 : (*Exclusion du nombre 0*)

En cas de besoin, il est possible d'exclure le nombre 0 d'un ensemble à l'aide du symbole *. Ainsi :

$$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \{...; -3; -2; -1; 1; 2; 3; ...\}$$

etc.

Définition 1.7 : (*Fraction*)

On appelle ***fraction*** l'écriture d'un quotien avec un numérature entier et un dénominateur non nul entier.

Si l'écriture $\frac{a}{b}$ est une fraction, alors $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

Exemple :

Malgré le fait que $\frac{0,5}{1,5} = \frac{5}{15}$, l'écriture $\frac{0,5}{1,5}$ n'est pas une fraction car $0,5 \notin \mathbb{Z}$ et $1,5 \notin \mathbb{Z}^*$ alors que l'écriture $\frac{5}{15}$ est une fraction car $5 \in \mathbb{Z}$ et $15 \in \mathbb{Z}^*$.

Définition 1.8 : (*Ensemble des nombres rationnels*)

On appelle ***ensemble des nombres rationnels*** l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction. On note cet ensemble $\mathbb{Q}$ et on a :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exemple :

$25 = \frac{25}{1} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $-7 = \frac{-7}{1} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $3,725 = \frac{3\ 725}{1\ 000} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $-0,000\ 125 = \frac{-125}{10^6} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $0,2 = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $\pi \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (voir la preuve du chapitre n° ? ? ?) $\quad$ $\sqrt{16} = \frac{4}{1} \in \mathbb{Q}$

Définition 1.9 : *(Infini)*

On appelle ***infini*** une limite que les nombres ne pourront jamais atteindre.

On note $+\infty$ la limite dont tous les nombres sont plus petits.

On note $-\infty$ la limite dont tous les nombres sont plus grands.

Exemple :

- -4 est plus petit que $+\infty$ et il est plus grand que $-\infty$
- 63 495 141 541 935 246 125 699 742 214 762 593 675 257 396 est plus petit que $+\infty$ et il est plus grand que $-\infty$
- π est plus petit que $+\infty$ et il est plus grand que $-\infty$
- $\sqrt{2}$ est plus petit que $+\infty$ et il est plus grand que $-\infty$

Définition 1.10 : *(Ensemble des nombres réels)*

On appelle ***ensemble des nombres réels*** l'ensemble des nombres qui sont plus petit que $+\infty$ et qui sont plus grand que $-\infty$.

On note cet ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple :

$25 \in \mathbb{R}$ $\quad -7 \in \mathbb{R}$ $\quad 3,725 \in \mathbb{R}$ $\quad -0{,}000\ 125 \in \mathbb{R}$ $\quad 0,2 = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ $\quad \pi \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{16} \in \mathbb{R}$

Définition 1.11 : *(Ensemble des nombres irrationnels)*

On appelles ***ensemble des nombres irrationnels*** l'ensemble des nombres qui sont réels et qui ne sont pas rationnels. On le note $\mathbb{Q}'$ ou encore $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a donc :

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$$

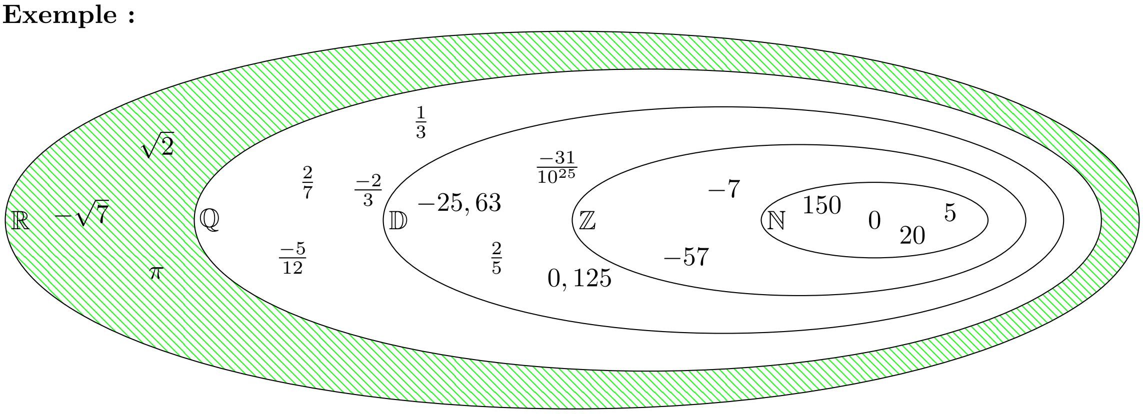
Exemple :

$25 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad -7 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad 3,725 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad -0{,}000\ 125 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad \frac{1}{3} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{16} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Définition 1.12 : *(Diagramme d'Euler)*

On appelle ***diagramme d'Euler*** une représentation graphique utilisée pour illustrer les relations entre différents ensembles.

Exemple :



La zone hachuré représente $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Définition 1.13 : (*Quantificateur universel*)

On appelle ***quantificateur universel*** un opérateur logique, noté $\forall$, utilisé pour exprimer l'idée que tous les éléments d'un ensemble donné possèdent une certaine propriété.

Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit ».

Exemple :

- Soit O l'ensemble des oiseaux. On peut écrire la propriété suivante :

$$\forall o \in O, \quad o \text{ vole.}$$

  On peut lire la propriété de la façon suivante : Pour tout élément o dans l'ensemble des oiseaux, on a o qui vole.

- La notation formelle de la phrase « pour tout réel, son carré est positif » est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$$

- « La somme d'un nombre réel avec son opposé est toujours nul » peut être traduit formellement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + (-x) = 0$$

Définition 1.14 : (*Quantificateur existenciel*)

On appelle ***quantificateur existentiel*** un opérateur logique, noté $\exists$, utilisé pour exprimer l'idée qu'il existe au moins un élément dans un ensemble donné qui possède une certaine propriété.

Le symbole $\exists$ se lit « il existe ».

Exemple :

- Soit A l'ensemble des animaux. La phrase « Il y a au moins un animal qui peut voler » peut se traduit formelment par :

$$\exists a \in A, \quad a \text{ vole.}$$

- « Il existe un nombre entier qui est supérieur à 10 » se traduit formellement par :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 10$$

- « On peut trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, donne 25 » se traduit formellement par :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x \times x = 25$$

Définition 1.15 : (*Inclusion, sous-ensemble, sur-ensemble*)

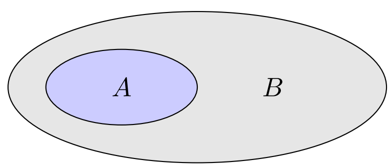
Soient A et B deux ensembles.

On dit que A est ***inclus*** dans B, et on note $A \subset B$, si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B.

Dans ce cas, on dit aussi que A est un ***sous-ensemble*** de B, ou encore que B est un ***sur-ensemble*** de A.

Autrement dit :

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in A,\ a \in B$$



Si A ***n'est pas inclus*** dans B on notera $A \not\subset B$.

Propriété 1.16 : (*Inclusion des ensembles usuels*)

On a les inclusions suivantes :

- $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{D}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$
- $\mathbb{Q}$ est un sur-ensemble de $\mathbb{D}$: $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Autrement dit :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Preuve :

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

  Donc n est un entié positif. Mais d'après la définition 1.4, tout entier positif ou négatif appartient à $\mathbb{Z}$ donc $n \in \mathbb{Z}$. On en conclue que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$.

  $$n = \frac{n}{1} = \frac{n}{10^0}$$

  Donc d'après la définition 1.5, $n \in \mathbb{D}$. On en conclue que $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$.

- Soit $d \in \mathbb{D}$. Donc d'après la définition 1.5 :

  $$\exists a \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad d = \frac{a}{10^n}$$

  D'après la définition 1.8, il faut montrer que d peut s'écrire sous la forme d'une fraction.

  Si $n \geqslant 0$, il est claire que l'écriture $\frac{a}{10^n}$ est une fraction. En effet on aura $a \in \mathbb{Z}$ et $10^n \in \mathbb{N}^*$

  On vient de montrer que, dans tous les cas, d peut s'écrire sous la forme d'une fraction. Donc $d \in \mathbb{Q}$. On en conclue alors que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

- Soit $q \in \mathbb{Q}$. D'après la définition 1.8 on a :

  $$\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{N}^*, \quad q = \frac{a}{b}$$

  D'après la définiton 1.9, le résultat d'une telle division $\frac{a}{b}$ est forcement plus grand que $-\infty$ et est forcement plus petit que $+\infty$.

  Donc d'après la définition 1.10, $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$.

  On vient donc de montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On conclue alors la preuve par la synthèse suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Définition 1.17 : (*Intersection*)

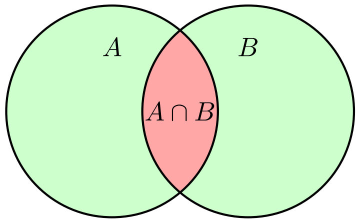
Soient A et B deux ensembles.

On appelle ***intersection*** de A et de B, et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui sont dans A **et** dans B.

Si un élément x est dans A **et** dans B alors on notera : $x \in A \wedge x \in B$.

Autrement dit :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



Définition 1.18 : (*Union*)

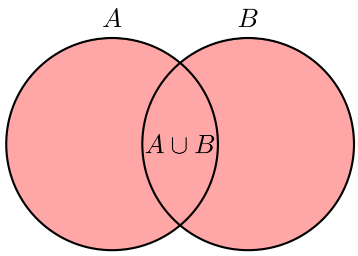
Soient A et B deux ensembles.

On appelle ***union*** ou bien ***réunion*** de A et de B, et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui sont dans A **ou** dans B.

Si un élément x est dans A **ou** dans B alors on notera : $x \in A \vee x \in B$.

Autrement dit :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



Exemple :

- Soient $A = \{\text{pommes; poires; bananes}\}$ et $B = \{\text{poires; bananes; oranges}\}$.

  On a donc :

$$A \cap B = \{\text{poires; bananes}\}$$
$$A \cup B = \{\text{pommes; poires; bananes; oranges}\}$$

- Soient $M = \{\text{élèves} \mid \text{élèves est du club de mathématiques}\}$ et $F = \{\text{élèves} \mid \text{élèves est du club de français}\}$

  On a donc :

$$M \cap F = \{\text{élèves} \mid \text{élèves font partie du club de mathématiques et du club de français}\}$$
$$M \cup F = \{\text{élèves} \mid \text{élèves font partie du club de mathématiques ou du club de français}\}$$

- Soient A l'ensemble des entiers pairs et B l'ensemble des entiers multiples de 3.

  On a donc :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k \wedge \exists k' \in \mathbb{Z}, n = 3k'\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z}, n = 2k \times 3k'\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k'' \in \mathbb{Z}, n = 6k''\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est un multiple de } 6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k \vee \exists k' \in \mathbb{Z}, n = 3k'\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est un multiple de 2 ou un multiple de 3}\} \end{aligned}$$

- (∗) Soient $A = \{2; 4; 6; 7; 8; 10\}$ et $B = \{3; 4; 8; 12\}$.

  On a donc :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{2; 4; 6; 7; 8; 10\} \cap \{3; 4; 8; 12\} \\ &= \{4; 8\} \\ A \cup B &= \{2; 4; 6; 7; 8; 10\} \cup \{3; 4; 8; 12\} \\ &= \{2; 3; 4; 6; 7; 8; 10; 12\} \end{aligned}$$

- (∗) Soient $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ et $B = \{2; 5; 7\}$.

  On remarque que $B \subset A$ donc :

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \\ A \cup B &= A \end{aligned}$$

Définition 1.19 : (*Ensemble vide*)

On appelle ***ensemble vide*** l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$. Il peut être défini par :

$$\emptyset = \{\}$$

Exemple :

Soit $A = \{0; 2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. On a :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{0; 2; 4; 6\} \cap \{1; 3; 5; 7; 9\} \\ &= \{\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Définition 1.20 : (*Intervalle réel*)

On appelle ***intervalle réel*** un ensemble de nombres délimité par deux nombres réels a et b constituant une borne inférieure et une borne supérieure. Un ***intervalle*** contient tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.

En fonction de si les bornes sont incluses ou non dans l'intervalle, on distingue les ***intervalles*** :

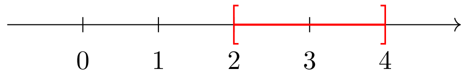
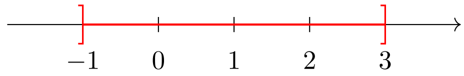
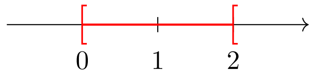
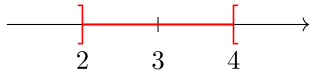
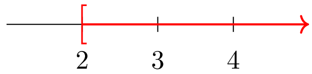
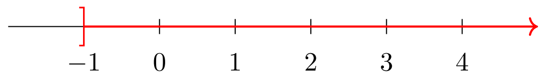
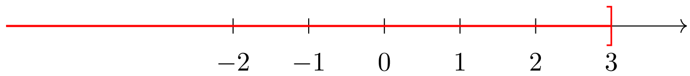
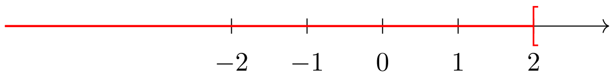
Intervalle ouvert : $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Intervalle fermé : $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

Intervalle semi-ouvert à gauche : $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

Intervalle semi-ouvert à droite : $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

Exemple :

Inégalité	Intervalle	Représentation
$2 \leqslant x \leqslant 4$	$x \in [2;4]$	
$-1 < x \leqslant 3$	$x \in]-1;3]$	
$0 \leqslant x < 2$	$x \in [0;2[$	
$2 < x < 4$	$x \in]2;4[$	
$x \geqslant 2$	$x \in [2;+\infty[$	
$x > -1$	$x \in]-1;+\infty[$	
$x \leqslant 3$	$x \in]-\infty;3]$	
$x < 2$	$x \in]-\infty;2[$	

⊛ Soient les intervalles $A =]1;5[$ et $B =]3;7[$.

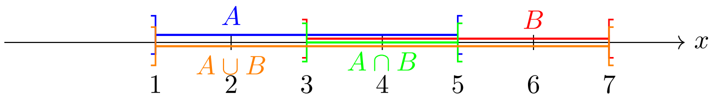
L'intersection de A et B est :

$$A \cap B =]1;5[\cap]3;7[=]3;5[$$

La réunion de A et B est :

$$A \cup B =]1;5[\cup]3;7[=]1;7[$$

La représentation sur une droite graduée des ensembles A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$ est :



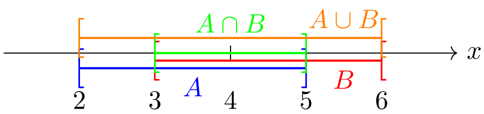
⊛ Soient les intervalles $A = [2;5]$ et $B = [3;6[$.

L'intersection de A et B est :

$$A \cap B = [2;5] \cap [3;6[= [3;5]$$

La réunion de A et B est :

$$A \cup B = [2;5] \cup [3;6[= [2;6[$$



Définition 1.21 : (*Négation*)

Soit P une proposition.

On appelle ***négation*** de P la proposition qui est vraie lorsque P est fausse, et qui est fausse lorsque P est vraie. On note la négation de P par $\neg P$ et se lit « non P ».

En d'autres termes, la négation d'une proposition affirme exactement le contraire de cette proposition.

On peut résumer la situation dans une table de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

avec V l'abréviation de Vrai et F l'abréviation de Faux.

Exemple :

Soit la proposition P : « Il pleut ».

Alors sa négation est $\neg P$: « Il ne pleut pas ».

Si P est vraie alors $\neg P$ est fausse. Si P est fausse alors $\neg P$ est vraie.

Définition 1.22 : (*Raisonnement par l'absurde*)

On appelle ***raisonnement par l'absurde*** une méthode de démonstration qui consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut prouver. En développant les conséquences logiques de cette supposition, on aboutit à une contradiction, ce qui permet de conclure que la supposition initiale était fausse et donc que la proposition que l'on voulait démontrer est **vraie**.

Exemple :

Soit la proposition P : « Il n'existe pas de plus grand nombre entier. »

Pour démontrer P, on suppose la négation de P de :

$$\neg P : \text{« Il existe un plus grand nombre entier »}$$

On peut donc nommer ce plus grand nombre entier :

$$\text{Soit } N \in \mathbb{Z} \text{ le plus grand nombre entier.}$$

Mais alors, $N + 1$ serait un nombre entier encore plus grand, ce qui contredit notre hypothèse initiale $\neg P$.

Donc, l'hypothèse $\neg P$ est fausse, et par conséquent, P est vraie.

Autrement dit : il n'y a pas de plus grand nombre entier.

Propriété 1.23 : ($\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$)

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Autrement dit :

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

Preuve :

Soit P la proposition définie par :

$$P : \text{«}\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}\text{»}$$

Pour montrer la proposition P, on va utiliser le raisonnement par l'absurde. Supposons $\neg P$:

$$\neg P : \text{« } \frac{1}{3} \in \mathbb{D} \text{ »}$$

Autrement dit : supposons que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal. Alors, il existe deux entiers relatifs a et n tels que :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par 3×10^n, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times 3 \times 10^n = \frac{a}{10^n} \times 3 \times 10^n \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \times 10^n = a \times 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 10^n = 3a \end{aligned}$$

Cette égalité implique que 10^n est un multiple de 3. Or, la somme des chiffres de 10^n est toujours égale à 1 :

$$1 + n \times 0 = 1 + 0 = 1$$

Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Comme 1 n'est pas un multiple de 3, on aboutit à une contradiction.

Par conséquent, notre hypothèse $\neg P$ de départ est fausse et donc P est vraie.

Autrement dit : $\frac{1}{3}$ ne peut pas être un nombre décimal.

Chapitre 2

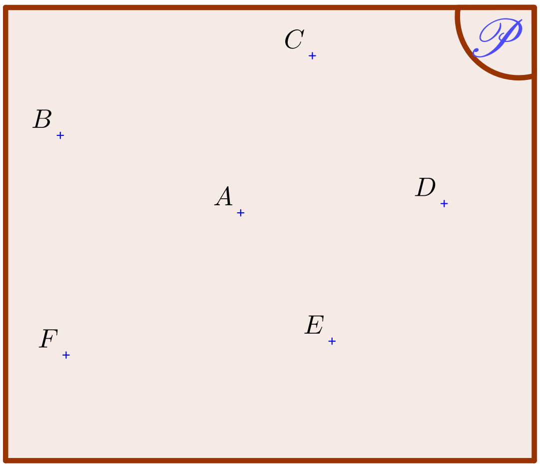
Projeté orthogonal

Définition 2.1 : (*Plan euclidien*)

On appelle ***plan euclidien*** une surface plane *(à l'image d'une feuille de papier)* infinie, et qui s'étend indéfiniment dans toutes les directions. Tout élément d'une telle surface qui n'a pas d'épaisseur ni de longueur *(autrement dit : qui n'a pas d'étendue)* est appellé ***point***.

Ainsi le regroupement de tous ces points forment un ensemble. Cet ensemble est noté $\mathscr{P}$ qui est le ***plan euclidien***.

Exemple :



On peut représenter le plan euclidien $\mathscr{P}$ par le rectangle ci-contre. Bien sûr, $\mathscr{P}$ n'est pas limité au rectangle mais il s'étant bien à l'infini dans toutes les directions.

Ici on a représenté des éléments de $\mathscr{P}$ qui n'ont pas d'étendue et sont représentés par les intersections formées par les segments des croix. Ainsi A, B, C, D, E et F sont des éléments de $\mathscr{P}$ et on a donc $A \in \mathscr{P}$, $B \in \mathscr{P}$, $C \in \mathscr{P}$, $D \in \mathscr{P}$, $E \in \mathscr{P}$ et $F \in \mathscr{P}$.

Il en est de même pour tous les autres points existants sur ce plan.

Définition 2.2 : (*Droite*)

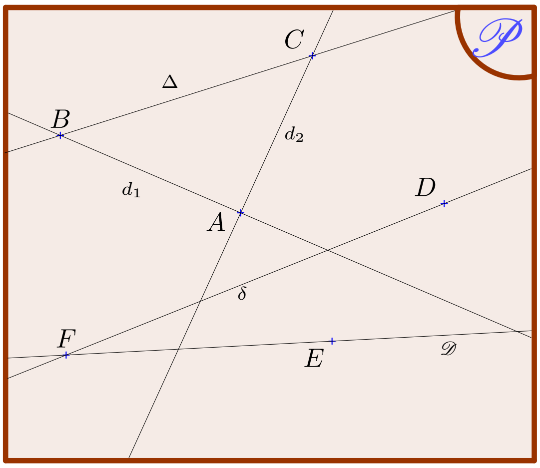
Soit $\mathscr{P}$ un plan euclidien.

On appelle ***droite*** de $\mathscr{P}$ tout ensemble formée par un alignement parfait de points dans ce plan qui s'étend à l'infini dans les deux sens, sans élément manquant dans toute sa longueur et sans épaisseur.

De manière générale, un tel ensemble est noté $\mathscr{D}$, $\mathcal{D}$, $\mathfrak{D}$, Δ *(« Delta »)*, d, ou δ *(« delta »)*. Et comme dans la définition 1.1, sa notation peut être indexé *(avoir un indice)*.

On peut aussi noter un tel ensemble avec les noms de deux éléments de cette droite choisie arbitrairement : si $\mathscr{D}_1$ est un droite de $\mathscr{P}$ *(autrement dit $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{P}$)* et si A et B sont des points de cette droite, donc des éléments de $\mathscr{D}_1$ (autrement dit $A \in \mathscr{D}_1$ et $B \in \mathscr{D}_1$) alors on peut noter l'ensemble (AB) qui est le même ensemble que $\mathscr{D}_1$ et on a l'égalité $(AB) = \mathscr{D}_1$.

Exemple :



On a d_1, d_2, Δ, δ et $\mathscr{D}$ qui sont des droites de $\mathscr{P}$. En effet leur représentation montre clairement un ensemble de points alignés. De plus :

$A \in d_1$	$B \in d_1$	$C \in \Delta$	$D \in \delta$	$E \in \mathscr{D}$	$F \in \delta$
$A \in d_2$	$B \in \Delta$	$C \in d_2$			$F \in \mathscr{D}$

On a donc :

$$d_1 = (AB) \quad d_2 = (AC) \quad \Delta = (BC) \quad \delta = (DF) \quad (EF) = \mathscr{D}$$

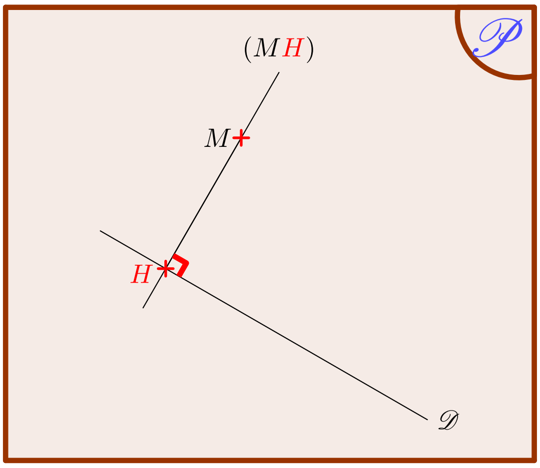
Définition 2.3 : *(Projeté orthogonal)*

On appelle ***projeté orthogonal*** d'un point sur une droite le ***point d'intersection*** de cette droite avec la droite perpendiculaire passant par le point initial.

Autrement dit : soient $\mathscr{P}$ un plan euclidien, $M \in \mathscr{P}$, $H \in \mathscr{P}$ et une droite $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$.

$$H \text{ est le } \textbf{\textit{projeté orthogonal}} \text{ de } M \text{ sur } \mathscr{D} \quad \Leftrightarrow \quad (MH) \perp \mathscr{D} \text{ et } H \in \mathscr{D}$$

Exemple :



Ci-contre, on a graphiquement la proposition suivante qui est vraie :

$$(MH) \perp \mathscr{D} \wedge H \in \mathscr{D} \;\Leftrightarrow\; H \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur } \mathscr{D}.$$

On en conclue donc que H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

Définition 2.4 : *(Distance d'un point à une droite)*

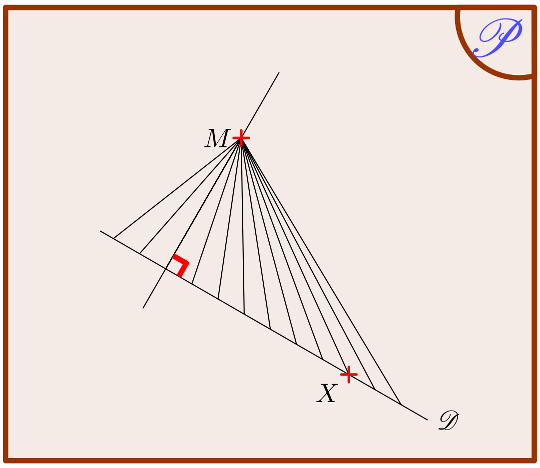
On appelle ***distance d'un point à une droite*** la longueur minimale parmi toutes les longueurs des segments qui relient ce point à un point quelconque de la droite.

Autrement dit : soient $\mathscr{P}$ un plan euclidien, $M \in \mathscr{P}$, une droite $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ et $X \in \mathscr{P}$.

La longueur XM est la ***distance entre M et $\mathscr{D}$*** si et seulement si :

$$\forall Y \in \mathscr{D}, \; XM \leqslant YM$$

Exemple :



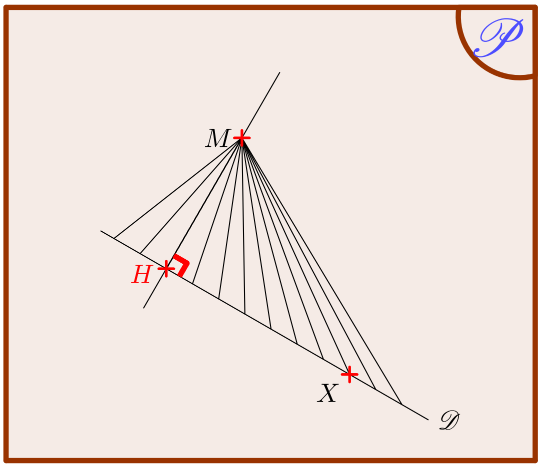
Sachant que le point X est un point qui peut bouger sur $\mathscr{D}$, le but est de trouver l'emplacement du point X sur la droite $\mathscr{D}$ de telle sorte que la distance entre X et M soit la plus petite possible. On arrive à voir intuitivement de quel point il s'agit. Mais une intuition n'est pas une preuve. La réponse est donnée dans la propriété 2.5 qui est la suivante.

Propriété 2.5 : (*Longueur la plus courte d'un point à une droite*)

Soient $\mathscr{P}$ un plan euclidien, un point $M \in \mathscr{P}$, une droite $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ et $H \in \mathscr{D}$ le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$. La plus courte distance entre M et n'importe quel point de la droite $\mathscr{D}$ est le point H. Autrement dit :

$$\forall X \in \mathscr{D}, \quad HM \leqslant XM$$

Preuve :



Soients :

$\mathscr{P}$ un plan euclidien,

$\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ une droite quelconque de $\mathscr{P}$,

$M \in \mathscr{P}$ un point quelconque de $\mathscr{P}$,

$X \in \mathscr{D}$ un point quelconque de $\mathscr{D}$

et $H \in \mathscr{D}$ le projeté orthogonale de M sur $\mathscr{D}$.

Par définition de H *(c'est le projeté orthogonale, voire 2.3)*, MHX est un triangle rectangle en H.

Donc d'après le théorème de Pythagore :

$$MH^2 + HX^2 = MX^2$$

HX^2 est un carré donc $HX^2 \geqslant 0$. On en déduit donc :

$$MH^2 \leqslant MX^2$$

Donc d'après la propriété ?? *(croissance de la fonction racine carrée)* d'un future chapitre on a :

$$HM \leqslant MX$$

Autrement dit : en prenant un X quelconque sur $\mathscr{D}$, la distance HM est plus petite que MX.

Donc la distance la plus courte entre M et $\mathscr{D}$ est HM.

Exemple :

Si une personne est dans une prairie, et qu'elle souhaite rejoindre le bord de la route modélisable par une droite, alors elle doit marcher le long du segment qui est perpendiculaire à la route et qui passe par elle.

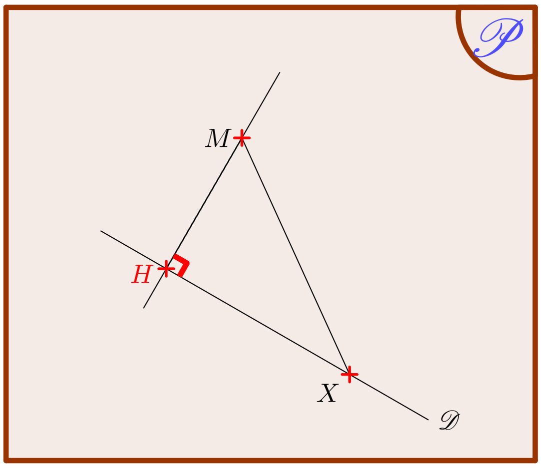
Propriété 2.6 : *(Première identité trigonométrique pythagoricienne)*

Soient $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ une droite quelconque de $\mathscr{P}$, $M \in \mathscr{P}$ un point quelconque de $\mathscr{P}$, $X \in \mathscr{D}$ un point quelconque de $\mathscr{D}$ et $H \in \mathscr{D}$ le projeté orthogonale de M sur $\mathscr{D}$.

On a l'égalité suivante :

$$\left(\cos\left(\widehat{MXH}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\widehat{MXH}\right)\right)^2 = 1$$

Preuve :



Soients :

$\mathscr{P}$ un plan euclidien,

$\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ une droite quelconque de $\mathscr{P}$,

$M \in \mathscr{P}$ un point quelconque de $\mathscr{P}$,

$X \in \mathscr{D}$ un point quelconque de $\mathscr{D}$

et $H \in \mathscr{D}$ le projeté orthogonale de M sur $\mathscr{D}$.

Le triangle MHX est rectangle en H (voire 2.3). Donc d'après les définitions élémentaires des fonctions sinus et cosinus en termes de côtés d'un triangle rectangle, on a :

$$\cos(\widehat{MXH}) = \frac{HX}{MX}$$
$$\sin(\widehat{MXH}) = \frac{HM}{MX}$$

Ainsi, en élevant au carré les fonctions cosinus et sinus, on obtient :

$$\left(\cos(\widehat{MXH})\right)^2 = \left(\frac{HX}{MX}\right)^2 = \frac{HX^2}{MX^2}$$
$$\left(\sin(\widehat{MXH})\right)^2 = \left(\frac{HM}{MX}\right)^2 = \frac{HM^2}{MX^2}$$

Si on additionne les carrés des fonctions cosinus et sinus, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\cos(\widehat{MXH})\right)^2 + \left(\sin(\widehat{MXH})\right)^2 &= \frac{HX^2}{MX^2} + \frac{HM^2}{MX^2} \\ &= \frac{HX^2 + HM^2}{MX^2}\end{aligned}$$

Comme MHX est un triangle rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a $HX^2 + HM^2 = MX^2$, et donc en remplacant au numérateur du quotient, on obtient :

$$\left(\cos(\widehat{MXH})\right)^2 + \left(\sin(\widehat{MXH})\right)^2 = \frac{HX^2 + HM^2}{MX^2} = \frac{MX^2}{MX^2} = 1$$

Finalement on a montré que $\left(\cos(\widehat{MXH})\right)^2 + \left(\sin(\widehat{MXH})\right)^2 = 1$.

Chapitre 3

Fonctions (partie géométrique)

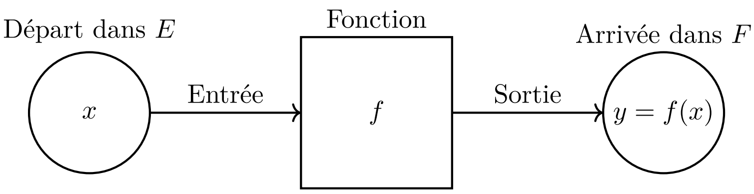
Définition 3.1 : (*Fonction*)

On appelle ***fonction*** ce qui va transformer un élément d'un ensemble de départ en un unique élément d'un ensemble d'arrivé.

Autrement dit : soient E et F deux ensembles.

On appelle ***fonction*** de E dans F une application qui à tout élément $x \in E$ associe un unique élément $y \in F$.

On note alors $f : E \to F$ la fonction nommé f qui à $x \in E$ associe $y \in F$ et on écrit $y = f(x)$.



Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à tout réel x associe le réel $f(x) = 2x + 3$.

On a par exemple :

$$f(0) = 2 \times 0 + 3 = 3 \text{ donc à } 0 \text{ on associe } 3$$

$$f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5 \text{ donc à } 1 \text{ on associe } 5$$

$$f(2) = 2 \times 2 + 3 = 7 \text{ donc à } 2 \text{ on associe } 7$$

$$f(-1) = 2 \times (-1) + 3 = 1 \text{ donc à } -1 \text{ on associe } 1$$

Définition 3.2 : (*Image et antécédent*)

Soient $f : E \to F$ une fonction, $x \in E$ et $y \in F$ tels que $y = f(x)$.

y est appellée ***l'image*** de x par f. En effet, x n'a qu'une seule image.

x est appellé ***un antécédent*** de y par f. En effet, y peut avoir plusieurs antécédents.

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction qui à tout réel x associe le réel $f(x) = 2x + 3$.

On a :

$f(0) = 3$	donc	3 est l'image de 0 par f	et	0 est un antécédent de 3 par f.
$f(1) = 5$	donc	5 est l'image de 1 par f	et	1 est un antécédent de 5 par f.
$f(2) = 7$	donc	7 est l'image de 2 par f	et	2 est un antécédent de 7 par f.
$f(-1) = 1$	donc	1 est l'image de -1 par f	et	-1 est un antécédent de 1 par f.

Définition 3.3 : (*Courbe représentative d'une fonction*)

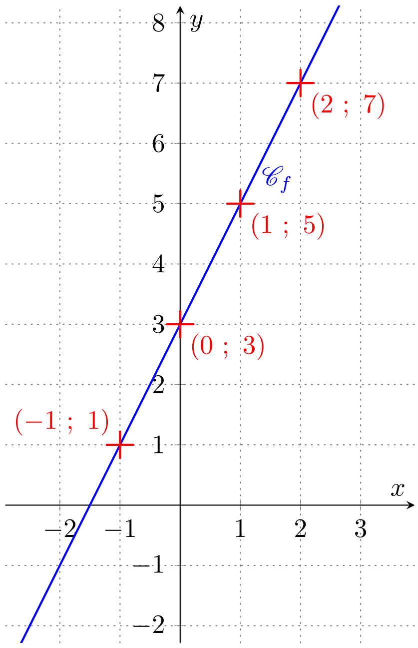
Soient $f : E \to F$ une fonction, $x \in E$ et $y \in F$ tels que $y = f(x)$.

La ***courbe représentative de la fonction*** f est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont les

couples $(x ; f(x))$ où x est un élément de l'ensemble de départ E.
On note souvent la ***courbe représentative de la fonction*** f par $\mathscr{C}_f$.

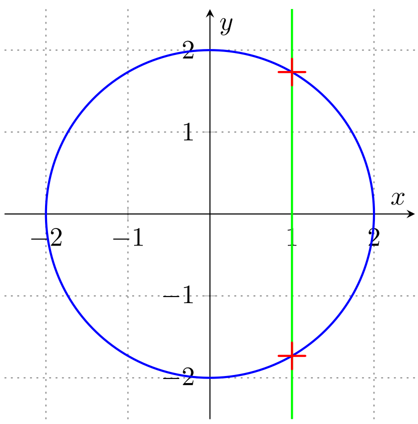
Exemple :

⊛ En reprenant l'exemple précédent : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction qui à tout réel x associe le réel $f(x) = 2x + 3$.



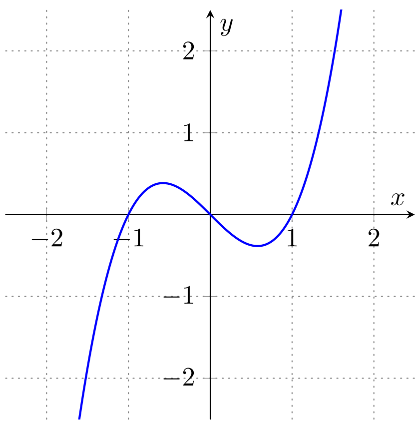
La courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont les couples $(x ; 2x + 3)$ où $x \in \mathbb{R}$.
Par exemple, comme $f(1) = 5$ alors le point de coordonnées $(1 ; 5)$ appartient à $\mathscr{C}_f$. On notera alors $(1 ; 5) \in \mathscr{C}_f$.
Comme plusieurs points on déjà été calculés dans l'exemple précédent, on peut les placer sur un repère.
On peut donc tracer la courbe représentative de la fonction f.

⊛ Sans connaître l'expression d'une fonction, on peut déterminer si une courbe d'un graphique peut être la courbe représentative d'une fonction ou non.

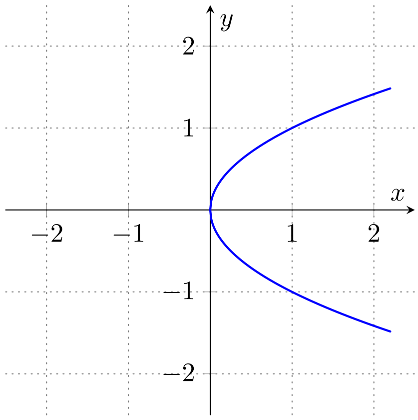


Si on prend par exemple $x = 1$, on voit que la droite verticale passant par $x = 1$ coupe la courbe en deux points.
Donc $x = 1$ a deux images différentes.
Or une fonction ne peut pas avoir un élément de l'ensemble de départ qui a plusieurs images.
Donc cette courbe ne peut pas être la courbe représentative d'une fonction.

⊛



Ici, pour chaque valeur de x, il n'y a qu'une seule image y sur la courbe.
Ainsi, cette courbe peut être la courbe représentative d'une fonction.

⊛ 

Ici, pour chaque valeur de x strictement positive, il y a deux images y sur la courbe.

Ainsi, cette courbe ne peut pas être la courbe représentative d'une fonction.

Définition 3.4 : (*Ensemble de définition d'une fonction*)

Soient f une fonction et E un ensemble.

On appelle ***ensemble de définition de f*** l'***ensemble des éléments*** de E qui ont une image par f qui existe.

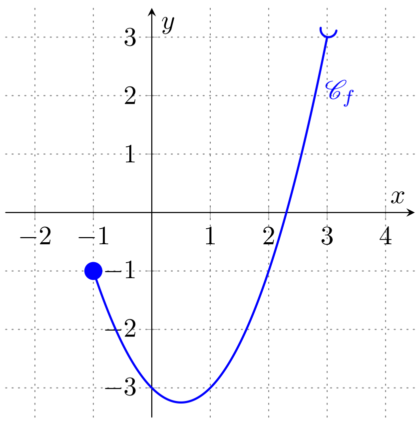
Autrement dit, l'***ensemble de définition de f*** est l'***ensemble des x*** dans E pour lesquels $f(x)$ existe.

On le note généralement $\mathscr{D}_f$:

$$\mathscr{D}_f = \{x \in E \mid f(x) \text{ existe}\}$$

Exemple :

⊛ Soit la courbe suivante :



On peut voir que pour chaque valeur de x strictement comprise entre -1 et 3, il y a une unique image y sur la courbe.

Par contre, pour $x < -1$ ou $x > 3$, il n'y a pas d'image y sur la courbe.

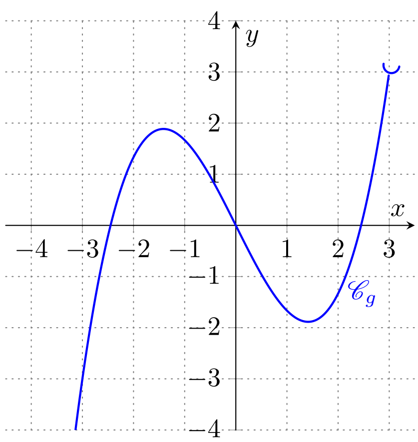
De plus, on remarque un point plein en $(-1\ ;\ -1)$, donc $f(-1) = -1$ existe.

Et on remarque un arc de cercle en $(3\ ;\ 3)$, ce qui annonce que 3 n'a pas d'image par f et donc que $f(3)$ n'existe pas.

Donc l'ensemble de définition de cette fonction est l'intervalle $[-1\ ;\ 3[$.

Autrement dit : $\mathscr{D}_f = [-1\ ;\ 3[$.

⊛ Soit la courbe suivante :



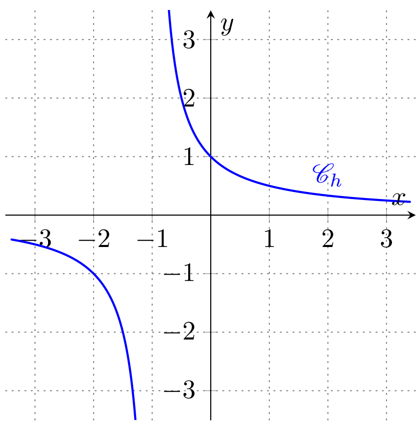
Ici, le fait qu'il n'y ait pas de point plein ou d'arc de cercle sur la partie gauche de la courbe nous laisse supposer que la courbe se prolonge indéfiniment vers la gauche sans s'arrêter en gardant la même allure.

Ainsi, pour tout $x < 3$, il y a une unique image y sur la courbe.

Pour $x \geqslant 3$, il n'y a pas d'image sur la courbe montrer par l'arc de cercle en $(3\ ;\ 3)$ et l'absence de trace de la courbe à droite de $x = 3$.

Donc $\mathscr{D}_g =]-\infty\ ;\ 3[$.

$\circledast$ Soit la courbe suivante :



Ici, la courbe est tracée partout sauf en $x = -1$ où il y a une discontinuité.

L'ensemble de définition est donc :

$\mathscr{D}_h =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[\, = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Propriété 3.5 : (*Lecture graphique*)

Lorsqu'une fonction f est définie par sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé, on peut lire graphiquement les associations entre les antécédents et les images de la façon suivante :

$\circledast$ Pour lire l'image y d'un antécédent x :

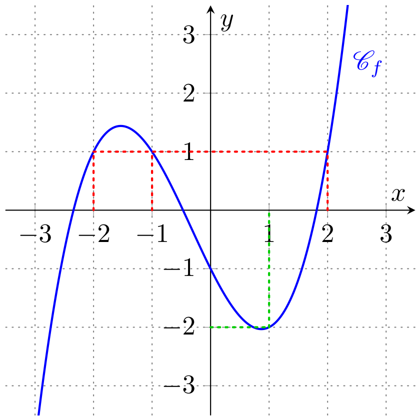
- On trace la droite verticale passant par x sur l'axe des abscisses jusqu'à $\mathscr{C}_f$ formant un point d'intersection.
- On trace ensuite la droite horizontale passant par ce point d'intersection jusqu'à l'axe des ordonnées.
- On lit l'ordonnée de ce point d'intersection avec l'axe des ordonnées. Cette ordonnée est l'image $y = f(x)$.
- Si la droite verticale ne coupe pas la courbe, alors x n'a pas d'image.
- Si la droite verticale coupe la courbe en un seul point, alors l'antécédent x a une image.
- Si la droite verticale coupe la courbe en plusieurs points, alors l'antécédent x a plusieurs images (ce qui est impossible pour une fonction).

$\circledast$ Pour lire un antécédent x d'une image y :

- On trace la droite horizontale passant par $f(x)$ jusqu'à $\mathscr{C}_f$ formant un ou plusieurs points d'intersection.
- On trace ensuite la ou les droites verticales passant par ces points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses.
- On lit les abscisses de ces points d'intersection avec l'axe des abscisses. Ces abscisses sont les antécédents de $f(x)$.
- Si la droite horizontale ne coupe pas la courbe, alors l'image $f(x)$ n'a pas d'antécédent.
- Si la droite horizontale coupe la courbe en plusieurs points, alors l'image $f(x)$ a plusieurs antécédents.
- Si la droite horizontale coupe la courbe en un seul point, alors l'image $f(x)$ a un unique antécédent.

Exemple :

Soit la courbe suivante :



⊛ Pour lire l'image de 1 :

- On trace la droite verticale (en verte) passant par 1 sur l'axe des abscisses jusqu'à $\mathscr{C}_f$ formant un point d'intersection.
- On trace ensuite la droite horizontale passant par ce point d'intersection jusqu'à l'axe des ordonnées.
- On lit l'ordonnée de ce point d'intersection avec l'axe des ordonnées. Cette ordonnée est l'image $y = f(1) = -2$.

⊛ Pour lire les antécédents de 1 :

- On trace la droite horizontale (en rouge) passant par 1 sur l'axe des ordonnées jusqu'à $\mathscr{C}_f$ formant trois points d'intersection.
- On trace ensuite les droites verticales passant par ces points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses.
- On lit les abscisses de ces points d'intersection avec l'axe des abscisses. Ces abscisses sont les antécédents de $y = 1$, qui sont -2, -1 et 2.

Propriété 3.6 : (*Appartenance d'un point à une courbe représentative*)

Soient A un point du plan de coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$, f une fonction et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

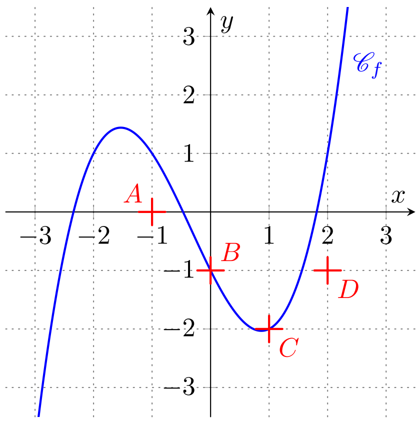
On a :

$$A(x_A\ ;\ y_A) \in \mathscr{C}_f \iff y_A = f(x_A)$$

Autrement dit, un point A appartient à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f si et seulement si l'ordonnée de A est l'image par f de l'abscisse de A.

Exemple :

Soit la courbe suivante :



⊛ Pour le point $A(-1\ ;\ 0)$:

- L'abscisse de A est $x_A = -1$ et l'ordonnée de A est $y_A = 0$.
- On lit graphiquement l'image de -1 par f à l'aide de la courbe : $f(-1) = 1$.
- On compare les résultats : comme $y_A \neq f(x_A)$, alors $A \notin \mathscr{C}_f$.

⊛ Pour le point $B(0\ ;\ -1)$:

- L'abscisse de B est $x_B = 0$ et l'ordonnée de B est $y_B = -1$.
- On lit graphiquement l'image de 0 par f à l'aide de la courbe : $f(0) = -1$.
- On compare les résultats : comme $y_B = f(x_B)$, alors $B \in \mathscr{C}_f$.

⊛ On cherche à savoir si -1 est l'image de 1 par f :

- On place le point $C(1\ ;\ -1)$ sur le graphique.
- On remarque que $C \in \mathscr{C}_f$.
- Donc -1 est bien l'image de 1 par f.

⊛ On cherche à savoir si -1 est l'image de 2 par f :

- On place le point $D(2\ ;\ -1)$ sur le graphique.
- On remarque que $D \notin \mathscr{C}_f$.
- Donc -1 n'est pas l'image de 2 par f.

Définition 3.7 : (*Equation*)

On appelle ***équation*** une égalité avec une ou plusieurs inconnues généralement notées par des lettres.

Exemple :

⊛ $2x + 3 = 7$ est une équation à une inconnue x.

⊛ $x^2 - 5x + 6 = 0$ est une équation à une inconnue x.

⊛ $2x + 3y = 7$ est une équation à deux inconnues x et y.

⊛ $x^2 + y^2 = 1$ est une équation à deux inconnues x et y.

⊛ $2 + 3 = 5$ est une égalité, mais ce n'est pas une équation car il n'y a pas d'inconnue.

⊛ $7 - 4 = 3$ est une égalité sans inconnue, donc ce n'est pas une équation.

⊛ $2x + 1$ est une expression algébrique sans égalité, donc ce n'est pas une équation.

⊛ $x^2 - 5$ est une expression sans égalité, donc ce n'est pas une équation.

Définition 3.8 : (*Solution d'une équation*)

Soit une équation à une ou plusieurs inconnues.

On appelle ***solution de l'équation*** toute valeur qui, en remplaçant les inconnues dans l'équation, transforme l'égalité en une égalité vraie.

On appelle ***ensemble des solutions de l'équation*** l'ensemble de **toutes** les solutions de l'équation. Cet ensemble est généralement noté $\mathscr{S}$.

Exemple :

⊛ Pour l'équation $2x + 3 = 7$:

- En remplaçant x par 2, on obtient $2 \times 2 + 3 = 7$ qui est une égalité vraie. Donc 2 est une solution de l'équation.
- En remplaçant x par 3 (dans l'équation ci-dessus), on obtient $2 \times 3 + 3 = 7$ qui est une égalité fausse. Donc 3 n'est pas une solution de l'équation.
- L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{2\}$.

⊛ Pour l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$:

- En remplaçant x par 2, on obtient $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0$ qui est une égalité vraie. Donc 2 est une solution de l'équation.
- En remplaçant x par 3, on obtient $3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0$ qui est une égalité vraie. Donc 3 est une solution de l'équation.

- En remplaçant x par 4, on obtient $4^2 - 5 \times 4 + 6 = 0$ qui est une égalité fausse. Donc 4 n'est pas une solution de l'équation.
- L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{2\ ;\ 3\}$.

Définition 3.9 : (*Résoudre une équation*)

Résoudre une équation, c'est déterminer son ensemble de solutions.

Propriété 3.10 : (*Résolution graphique d'une équation*)

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

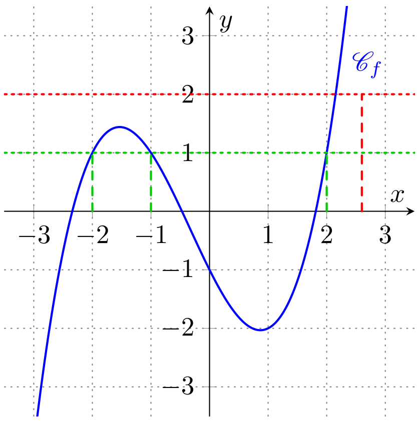
1. Soit y_0 un réel.

   Pour résoudre l'équation $f(x) = y_0$ *(rappel : ici l'inconnu est x)*, on peut procéder graphiquement de la même façon que pour lire les antécédents de l'image y_0 (voir la propriété 3.5 page 20).
2. Soient g une autre fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le même repère orthonormé.

   Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, revient à trouver les antécédents de $f(x)$ et de $g(x)$ qui ont la même image, c'est-à-dire les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple :

Soit $\mathscr{C}_f$ telle que représentée ci-dessous :

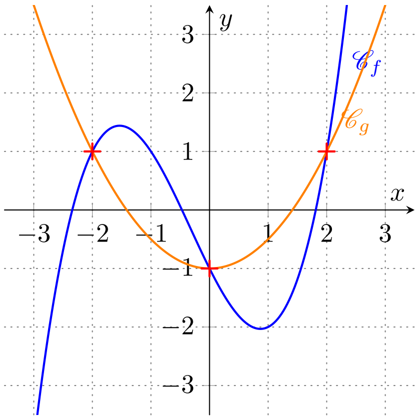


(∗) Pour résoudre l'équation $f(x) = 2$:

- On trace la droite horizontale (en rouge) passant par 2 sur l'axe des ordonnées jusqu'à $\mathscr{C}_f$ formant un seul point d'intersection.
- On trace ensuite la droite verticale (en rouge) passant par ce point d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses.
- On lit l'abscisse de ce point d'intersection avec l'axe des abscisses. Par lecture graphique, la solution est environ $x \approx 2{,}6$ à 0,1 près.
- L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathscr{S} \approx \{2{,}6\}$.

(∗) Pour résoudre l'équation $f(x) = 1$:

- On trace la droite horizontale (en vert) passant par 1 sur l'axe des ordonnées jusqu'à $\mathscr{C}_f$ formant trois points d'intersection.
- On trace ensuite les droites verticales (en vert) passant par ces points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses.
- On lit les abscisses de ces points d'intersection avec l'axe des abscisses. Ces abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 1$, c'est-à-dire $x = -2$, $x = -1$ ou $x = 2$.
- L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathscr{S} = \{-2\ ;\ -1\ ;\ 2\}$.



$\circledast$ Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$:

- On trace les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur le même graphique.
- Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Par lecture graphique, les solutions sont $x = -2$, $x = 0$ et $x = 2$. Donc $\mathscr{S} = \{-2\ ;\ 0\ ;\ 2\}$.

Définition 3.11 : (*Inéquation*)

On appelle ***inéquation*** une inégalité avec une ou plusieurs inconnues généralement notées par des lettres.

Exemple :

$\circledast$ $2x + 3 < 7$ est une inéquation à une inconnue x.

$\circledast$ $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$ est une inéquation à une inconnue x.

$\circledast$ $2x + 3y \leqslant 7$ est une inéquation à deux inconnues x et y.

$\circledast$ $x^2 + y^2 > 1$ est une inéquation à deux inconnues x et y.

$\circledast$ $2 + 3 = 5$ est une égalité sans une inconnue, donc ce n'est pas une inéquation.

$\circledast$ $7x - 4 = 3$ est une égalité avec une inconnue, donc ce n'est pas une inéquation.

$\circledast$ $x^2 - 5$ est une expression sans inégalité, donc ce n'est pas une inéquation.

Définition 3.12 : (*Solution d'une inéquation*)

Soit une inéquation à une ou plusieurs inconnues.

On appelle ***solution de l'inéquation*** toute valeur qui, en remplaçant les inconnues dans l'inéquation, transforme l'inégalité en une inégalité vraie.

On appelle ***ensemble des solutions de l'inéquation*** l'ensemble de **toutes** les solutions de l'inéquation. Cet ensemble est généralement noté $\mathscr{S}$.

Définition 3.13 : (*Résoudre une inéquation*)

Résoudre une inéquation, c'est déterminer son ensemble de solutions.

Propriété 3.14 : (*Résolution graphique d'une inéquation*)

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

   Résoudre l'inéquation $f(x) < y_0$ (ou $f(x) \leqslant y_0$, ou $f(x) > y_0$, ou $f(x) \geqslant y_0$), revient à trouver les antécédents de $f(x)$ dont l'image est inférieure (ou inférieure ou égale, ou supérieure, ou supérieure ou égale) à y_0.

   On peut procéder graphiquement de la même façon que pour lire les antécédents de l'image y_0 (voir la propriété 3.5 page 20), puis en repérant les parties de la courbe qui sont en-dessous (ou au-dessus) de la droite horizontale d'équation $y = y_0$ on associe les antécédants à ces parties qui sont les solutions de l'inéquation.

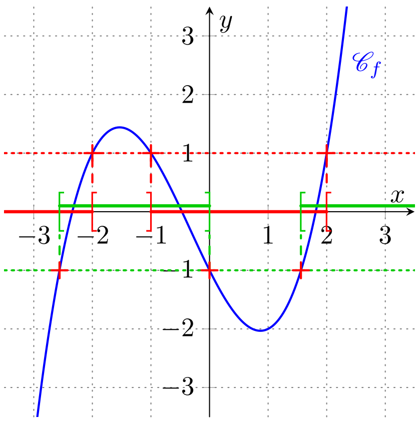
2. Soient g une autre fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le même repère orthonormé.

   Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) \leqslant g(x)$, ou $f(x) > g(x)$, ou $f(x) \geqslant g(x)$), revient à trouver les antécédents de $f(x)$ et de $g(x)$ dont l'image par f est inférieure (ou inférieure ou égale, ou supérieure, ou supérieure ou égale) à l'image par g.

On peut procéder graphiquement de la même façon que pour lire les antécédents de l'image commune aux deux fonctions (voir la propriété 3.10 page 23), puis en repérant les parties de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont en-dessous (ou au-dessus) de la courbe $\mathscr{C}_g$ on associe les antécédants à ces parties qui sont les solutions de l'inéquation.

Exemple :

Soit $\mathscr{C}_f$ telle que représentée ci-dessous :



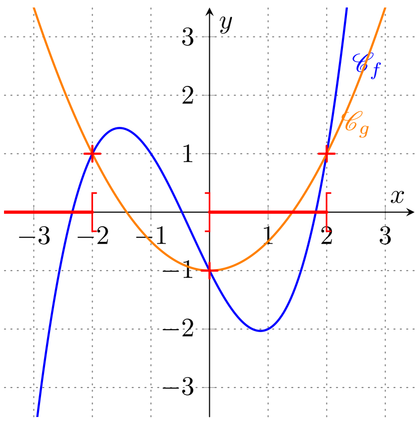
⊛ Pour résoudre l'inéquation $f(x) < 1$:

- On trace la droite horizontale (en rouge) passant par 1 sur l'axe des ordonnées jusqu'à $\mathscr{C}_f$ formant trois points d'intersection.
- On trace ensuite les droites verticales (en rouge) passant par les points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses.
- On repère les parties de la courbe qui sont en-dessous de cette droite.
- On lit les abscisses des points des parties de la courbe correspondantes. Ces abscisses sont les solutions de l'inéquation $f(x) < 1$, c'est-à-dire $x < -2$, ou $-1 < x < 2$.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$\mathscr{S} =]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-1\,;2[\ .$$

⊛ Pour résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant -1$:

- On trace la droite horizontale (en vert) passant par -1 sur l'axe des ordonnées jusqu'à $\mathscr{C}_f$ formant trois points d'intersection.
- On trace ensuite les droites verticales (en vert) passant par les points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses.
- On repère les parties de la courbe qui sont au-dessus de cette droite.
- On lit les abscisses des points des parties de la courbe correspondantes. Ces abscisses sont les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant -1$, c'est-à-dire $-2,6 \leqslant x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1,6$.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathscr{S} = [-2,6\ ;\ 0]\ \cup\ [2\ ;\ +\infty[\ = \mathbb{R}\backslash]1,6\ ;\ +\infty[$.



⊛ Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ telles que représentées ci-contre.

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$:

- On repère les points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Par lecture graphique, les abscisses de ces points d'intersection sont $x = -2$, $x = 0$ et $x = 2$.
- On repère les parties de $\mathscr{C}_f$ qui sont stritctement en-dessous de $\mathscr{C}_g$.
- On lit les abscisses des points de ces parties de la courbe. Ces abscisses sont les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$, c'est-à-dire $x < -2$ ou $0 < x < 2$.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$\mathscr{S} =]-\infty\,;-2[\,\cup\,]0\,;2[\ .$$

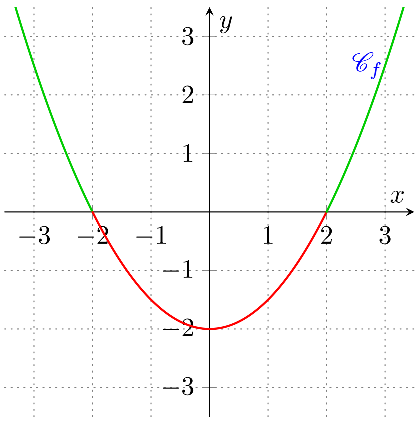
Définition 3.15 : (*Tableau de signes*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On appelle ***tableau de signes*** de f un tableau qui permet de visualiser le signe de $f(x)$ sur I.

Exemple :

Soit $\mathscr{C}_f$ telle que représentée ci-dessous :



On cherche à dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

- On repère les points où la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses. Par lecture graphique, ces points ont pour abscisses $x = -2$ et $x = 2$.
- On repère les parties de la courbe où f est positive qui sont au-dessus (en vert) de l'axe des abscisses, et où f est négative qui est en-dessous (en rouge) de l'axe des abscisses.
- On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut ainsi lire que $f(x) > 0$ pour $x < -2$ ou $x > 2$, que $f(x) < 0$ pour $-2 < x < 2$, et que $f(x) = 0$ pour $x = -2$ ou $x = 2$.

Autrement dit :

- l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $\mathscr{S} =]-\infty\,; -2[\cup]2\,; +\infty[$,
- $f(x) < 0 \iff \mathscr{S} =]-2\,; 2[$,
- $f(x) = 0 \iff \mathscr{S} = \{-2\,;\ 2\}$.

Définition 3.16 : (*Variation d'une fonction*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On appelle ***variation de f*** la façon dont $f(x)$ évolue lorsque x parcourt I dans le sens croissant.

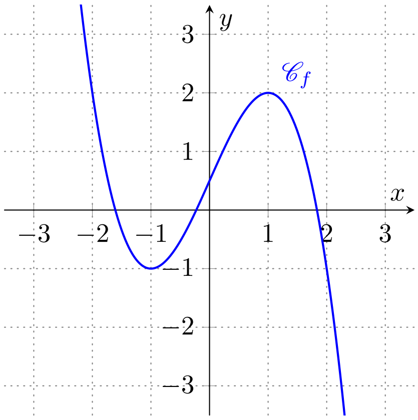
- Si $f(x)$ augmente lorsque x augmente, on dit que ***f est croissante***.

  Autrement dit, pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- Si $f(x)$ diminue lorsque x augmente, on dit que ***f est décroissante***.

  Autrement dit, pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
- Si $f(x)$ ne change pas lorsque x augmente, on dit que ***f est constante***.

  Autrement dit, pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) = f(b)$.
- On dit que ***f est strictement croissante*** (respectivement ***f est strictement décroissante***) si les inégalités précédentes sont strictes.

Exemple :



Soit $\mathscr{C}_f$ telle que représentée ci-contre.

On remarque que f est :

- décroissante pour $x \in]-\infty\ ;\ -1]$,
- croissante pour $x \in [-1\ ;\ 1]$,
- décroissante pour $x \in [1\ ;\ +\infty[$.

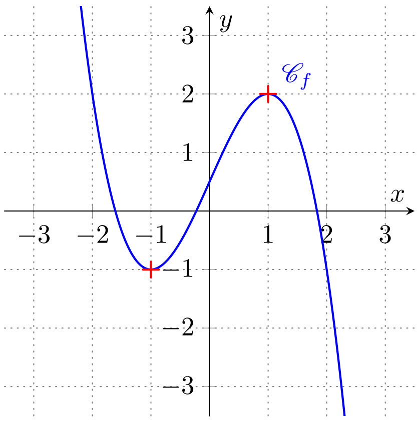
Définition 3.17 : (*Extremum local*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On appelle ***extremum local*** tout point de la courbe représentative de f où il y a un changement de variation de f.

- Si f passe de croissante à décroissante, on dit que f admet un ***maximum local*** en ce point.
- Si f passe de décroissante à croissante, on dit que f admet un ***minimum local*** en ce point.

Exemple :



Soit $\mathscr{C}_f$ telle que représentée ci-contre.

On remarque que :

- $(-1\ ;\ -1)$ est un extremum local, en particulier un minimum local car f passe de décroissante à croissante en ce point,
- $(1\ ;\ 2)$ est un extremum local, en particulier un maximum local car f passe de croissante à décroissante en ce point.

Définition 3.18 : (*Tableau de variations*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On appelle ***tableau de variations*** de f un tableau qui permet de visualiser les variations de f sur I.

Exemple :

En utilisant la fonction f de l'exemple précédent, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

On peut ainsi lire que f est :

- décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$,
- croissante sur $[-1\ ;\ 1]$,
- décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$,
- avec un minimum local égal à -1 en $x = -1$
- et un maximum local égal à 2 en $x = 1$.

Chapitre 4

Proportions et pourcentages

Définition 4.1 : (*Population*)

On appelle ***population*** un ensemble d'individus ou d'objets. Comme pour les ensembles (voir la définition 1.1 page 3), une population est souvent notée par une lettre majuscule (par exemple E, F, P, etc.) et ses éléments sont les individus ou les objets de la population.

Exemple :

- L'ensemble des élèves d'une classe est une population. On peut noter cette population E si on le souhaite.
- L'ensemble des habitants d'une ville est une population. On peut noter H_1 les habitants de la ville $n^o 1$, H_2 les habitants de la ville $n^o 2$, etc.
- L'ensemble des voitures d'un parking est une population.
- L'ensemble des livres d'une bibliothèque est une population.

Définition 4.2 : (*Sous-population*)

Soit E une population.

On appelle ***sous-population de*** E une population $\boldsymbol{F}$ qui est un sous-ensemble de E, c'est-à-dire que tous les éléments de $\boldsymbol{F}$ sont aussi des éléments de E. On a donc $\boldsymbol{F} \subset E$.

Exemple :

- Dans une classe E de 30 élèves, l'ensemble F des filles de la classe est une sous-population de E.
- Dans une ville H de 100 000 habitants, l'ensemble A des habitants âgés de plus de 65 ans est une sous-population de H.
- Dans un parking P de 200 voitures, l'ensemble D des voitures diesel est une sous-population de P.
- Dans une bibliothèque B de 10 000 livres, l'ensemble R des romans est une sous-population de B.

Définition 4.3 : (*Effectif d'une population*)

Soit E une population.

On appelle ***effectif d'une population*** le nombre d'éléments de cette population. L'effectif de E est généralement noté n_E.

Exemple :

En utilisant les populations de l'exemple précédent :

- Dans une classe E de 30 élèves, l'effectif de la population E est $n_E = 30$. Si la sous-population F des filles de la classe contient 18 filles, alors l'effectif de la sous-population F est $n_F = 18$.
- Dans une ville H de 100 000 habitants, l'effectif de la population H est $n_H = 100\ 000$. Si la sous-population A des habitants âgés de plus de 65 ans contient 20 000 habitants, alors l'effectif de la sous-population A est $n_A = 20\ 000$.
- Dans un parking P de 200 voitures, l'effectif de la population P est $n_P = 200$. Si la sous-population D des voitures diesel contient 80 voitures, alors l'effectif de la sous-population D est $n_D = 80$.

- ⊛ Dans une bibliothèque B de 10 000 livres, l'effectif de la population B est $n_B = 10\ 000$. Si la sous-population R des romans contient 6 000 livres, alors l'effectif de la sous-population R est $n_R = 6\ 000$.

Définition 4.4 : (*Proportion*)

Soient deux populations E et F telles que $F \subset E$.

On appelle ***proportion*** de F dans E le nombre p, généralement exprimé en pourcentage, qui indique la part de F par rapport à E. La proportion p de F dans E est donnée par la formule :

$$p = \frac{n_F}{n_E}$$

où n_F est l'effectif de la population F et n_E est l'effectif de la population E.

Exemple :

En utilisant les populations de l'exemple précédent :

- ⊛ Dans une classe E de 30 élèves, l'effectif de la population E est $n_E = 30$. Si la sous-population F des filles de la classe contient 18 filles, alors l'effectif de la sous-population F est $n_F = 18$. La proportion de filles dans la classe est donc :
$$p = \frac{n_F}{n_E} = \frac{18}{30} = 0,6 = 60\%.$$
- ⊛ Dans une ville H de 100 000 habitants, l'effectif de la population H est $n_H = 100\ 000$. Si la sous-population A des habitants âgés de plus de 65 ans contient 20 000 habitants, alors l'effectif de la sous-population A est $n_A = 20\ 000$. La proportion d'habitants âgés de plus de 65 ans dans la ville est donc :
$$p = \frac{n_A}{n_H} = \frac{20\ 000}{100\ 000} = 0,2 = 20\%.$$
- ⊛ Dans un parking P de 200 voitures, l'effectif de la population P est $n_P = 200$. Si la sous-population D des voitures diesel contient 80 voitures, alors l'effectif de la sous-population D est $n_D = 80$. La proportion de voitures diesel dans le parking est donc :
$$p = \frac{n_D}{n_P} = \frac{80}{200} = 0,4 = 40\%.$$
- ⊛ Dans une bibliothèque B de 10 000 livres, l'effectif de la population B est $n_B = 10\ 000$. Si la sous-population R des romans contient 6 000 livres, alors l'effectif de la sous-population R est $n_R = 6\ 000$. La proportion de romans dans la bibliothèque est donc :
$$p = \frac{n_R}{n_B} = \frac{6\ 000}{10\ 000} = 0,6 = 60\%.$$

Propriété 4.5 : (*Proportion entre* 0 *et* 1)

Soient E une population, F une sous-population de E et p la proportion de F dans E. On a toujours :

$$0 \leqslant p \leqslant 1$$

Preuve :

Soient E une population, F une sous-population de E et p la proportion de F dans E. Par définition 4.4 de la proportion, on a :

$$p = \frac{n_F}{n_E}$$

où n_F est l'effectif de la population F et n_E est l'effectif de la population E.

Comme $F \subset E$, on a forcément $n_F \leqslant n_E$. De plus, les effectifs sont des nombres entiers naturels, donc $n_F \geqslant 0$ et

$n_E > 0$. On en déduit que :

$$0 \leqslant n_F \leqslant n_E$$

En divisant cette inégalité par le nombre strictement positif n_E, on obtient :

$$\frac{0}{n_E} \leqslant \frac{n_F}{n_E} \leqslant \frac{n_E}{n_E}$$

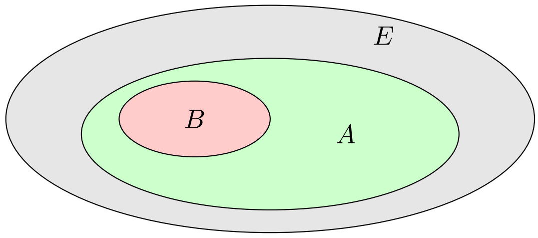
c'est-à-dire :

$$0 \leqslant p \leqslant 1$$

Propriété 4.6 : (*Pourcentage de pourcentage*)

Soient E, A et B trois populations telles que $B \subset A \subset E$ et p_1 la proportion de A dans E et p_2 la proportion de B dans A. La proportion p de B dans E est donnée par la formule :

$$p = p_1 \times p_2$$



Preuve :

Soient E, A et B trois populations telles que $B \subset A \subset E$, p_1 la proportion de A dans E et p_2 la proportion de B dans A. Par définition de la proportion, on a :

$$p_1 = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{n_B}{n_A}$$

où n_A, n_B et n_E sont respectivement les effectifs des populations A, B et E.

En multipliant ces deux égalités, on obtient :

$$p_1 \times p_2 = \frac{n_A}{n_E} \times \frac{n_B}{n_A} = \frac{n_B}{n_E}$$

Or, par définition de la proportion, on a aussi :

$$p = \frac{n_B}{n_E}$$

où p est la proportion de B dans E. On en déduit que :

$$p = p_1 \times p_2$$

Exemple :

Dans une ville H de 100 000 habitants, l'effectif de la population H est $n_H = 100\ 000$. Si la sous-population A des habitants âgés de plus de 65 ans contient 20 000 habitants, alors l'effectif de la sous-population A est $n_A = 20\ 000$. La proportion d'habitants âgés de plus de 65 ans dans la ville est donc :

$$p_1 = \frac{n_A}{n_H} = \frac{20\ 000}{100\ 000} = 0,2 = 20\%.$$

Parmi ces 20 000 habitants, la sous-population B des habitants âgés de plus de 75 ans contient 5 000 habitants, donc l'effectif de la sous-population B est $n_B = 5\ 000$. La proportion d'habitants âgés de plus de 75 ans parmi les habitants âgés de plus de 65 ans est donc :

$$p_2 = \frac{n_B}{n_A} = \frac{5\ 000}{20\ 000} = 0,25 = 25\%.$$

La proportion p d'habitants âgés de plus de 75 ans dans la ville est donc :

$$p = p_1 \times p_2 = 0,2 \times 0,25 = 0,05 = 5\%.$$

On peut aussi vérifier ce résultat en calculant directement la proportion de B dans H :

$$p = \frac{n_B}{n_H} = \frac{5\ 000}{100\ 000} = 0,05 = 5\%.$$

Chapitre 5

Multiples et diviseurs

Définition 5.1 : (*Multiple, divise, diviseur, divisibilité*)

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

On dit que a ***est un multiple de*** b si et seulement s'il existe un nombre entier relatif k tel que :

$$a = b \times k$$

Dans ce cas, on dit aussi que b ***est un diviseur de*** a ou que b ***divise*** a. On dit aussi que a ***est divisible par*** b.

Exemple :

- 15 est un multiple de 3 car $15 = 3 \times 5$. On dit aussi que 3 est un diviseur de 15 ou que 3 divise 15. On dit aussi que 15 est divisible par 3.
- -24 est un multiple de 4 car $-24 = 4 \times (-6)$. On dit aussi que 4 est un diviseur de -24 ou que 4 divise -24. On dit aussi que -24 est divisible par 4.
- 0 est un multiple de tous les entiers relatifs non nuls car pour tout entier relatif non nul b, on a $0 = b \times 0$. On dit aussi que tout entier relatif non nul est un diviseur de 0 ou que tout entier relatif non nul divise 0. On dit aussi que 0 est divisible par tous les entiers relatifs non nuls.
- Aucun entier relatif non nul n'est un multiple de 0, car il n'existe pas d'entier relatif k tel que $a = 0 \times k$ pour un entier relatif non nul a.

Propriété 5.2 : (*Somme de multiples*)

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}^*$.

Si a et b sont des multiples de c, alors $a + b$ est un multiple de c.

Exemple :

Soient $a = 15$, $b = -24$ et $c = 3$.

Comme $15 = 3 \times 5$, on a 15 est un multiple de 3.

Comme $-24 = 3 \times (-8)$, on a -24 est un multiple de 3.

Donc, $15 + (-24) = -9$ est un multiple de 3 car $-9 = 3 \times (-3)$.

Corolaire 5.3 : (*Somme de multiple de 3*)

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

Si a et b sont des multiples de 3, alors $a + b$ est un multiple de 3.

Preuve :

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et supposons que a et b sont des multiples de 3.

Par définition 5.1 des multiples, il existe des entiers relatifs k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{cases} a = 3 \times k_1 \\ b = 3 \times k_2 \end{cases}$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$a + b = 3 \times k_1 + 3 \times k_2 = 3 \times (k_1 + k_2)$$

Or, $k_1 + k_2$ est un entier relatif car la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif. Donc, par définition 5.1 des multiples, $a + b$ est un multiple de 3.

Propriété 5.4 : (*Critères de divisibilité*)

Soient $a \in \mathbb{Z}$.

- a est un multiple de 2 si et seulement si le chiffre des unités de a est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- a est un multiple de 3 $\iff$ la somme des chiffres de a est un multiple de 3.
- a est un multiple de 4 $\iff$ le nombre formé par les deux derniers chiffres de a est un multiple de 4 *(généralement pas utile à connaître).*
- a est un multiple de 5 $\iff$ le chiffre des unités de a est 0 ou 5.
- a est un multiple de 6 $\iff$ a est un multiple de 2 et de 3 *(généralement pas utile à connaître).*
- a est un multiple de 7 $\iff$ le double du chiffre des unités de a soustrait du nombre formé par les autres chiffres de a est un multiple de 7.
- a est un multiple de 8 $\iff$ le nombre formé par les trois derniers chiffres de a est un multiple de 8 *(généralement pas utile à connaître).*
- a est un multiple de 9 $\iff$ la somme des chiffres de a est un multiple de 9.
- a est un multiple de 10 $\iff$ le chiffre des unités de a est 0.

Exemple :

⊛ $a = 2\ 346$ est un multiple de 2 car le chiffre des unités est 6.

⊛ $b = 2\ 346$ est un multiple de 3 car la somme des chiffres est $2 + 3 + 4 + 6 = 15$ et 15 est un multiple de 3.

⊛ $c = 2\ 344$ est un multiple de 4 car le nombre formé par les deux derniers chiffres est 44 et 44 est un multiple de 4.

⊛ $d = 2\ 345$ est un multiple de 5 car le chiffre des unités est 5.

⊛ $e = 2\ 346$ est un multiple de 6 car c'est un multiple de 2 et de 3.

⊛ $f = 2\ 352$ est un multiple de 7 car le double du chiffre des unités soustrait du nombre formé par les autres chiffres est $235 - 2 \times 2 = 231$ et 231 est un multiple de 7.

⊛ $g = 2\ 348$ est un multiple de 8 car le nombre formé par les trois derniers chiffres est 348 et 348 est un multiple de 8.

⊛ $h = 2\ 343$ est un multiple de 9 car la somme des chiffres est $2 + 3 + 4 + 3 = 12$ et 12 est un multiple de 9.

⊛ $i = 2\ 340$ est un multiple de 10 car le chiffre des unités est 0.

Définition 5.5 : (*Nombre pair, impair*)

On appelle ***nombre pair*** un entier relatif qui est un multiple de 2.

Autrement dit : soit $a \in \mathbb{Z}$,

$$a \text{ est un nombre pair} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = 2 \times k.$$

On appelle ***nombre impair*** un entier relatif qui n'est pas un multiple de 2.

Autrement dit : soit $a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} a \text{ est un nombre impair} &\iff \nexists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = 2 \times k \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = 2 \times k + 1 \end{aligned}$$

Exemple :

- 4 est un nombre pair car $4 = 2 \times 2$.
- -12 est un nombre pair car $-12 = 2 \times (-6)$.
- 0 est un nombre pair car $0 = 2 \times 0$.
- 5 est un nombre impair car $5 = 2 \times 2 + 1$.
- -7 est un nombre impair car $-7 = 2 \times (-4) + 1$.
- 1 est un nombre impair car $1 = 2 \times 0 + 1$.

Propriété 5.6 : (*Carré d'un nombre pair, impair*)

Le carré d'un nombre pair est un nombre pair.

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Preuve :

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- Supposons que a est un nombre pair. Par définition 5.5 des nombres pairs :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, a = 2 \times k$$

En élevant cette égalité au carré, on obtient :

$$a^2 = (2 \times k)^2 = 4 \times k^2 = 2 \times (2 \times k^2)$$

Or, $2 \times k^2$ est un entier relatif car le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif. Donc, par définition 5.5 des nombres pairs, a^2 est un nombre pair.

- Supposons maintenant que a est un nombre impair. Par définition 5.5 des nombres impairs :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, a = 2 \times k + 1$$

En élevant cette égalité au carré, on obtient :

$$a^2 = (2 \times k + 1)^2 = 4 \times k^2 + 4 \times k + 1 = 2 \times (2 \times k^2 + 2 \times k) + 1$$

Or, $2 \times k^2 + 2 \times k$ est un entier relatif car la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif. Donc, par définition 5.5 des nombres impairs, a^2 est un nombre impair.

Exemple :

- Le carré de 4 est 16 et 16 est un nombre pair.
- Le carré de -12 est 144 et 144 est un nombre pair.
- Le carré de 0 est 0 et 0 est un nombre pair.
- Le carré de 5 est 25 et 25 est un nombre impair.
- Le carré de -7 est 49 et 49 est un nombre impair.
- Le carré de 1 est 1 et 1 est un nombre impair.

Chapitre 6

Vecteurs du plan

Définition 6.1 : (*Vecteur*)

Soient A et B deux points distincts du plan.

On appelle ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ la translation qui transforme le point A en B.

Le point A est appelé ***origine*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point B est appelé ***extrémité*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ est donc défini par :

1. sa ***direction*** : la droite (AB),
2. son ***sens*** : de A vers B,
3. sa ***norme*** : la distance AB.

Ainsi le ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ peut être représenté sur le plan par une flèche allant de A vers B.

Exemple :

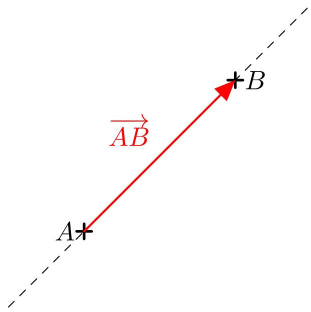
Soient A et B deux points distincts du plan tels ci-contre.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la translation qui transforme le point A en B.

Le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

1. sa direction : la droite (AB) représenté en pointillé,
2. son sens : de A vers B représenté par la pointe de la flèche en rouge,
3. sa norme : la distance AB représenté par le segment en rouge.



Définition 6.2 : (*Vecteurs égaux*)

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont ***égaux*** si et seulement s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

On note alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être représenté sur le plan par toute flèche ayant la même direction, le même sens et la même norme que $\overrightarrow{AB}$.

Exemple :

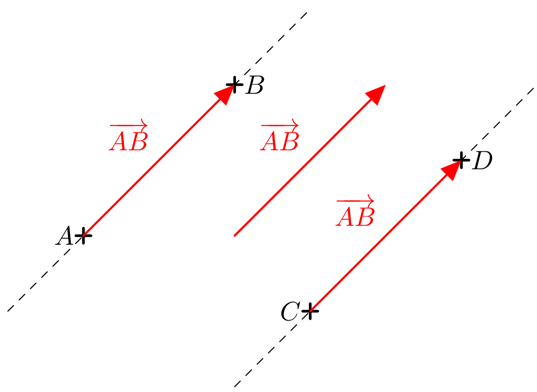
Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ comme ci-contre.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux car ils ont la même direction (la droite (AB) est parallèle à la droite (CD)), le même sens (de A vers B et de C vers D) et la même norme ($AB = CD$).

On note donc :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être représenté sur le plan par toute flèche ayant la même direction, le même sens et la même norme que $\overrightarrow{AB}$.



Définition 6.3 : (*Vecteur nul*)

Soit A un point du plan.

On appelle ***vecteur nul***, noté $\overrightarrow{0}$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$.

Propriété 6.4 : (*Parallélogramme et vecteurs égaux*)

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

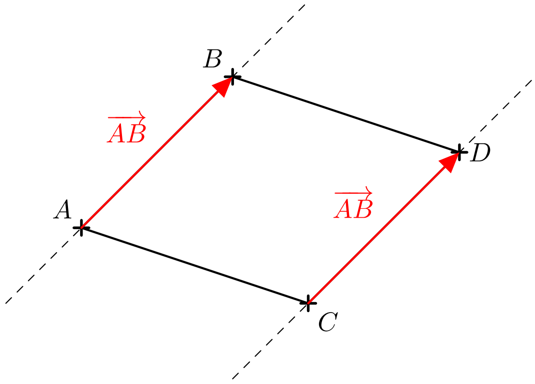
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff AB\boldsymbol{D}C \text{ est un parallélogramme (éventuellement aplati).}$$

Exemple :

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ comme ci-contre.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux car ils ont la même direction (la droite (AB) est parallèle à la droite (CD)), le même sens (de A vers B et de C vers D) et la même norme ($AB = CD$).

Donc, le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.



Définition 6.5 : (*Représentant d'un vecteur*)

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur, A et B deux points du plan.

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un ***représentant*** du vecteur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$$

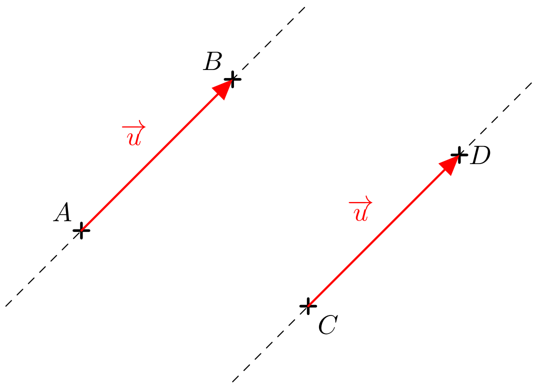
Ainsi, on notera généralement un vecteur par une lettre minuscule (exemple : $\overrightarrow{u}$) plutot que par un de ses réprésentants (exemple : $\overrightarrow{AB}$).

Exemple :

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ comme ci-contre.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ car $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est aussi un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ car $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CD}$.



Définition 6.6 : (*Vecteur opposé*)

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur, A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle ***vecteur opposé de*** $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

On note alors :

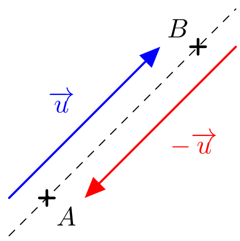
$$-\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Exemple :

Soient A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ comme ci-contre.

Le vecteur opposé de $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $-\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Ainsi, si $\overrightarrow{u}$ a pour origine le point A et pour extrémité le point B, alors $-\overrightarrow{u}$ a pour origine le point B et pour extrémité le point A.



Définition 6.7 : (*Somme de vecteurs*)

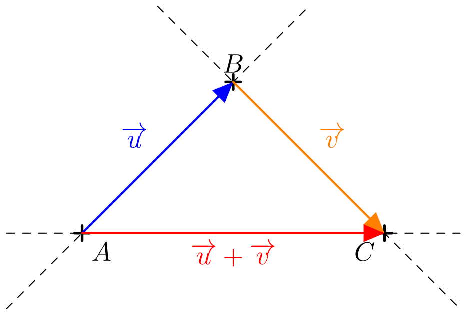
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$.

On appelle ***somme des vecteurs*** $\overrightarrow{u}$ ***et*** $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Exemple :

Soient A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ comme ci-contre.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ qui est le résultat de la translation qui transforme le point A en B puis le point B en C.



Propriété 6.8 : (*Soustraction de vecteurs*)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

Soustraire par un vecteur revient à additionner par son vecteur opposé.

Ainsi on a :

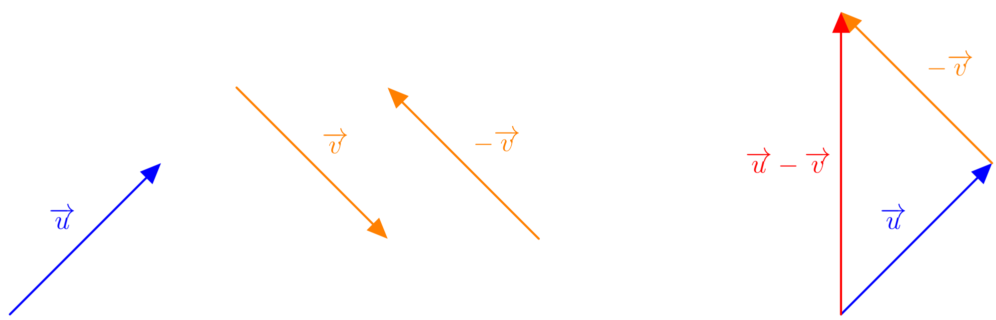
$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$$

Exemple :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs comme ci-desous.

Pour trouver le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, on commence par tracer le vecteur opposé de $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire $-\overrightarrow{v}$. Ensuite, on additionne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{v}$.

On obtient ainsi le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.



Propriété 6.9 : (*Règles de calculs sur les vecteurs*)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.

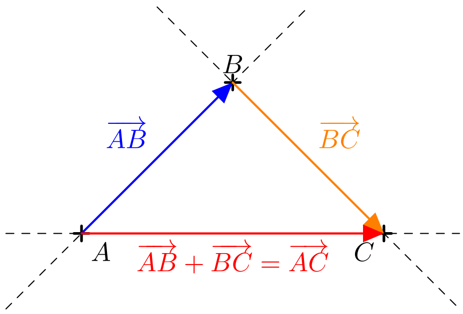
- La somme de vecteurs est ***commutative*** c'est-à-dire : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$
- La somme de vecteurs est ***associative*** c'est-à-dire : $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$
- La somme de vecteurs possède un ***élément neutre*** c'est-à-dire : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$
- Tout vecteur possède un ***élément symétrique*** c'est-à-dire : $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$

Propriété 6.10 : (*Relation de Chasles*)

Soient A, B et C trois points du plan.

On a :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



Exemple :

⊛ En utilisant la relation de Chasles, on peut par exemple simplifier l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

⊛ On peut aussi simplifier des expressions plus complexes comme par exemple :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}\\&=\overrightarrow{AF}\end{aligned}$$

⊛ Ou encore :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$$

Propriété 6.11 : (*Somme de vecteurs de même origine*)

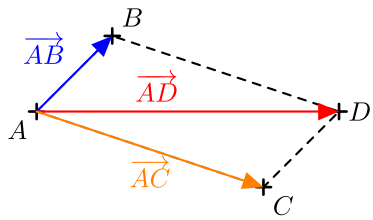
Soient A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs ayant la même origine A.

On a :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\iff AB\boldsymbol{DC}\text{ est un parallélogramme}$$

Exemple :

Soient A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



On en déduit que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme et réciproquement.

Définition 6.12 : (*Produit d'un vecteur par un scalaire*)

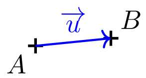
Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur, $k \in \mathbb{R}$ et A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle ***produit du vecteur*** $\overrightarrow{u}$ ***par le scalaire*** k, noté $k \times \overrightarrow{u}$, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que :

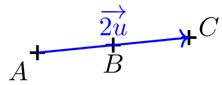
- si $k > 0$, alors C est le point du plan tel que A, B et C sont alignés et $AC = k \times AB$,
- si $k < 0$, alors C est le point du plan tel que A, B et C sont alignés et $AC = |k| \times AB$,
- si $k = 0$, alors C est le point tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$. Autrement dit, $C = A$.

Exemple :

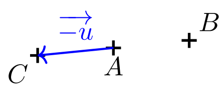
Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur, $k \in \mathbb{R}$ et A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ comme ci-dessous.



⊛ Si $k = 2$, alors le point C est tel que A, B et C sont alignés dans le même sens et $AC = 2 \times AB$. Ainsi, le vecteur $2 \times \overrightarrow{u} = 2 \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.



⊛ Si $k = -1$, alors le point C est tel que A, B et C sont alignés dans des sens opposés et $AC = |-1| \times AB = AB$. Ainsi, le vecteur $-1 \times \overrightarrow{u} = -1 \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.



Chapitre 7

Valeur absolue et distance dans le plan

Définition 7.1 : (*Encadrement décimal, amplitude*)

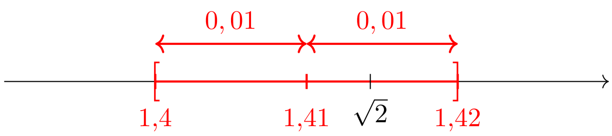
Soient $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$ et $b \in \mathbb{D}$ tels que $a < b$.

On appelle ***encadrement décimal*** de x l'encadrement :

$$a \leqslant x \leqslant b$$

On appelle ***amplitude*** de cet encadrement la valeur $b - a$.

Exemple :



Un encadrement décimal de $\sqrt{2}$ est par exemple :

$$1,40 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$$

L'amplitude de cet encadrement est $1,42 - 1,40 = 0,02$.

Définition 7.2 : (*Valeur absolue*)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On appelle ***valeur absolue de*** x, notée $|x|$, la distance entre x et 0.

Autrement dit, la ***valeur absolue de*** x est la fonction définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple :

- La valeur absolue de 5 est $|5| = 5$ car la distance entre 5 et 0 est égale à 5.
- La valeur absolue de -3 est $|-3| = -(-3) = 3$ car la distance entre -3 et 0 est égale à 3.

Propriété 7.3 : (*Propriétés de la valeur absolue*)

Soient x et y deux réels.

- La valeur absolue est toujours positive ou nulle : $|x| \geqslant 0$
- La valeur absolue de 0 est nulle : $|0| = 0$
- La valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues : $|x \times y| = |x| \times |y|$
- La valeur absolue d'un quotient est le quotient des valeurs absolues : $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ (pour $y \neq 0$)
- Inégalité triangulaire : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

Définition 7.4 : (*Distance entre deux abscisses*)

Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$.

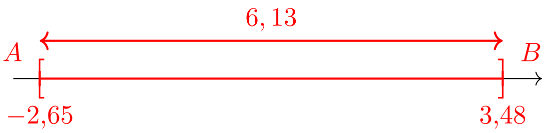
On appelle ***distance entre les abscisses x_1 et x_2***, notée $d(x_1;x_2)$, la valeur absolue de leur différence, c'est-à-dire :

$$d(x_1;x_2) = |x_2 - x_1|$$

Exemple :

Soient A et B d'abscisses $x_A = -2,65$ et $x_B = 3,48$. La distance entre les abscisses de A et B est :

$$AB = d(x_A;x_B) = |x_B - x_A| = |3,48 - (-2,65)| = |3,48 + 2,65| = |6,13| = 6,13$$



Remarque : On aurait aussi pu calculer la distance entre les abscisses de A et B en faisant :

$$AB = BA = d(x_B;x_A) = |x_A - x_B| = |-2,65 - 3,48| = |-6,13| = 6,13$$

Propriété 7.5 : (*Intervalle et valeur absolue*)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- L'ensemble des réels x tels que la distance entre x et a est inférieure à r vérifient :

$$d(x;a) \leqslant r \iff |x-a| \leqslant r \iff a - r \leqslant x \leqslant a + r$$

ce qui correspond à l'intervalle $[a-r;a+r]$.

- L'ensemble des réels x tels que la distance entre x et a est strictement inférieure à r vérifient :

$$d(x;a) < r \iff |x-a| < r \iff a - r < x < a + r$$

ce qui correspond à l'intervalle $]a-r;a+r[$.

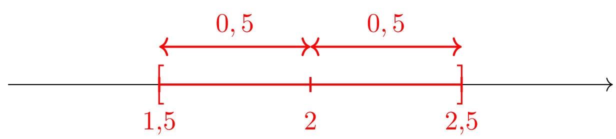
Exemple :

Soient $a = 2$ et $r = 0,5$.

- L'ensemble des réels x tels que la distance entre x et 2 est inférieure à 0,5 est l'intervalle :

$$\begin{aligned} d(x;2) \leqslant 0,5 &\iff |x-2| \leqslant 0,5 \\ &\iff 2 - 0,5 \leqslant x \leqslant 2 + 0,5 \\ &\iff 1,5 \leqslant x \leqslant 2,5 \end{aligned}$$

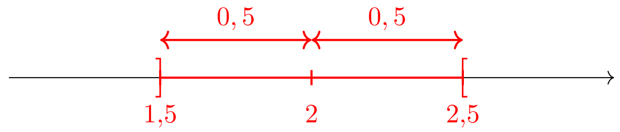
c'est-à-dire l'intervalle $[1,5;2,5]$.



- L'ensemble des réels x tels que la distance entre x et 2 est strictement inférieure à 0,5 est l'intervalle :

$$d(x;2) < 0,5 \iff |x-2| < 0,5 \iff 1,5 < x < 2,5$$

c'est-à-dire l'intervalle $]1,5;2,5[$.



0, 5
0, 5
1,5
2
2,5

Chapitre 8

Fonctions (partie algébrique)

Propriété 8.1 : (*Calcul de l'image*)

Soient f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et $a \in \mathscr{D}_f$.

Pour ***calculer l'image de a*** par la fonction f, on remplace chaque occurrence de x dans l'expression de $f(x)$ par la valeur numérique de a puis on effectue les calculs. Ainsi, on obtient $f(a)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et par $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

- Pour calculer l'image de 2 par la fonction f, on remplace chaque occurrence de x dans l'expression de $f(x)$ par 2 puis on effectue les calculs :

$$f(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 4 = 8 - 6 + 4 = 6$$

Ainsi, l'image de 2 par la fonction f est égale à 6.

- Pour calculer l'image de -1 par la fonction f, on remplace chaque occurrence de x dans l'expression de $f(x)$ par -1 puis on effectue les calculs :

$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 4 = 2 + 3 + 4 = 9$$

Ainsi, l'image de -1 par la fonction f est égale à 9.

Propriété 8.2 : (*Calculs des antécédants*)

Soient f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et $b \in \mathbb{R}$.

Pour ***calculer les antécédants de b*** par la fonction f, on résout l'équation $f(x) = b$ dans l'ensemble $\mathscr{D}_f$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et par $f(x) = 3x + 4$.

- Pour calculer les antécédants de 10 par la fonction f, on résout l'équation $f(x) = 10$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = 10 &\iff 3x + 4 = 10 \\ &\iff 3x + 4 - 4 = 10 - 4 \\ &\iff 3x = 6 \\ &\iff \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, le seul antécédant de 10 par la fonction f est 2.

On conclue en donnant l'esemble des solutions : $\mathscr{S} = \{2\}$.

- Pour calculer les antécédants de 1 par la fonction f, on résout l'équation $f(x) = 1$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff 3x + 4 = 1 \\ &\iff 3x + 4 - 4 = 1 - 4 \\ &\iff 3x = -3 \\ &\iff \frac{3x}{3} = \frac{-3}{3} \end{aligned}$$

$$\iff x = -1$$

Ainsi, le seul antécédant de 1 par la fonction f est -1.

On conclue en donnant l'esemble des solutions : $\mathscr{S} = \{-1\}$.

Définition 8.3 : (*Valeur interdite*)

Soient f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

On appelle ***valeur interdite*** de la fonction f toute valeur que la fonction f ne peut pas transformer.

Ainsi, si a est une ***valeur interdite*** de la fonction f, alors $a \notin \mathscr{D}_f$.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

0 est une valeur interdite de la fonction f car on ne peut pas diviser par 0. en effet, $f(0) = \frac{1}{0}$ n'existe pas et donc $0 \notin \mathscr{D}_f$.

Propriété 8.4 : (*Règles élémentaires des valeurs interdites*)

Dans $\mathbb{R}$:

- on ne peut pas diviser par 0 ;
- la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Propriété 8.5 : (*Calculs de l'ensemble de définition*)

Soient f une fonction définie par une expression algébrique.

Pour ***calculer l'ensemble de définition*** de la fonction f, on détermine les valeurs interdites de f en utilisant les règles élémentaires des valeurs interdites puis on en déduit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

Exemple :

- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

  Pour calculer l'ensemble de définition de la fonction f, on détermine les valeurs interdites de f.

  On ne peut pas diviser par 0, donc le dénominateur $x - 3$ ne doit pas être égal à 0 :

$$\begin{aligned} x - 3 \neq 0 &\iff x - 3 + 3 \neq 0 + 3 \\ &\iff x \neq 3 \end{aligned}$$

  Ainsi, 3 est une valeur interdite de la fonction f. On en déduit que l'ensemble de définition de la fonction f est tous les nombres réels sauf 3 :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$$

- Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{5 - x}$.

  Pour calculer l'ensemble de définition de la fonction g, on détermine les valeurs interdites de g. La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas, donc l'expression $5 - x$ doit être positive ou nulle :

$$\begin{aligned} 5 - x \geqslant 0 &\iff 5 - x - 5 \geqslant 0 - 5 \\ &\iff -x \geqslant -5 \\ &\iff -x \times (-1) \leqslant -5 \times (-1) \\ &\iff x \leqslant 5 \end{aligned}$$

Ainsi, tous les réels inférieurs ou égaux à 5 sont des valeurs autorisées pour la fonction g. On en déduit que l'ensemble de définition de la fonction g est :

$$\mathscr{D}_g =]-\infty; 5]$$

Propriété 8.6 : (*Appartenance d'un point à une courbe représentative*)

Soient f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Un point $M(x_M; y_M)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $f(x_M) = y_M$.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- Pour savoir si le point $A(1; 2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$, on calcule $f(1)$:

$$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

Comme $f(1) = 1 \neq y_A$, le point A n'appartient pas à $\mathscr{C}_f$.

- Pour savoir si le point $B(2; 3)$ appartient à $\mathscr{C}_f$, on calcule $f(2)$:

$$f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

Comme $f(2) = 3 = y_B$, le point B appartient à $\mathscr{C}_f$.

- Pour savoir si le point $C(3; 5)$ appartient à $\mathscr{C}_f$, on calcule $f(3)$:

$$f(3) = 3^2 - 3 + 1 = 9 - 3 + 1 = 7$$

Comme $f(3) = 7 \neq y_C$, le point C n'appartient pas à $\mathscr{C}_f$.

Définition 8.7 : (*Tableau de valeurs*)

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.
On appelle ***Tableau de valeurs*** d'une fonction f un tableau présentant des valeurs de l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et les images correspondantes par la fonction f.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
Pour construire un tableau de valeurs de la fonction f on choisie arbitrairement des valeurs $x \in \mathscr{D}_f$, on calcule les images correspondantes puis on remplit le tableau suivant :

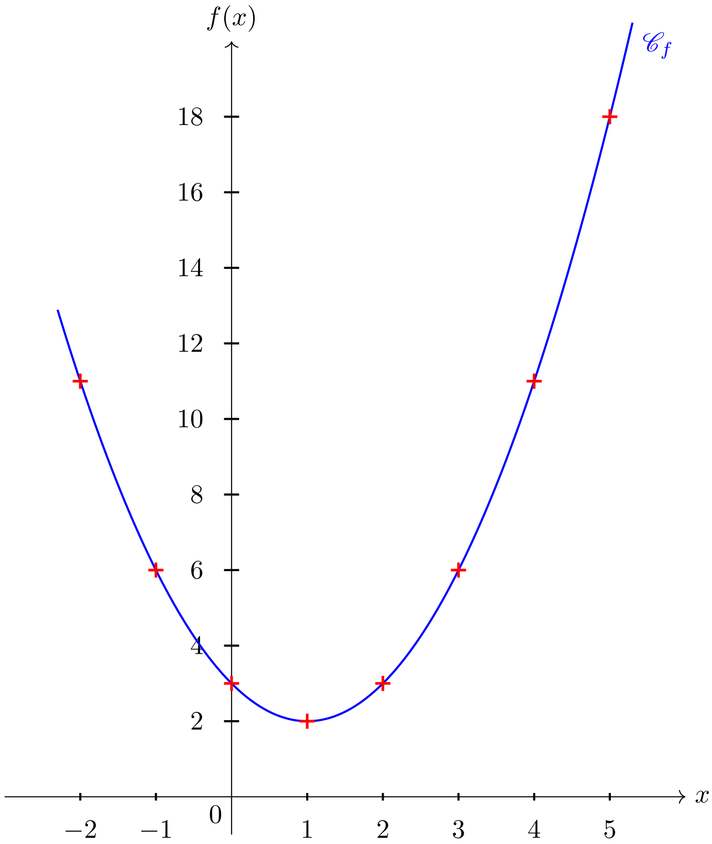
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	11	6	3	2	3	6	11	18

Propriété 8.8 : (*Construction d'une courbe représentative*)

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.
Pour ***construire la courbe représentative*** de la fonction f, on construit un tableau de valeurs de f en choisissant arbitrairement autant de valeurs $x \in \mathscr{D}_f$ que nécessaire puis on place les points correspondants dans un repère et on relie ces points par une courbe lisse.

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, on commence par anticiper l'échelle du repère en identifiant les valeurs minimales et maximales des abscisses et des ordonnées à partir du tableau de valeurs. Ici, les abscisses varient de -2 à 5 et les ordonnées de 2 à 18. Ensuite, on construit la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$:



Chapitre 9

Repérage dans le plan

Définition 9.1 : (*Repère cartésien*)

On appelle ***repère cartésien*** d'un plan un triplet de points O, I et J non alignés dans ce plan. On note $(O; I, J)$ ce repère, avec :

- O l'***origine*** du repère ;
- I le ***point unitaire de l'axe des abscisses*** ;
- OI la ***longueur unité de l'axe des abscisses*** ;
- (OI) l'***axe des abscisses*** ;
- J le ***point unitaire de l'axe des ordonnées*** ;
- OJ ***la longueur unité de l'axe des ordonnées*** ;
- (OJ) l'***axe des ordonnées*** .

Définition 9.2 : (*Coordonnées d'un point*)

Soit $(O; I, J)$ un repère cartésien.

Pour tout point M du plan, on appelle ***coordonnées de*** M dans le repère $(O; I, J)$ l'unique couple de nombres (x_M, y_M) avec :

- x_M l'***abscisse*** de M ;
- y_M l'***ordonnée*** de M.

Définition 9.3 : (*Repère orthogonal, repère normé, repère orthonormé*)

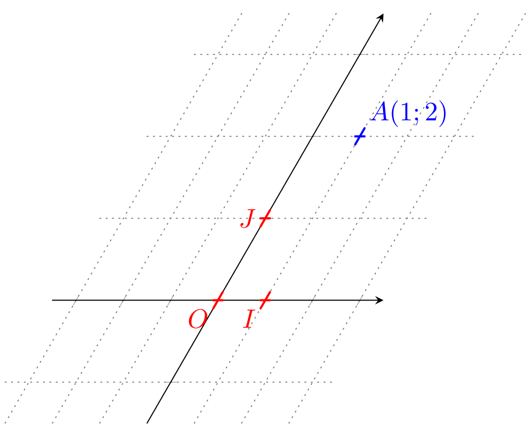
On appelle ***repère orthogonal*** un repère cartésien dans lequel les axes des abscisses et des ordonnées sont perpendiculaires.

On appelle ***repère normé*** un repère cartésien dans lequel les longueurs unités des axes des abscisses et des ordonnées sont égales.

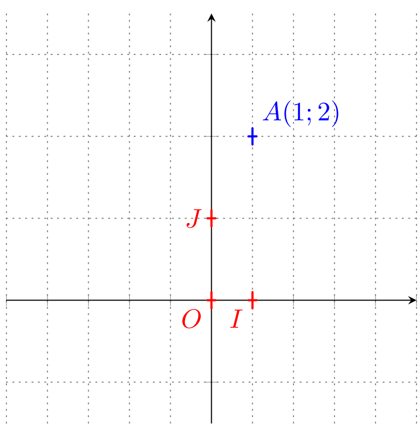
On appelle ***repère orthonormé*** (ou ***repère orthonormal***) un repère cartésien qui est à la fois orthogonal et normé.

Exemple :

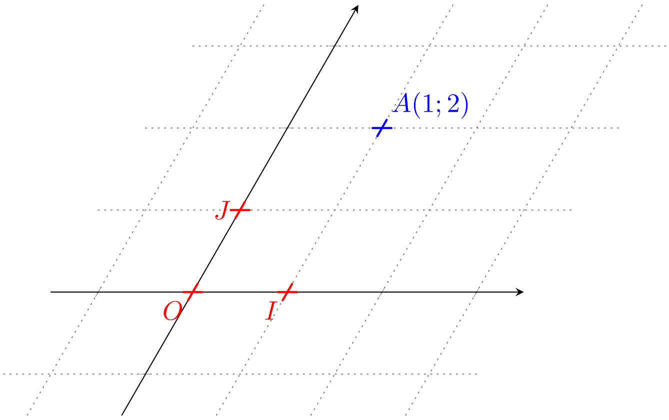
Repère :



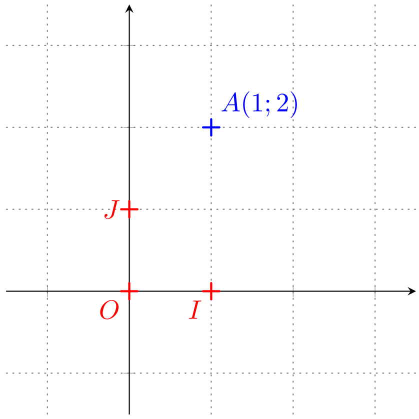
Repère orthogonal :



Repère normé :



Repère orthonormé :



Propriété 9.4 : (*Milieu d'un segment*)

Soient $(O; I, J)$ un repère et $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

Les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ sont données par la formule suivante :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exemple :

Soient $A(2;3)$, $B(4;7)$ et $C(-1;2)$ deux points du plan dans le repère $(O; I, J)$.

Les coordonnées du milieu M_1 du segment $[AB]$ sont données par la formule suivante :

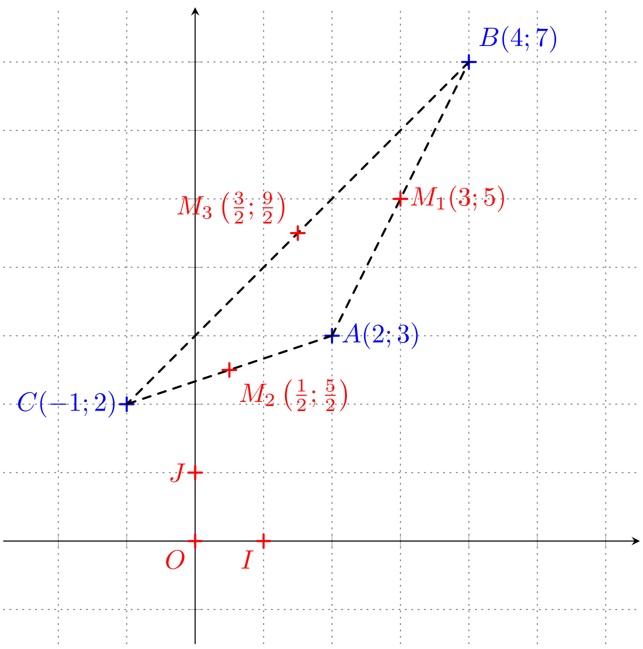
$$M_1\left(\frac{2+4}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = M_1(3;5)$$

Les coordonnées du milieu M_2 du segment $[AC]$ sont données par la formule suivante :

$$M_2\left(\frac{2+(-1)}{2}; \frac{3+2}{2}\right) = M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Les coordonnées du milieu M_3 du segment $[BC]$ sont données par la formule suivante :

$$M_3\left(\frac{4+(-1)}{2}; \frac{7+2}{2}\right) = M_3\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$$



Propriété 9.5 : (*Longueur d'un segment*)

Soient $(O; I, J)$ un repère et $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

La longueur du segment $[AB]$, notée AB, est donnée par la formule suivante :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple :

Soient $A(2; 3)$, $B(4; 7)$ et $C(-1; 2)$ trois points du plan dans un repère $(O; I, J)$.

La longueur du segment $[AB]$ est :

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2} \\
&= \sqrt{2^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{4 + 16} \\
&= \sqrt{20} \\
&= \sqrt{4 \times 5} \\
&= \sqrt{4} \times \sqrt{5} \\
&= 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

La longueur du segment $[AC]$ est :

$$\begin{aligned}
AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(-1-2)^2 + (2-3)^2} \\
&= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} \\
&= \sqrt{9 + 1} \\
&= \sqrt{10}
\end{aligned}$$

La longueur du segment $[BC]$ est :

$$\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\
&= \sqrt{(-1-4)^2 + (2-7)^2} \\
&= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} \\
&= \sqrt{25 + 25} \\
&= \sqrt{50} \\
&= \sqrt{25 \times 2} \\
&= \sqrt{25} \times \sqrt{2} \\
&= 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Chapitre 10

Fonctions affines

Définition 10.1 : *(Fonction affine)*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux constantes.

On appelle ***fonction affine*** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax + b$$

Le nombre a est appelé le ***coefficient directeur*** de la fonction affine f.

Le nombre b est appelé l'***ordonnée à l'origine*** de la fonction affine f.

Exemple :

- $f(x) = 3x + 2$ est une fonction affine de coefficient directeur 3 et d'ordonnée à l'origine 2.
- $g(x) = -5x + 7$ est une fonction affine de coefficient directeur -5 et d'ordonnée à l'origine 7.
- $h(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$ est une fonction affine de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $-\sqrt{2}$.
- $k(x) = -x$ est une fonction affine de coefficient directeur -1 et d'ordonnée à l'origine 0.
- $m(x) = 4$ est une fonction affine de coefficient directeur 0 et d'ordonnée à l'origine 4.
- $n(x) = \frac{2}{x} + 4$ n'est pas une fonction affine car l'expression de $n(x)$ n'est pas de la forme $ax + b$.
- $p(x) = x^2 + 3$ n'est pas une fonction affine car l'expression de $p(x)$ n'est pas de la forme $ax + b$.
- $q(x) = \sqrt{x} - 1$ n'est pas une fonction affine car l'expression de $q(x)$ n'est pas de la forme $ax + b$.
- $r(x) = \sqrt{3x + 2}$ n'est pas une fonction affine car l'expression de $r(x)$ n'est pas de la forme $ax + b$.
- $s(x) = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$ est une fonction affine de coefficient directeur $\sqrt{3}$ et d'ordonnée à l'origine $\sqrt{2}$.
- $t(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{2}$ n'est pas une fonction affine car l'expression de $t(x)$ n'est pas de la forme $ax + b$.

Propriété 10.2 : *(Courbe représentative d'une fonction affine)*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux constantes.

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction affine f est une droite.

Cette droite passe par le point de coordonnées $(0; b)$ appellé ***ordonnée à l'origine*** et son coefficient directeur a détermine l'inclinaison de la droite par rapport à l'axe des abscisses :

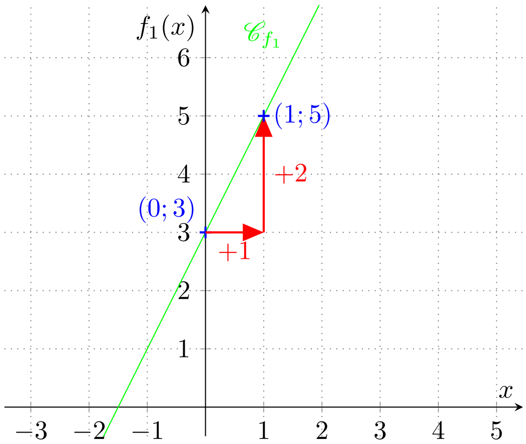
- si $a > 0$, la droite $\mathscr{C}_f$ est ***croissante***;
- si $a < 0$, la droite $\mathscr{C}_f$ est ***décroissante***;
- si $a = 0$, la droite $\mathscr{C}_f$ est ***horizontale***.

A partir d'un point de la droite, on peut utiliser le coefficient directeur pour déterminer un second point de la droite en utilisant le fait que $a = \frac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}}$: pour une variation des abscisses de 1 unité, la variation des ordonnées est égale à a unités.

Exemple :

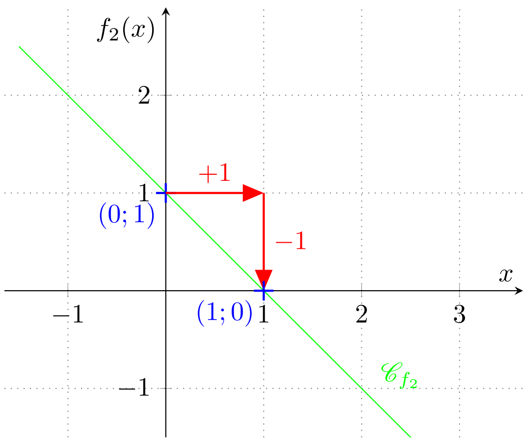
- Soit f_1 une fonction affine définie par $f_1(x) = 2x + 3$.

L'ordonnée à l'origine de f_1 est 3 donc la courbe représentative de f_1 est une droite passant par le point $(0;3)$ et de coefficient directeur 2. Pour tracer cette droite, on peut partir du point $(0;3)$ et utiliser le coefficient directeur pour trouver un second point : en avançant de 1 unité sur l'axe des abscisses, on avance de 2 unités sur l'axe des ordonnées. Ainsi, le point $(1;5)$ appartient à la droite.



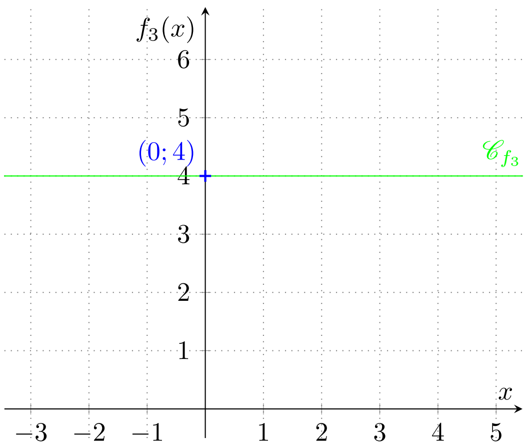
⊛ Soit f_2 une fonction affine définie par $f_2(x) = -x + 1$.

L'ordonnée à l'origine de f_2 est 1 donc la courbe représentative de f_2 est une droite passant par le point $(0;1)$ et de coefficient directeur -1. Pour tracer cette droite, on peut partir du point $(0;1)$ et utiliser le coefficient directeur pour trouver un second point : en avançant de 1 unité sur l'axe des abscisses, on recule de 1 unité sur l'axe des ordonnées. Ainsi, le point $(1;0)$ appartient à la droite.



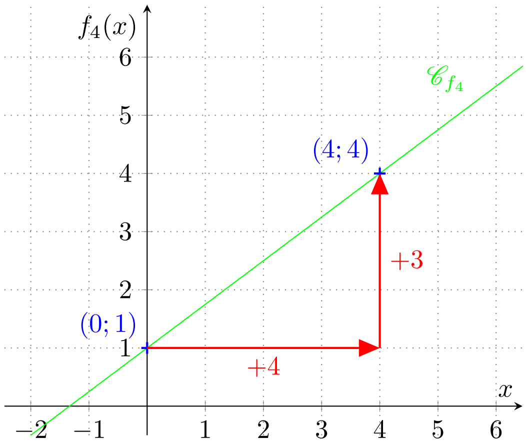
⊛ Soit f_3 une fonction affine définie par $f_3(x) = 4$.

L'ordonnée à l'origine de f_3 est 4 et le coefficient directeur est 0, donc la courbe représentative de f_3 est une droite horizontale passant par le point $(0;4)$.



$\circledast$ Soit f_4 une fonction affine définie par $f_4(x) = \frac{3}{4}x + 1$.

L'ordonnée à l'origine de f_4 est 1 donc la courbe représentative de f_4 est une droite passant par le point $(0;1)$ et de coefficient directeur $\frac{3}{4}$. Pour tracer cette droite, on peut partir du point $(0;1)$ et utiliser le coefficient directeur pour trouver un second point : en avançant de 4 unités sur l'axe des abscisses, on avance de 3 unités sur l'axe des ordonnées. Ainsi, le point $(4;4)$ appartient à la droite.



Propriété 10.3 : *(Variation d'une fonction affine)*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux constantes.

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

$\circledast$ Si $a > 0$ alors f est ***strictement croissante*** sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\circledast$ Si $a < 0$ alors f est ***strictement décroissante*** sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$\circledast$ Si $a = 0$ alors f est ***constante*** sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	b	$\longrightarrow$	b

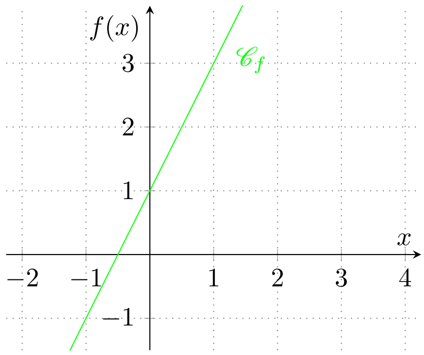
Exemple :

Soit f définie par $f(x) = 2x + 1$.

Le coefficient directeur de f est 2 qui est strictement positif donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut comparer avec la courbe représentative de f :



Propriété 10.4 : (*Tableau de signe d'une fonction affine*)

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ deux constantes.

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

L'équation $f(x) = 0$ admet pour solution $x = -\frac{b}{a}$.

Le signe de la fonction affine f dépend du signe de son coefficient directeur a :

- Si $a > 0$, le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$, le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

Preuve :

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ deux constantes.

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. L'équation $f(x) = 0$ s'écrit :

$$ax + b = 0$$

En soustrayant b des deux membres, on obtient :

$$ax = -b$$

En divisant les deux membres par a (qui est non nul), on obtient :

$$x = -\frac{b}{a}$$

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet pour solution $x = -\frac{b}{a}$.

Le signe de la fonction affine f dépend du signe de son coefficient directeur a :

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (propriété **10.3**).

  Ainsi, pour $x < -\frac{b}{a}$, on a $f(x) < f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ et pour $x > -\frac{b}{a}$, on a $f(x) > f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

  Le tableau de signe de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (propriété **10.3**).

  Ainsi, pour $x < -\frac{b}{a}$, on a $f(x) > f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ et pour $x > -\frac{b}{a}$, on a $f(x) < f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

  Le tableau de signe de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

Exemple :

Soit f définie par $f(x) = -3x + 6$.

Le coefficient directeur de f est -3 et l'ordonnée à l'origine est 6 donc la fonction s'annule pour :

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{-3} = 2$$

Comme le coefficient directeur est strictement négatif, le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

Chapitre 11

Evolutions et pourcentages

Définition 11.1 : (*Coefficient multiplicateur*)

Soient une valeur initiale $V_I \in \mathbb{R}$ et une valeur finale $V_F \in \mathbb{R}$.

On appelle ***coefficient multiplicateur*** le nombre C_M tel que :

$$V_F = V_I \times C_M$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{V_I} \arrow[rr, bend left, "\times C_M"] & & \boxed{V_F} \end{tikzcd}$$

Exemple :

Une montre coûte 150 euros en janvier. En juin, elle coûte 180 euros. On a donc le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} \boxed{150} \arrow[rr, bend left, "\times C_M"] & & \boxed{180} \end{tikzcd}$$

On peut déterminer le coefficient multiplicateur :

$$\begin{aligned} V_F = V_I \times C_M &\iff 180 = 150 \times C_M \\ &\iff C_M = \frac{180}{150} \\ &\iff C_M = 1,2 \end{aligned}$$

Donc le prix de la montre a été multiplié par $1,2$ entre janvier et juin.

Définition 11.2 : (*Variation absolue*)

On appelle ***variation absolue*** la différence $V_F - V_I$ entre une valeur finale V_F et une valeur initiale V_I.

Exemple :

Reprenons l'exemple de la montre qui coûte 150 euros en janvier et 180 euros en juin.

La variation absolue du prix de la montre entre janvier et juin est :

$$V_F - V_I = 180 - 150 = 30$$

Donc le prix de la montre a augmenté de 30 euros entre janvier et juin.

Définition 11.3 : (*Taux d'évolution*)

On appelle ***taux d'évolution*** (ou ***variation relative***), noté t, le quotient entre la variation absolue $V_F - V_I$ et la valeur initiale V_I. On a donc :

$$t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{V_I} \arrow[rr, bend left, "\times C_M"] \arrow[rr, "t"] & & \boxed{V_F} \end{tikzcd}$$

Propriété 11.4 : *(Augmentation ou diminition)*

Soient une valeur initiale $V_I \in \mathbb{R}$ et une valeur finale $V_F \in \mathbb{R}$.

Le taux d'évolution t permet de déterminer si la valeur finale V_F est une ***augmentation*** ou une ***diminution*** par rapport à la valeur initiale V_I :

- Si $t > 0$, alors $V_F > V_I$ et la valeur finale est une ***augmentation de*** t.
- Si $t < 0$, alors $V_F < V_I$ et la valeur finale est une ***diminution de*** $|t|$.
- Si $t = 0$, alors $V_F = V_I$ et il n'y a pas de variation.

Exemple :

- Reprenons l'exemple de la montre qui coûte 150 euros en janvier et 180 euros en juin.

  Le taux d'évolution du prix de la montre entre janvier et juin est :

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_F - V_I}{V_I} \\ &= \frac{180 - 150}{150} \\ &= \frac{30}{150} \\ &= 0,2 \\ &= 0,2 \times 1 \\ &= 0,2 \times \frac{100}{100} \\ &= \frac{0,2 \times 100}{100} \\ &= \frac{20}{100} \\ &= 20\% \end{aligned}$$

  Donc le prix de la montre a une augmentation de 20% entre janvier et juin.

- Un sac coûte 80 euros en magasin A et 60 euros en magasin B.

  Le taux d'évolution du prix du sac entre le magasin A et le magasin B est :

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_F - V_I}{V_I} \\ &= \frac{60 - 80}{80} \\ &= \frac{-20}{80} \\ &= -0,25 \\ &= -0,25 \times 1 \\ &= -0,25 \times \frac{100}{100} \\ &= \frac{-0,25 \times 100}{100} \\ &= \frac{-25}{100} \\ &= -25\% \end{aligned}$$

  Donc le prix du sac a une diminution de 25% entre le magasin A et le magasin B.

Propriété 11.5 : (*Coefficient multiplicateur et taux d'évolution*)

Soient t le taux d'évolution et C_M le coefficient multiplicateur entre une valeur initiale et une valeur finale.

On a la relation suivante entre le taux d'évolution t et le coefficient multiplicateur C_M :

$$C_M = 1 + t$$

$$\iff \quad t = C_M - 1$$

Exemple :

En connaissant le taux d'évolution t, on peut déterminer le coefficient multiplicateur C_M à l'aide de la relation $C_M = 1 + t$.

De même, en connaissant le coefficient multiplicateur C_M, on peut déterminer le taux d'évolution t à l'aide de la relation $t = C_M - 1$.

Taux d'évolution t	Coefficient multiplicateur C_M
10%	$1 + \frac{10}{100} = 1,1$
$1,2 - 1 = 0,2 = 20\%$	$1,2$
30%	$1 + \frac{30}{100} = 1,3$
$1,87 - 1 = 0,87 = 87\%$	$1,87$
100%	$1 + \frac{100}{100} = 2$
$3 - 1 = 200\%$	3
-10%	$1 + \frac{-10}{100} = 0,9$
$0,75 - 1 = -0,25 = -25\%$	$0,75$
-37%	$1 + \frac{-37}{100} = 0,63$
$0,5 - 1 = -0,5 = -50\%$	$0,5$
-100%	$1 + \frac{-100}{100} = 0$

Propriété 11.6 : (*Erreur classique des taux d'évolutions*)

Une augmentation du taux d'évolution t suivie d'une diminution du même taux d'évolution t ***ne*** ramène ***pas*** à la valeur initiale.

Exemple :

Un élève possède 10 euros. Il reçoit une augmentation de 10% de son argent :

Donc le coefficient multiplicateur C_M est donné par :

$$C_M = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$$

Le nouveau montant V_F est donc donné par :

$$V_F = V_I \times C_M = 10 \times 1,1 = 11$$

Donc après une augmentation de 10%, l'élève possède 11 euros.

Si ensuite le prix diminue de 10%, le nouveau coefficient multiplicateur C_{M_2} est donné par :

$$C_{M_2} = 1 - \frac{10}{100} = 0,9$$

Le nouveau montant V_{F_2} est donc donné par :

$$V_{F_2} = V_F \times C_{M_2} = 11 \times 0,9 = 9,9$$

Donc après une augmentation de 10% puis une diminution de 10%, le montant possédé par l'élève est de $9,90$ euros et non pas de 10 euros.

Propriété 11.7 : (*Evolution réciproque*)

Soient une valeur initiale $V_I \in \mathbb{R}$, une valeur finale $V_F \in \mathbb{R}$ et C_M le coefficient multiplicateur entre V_I et V_F.

Le coefficient multiplicateur C_{M_r} de l'***évolution réciproque*** est donnée par la relation suivante :

$$C_{M_r} = \frac{1}{C_M}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{V_I} \arrow[rr, bend left, "\times C_M"] & & \boxed{V_F} \arrow[ll, bend left, "\div C_M"] \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} \boxed{V_I} \arrow[rr, bend left, "\times C_M"] & & \boxed{V_F} \arrow[ll, bend left, "\times C_{M_r}"] \end{tikzcd}$$

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, un élève possède 10 euros. Il reçoit une augmentation de 10% de son argent :

Donc le coefficient multiplicateur C_M est donné par :

$$C_M = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$$

Le nouveau montant V_F est donc donné par :

$$V_F = V_I \times C_M = 10 \times 1,1 = 11$$

Donc après une augmentation de 10%, l'élève possède 11 euros.

Pour retrouver la valeur initiale de 10 euros, il faut appliquer une évolution réciproque avec le coefficient multiplicateur C_{M_r} donné par :

$$C_{M_r} = \frac{1}{C_M} = \frac{1}{1,1} = \frac{10}{11}$$

Ce qui correspond à un taux dévolution de :

$$t = C_{M_r} - 1 = \frac{10}{11} - 1 = \frac{10 - 11}{11} = \frac{-1}{11} \approx -0,0909 \approx -9,09\%$$

Donc une diminution d'environ $9,09\%$.

Le nouveau montant V_{I_2} est donc donné par :

$$V_{I_2} = V_F \times C_{M_r} = 11 \times \frac{10}{11} = 10 = V_I$$

Donc après une évolution réciproque, l'élève possède 10 euros, ce qui correspond à la valeur initiale.

$$\begin{tikzcd} \boxed{10} \arrow[r, bend left=40, "\times 1,1"] \arrow[r, shift left, "+10\%"] & \boxed{11} \arrow[l, bend left=40, "\div 1,1"] \arrow[l, shift left, "\approx -9,09\%"] \end{tikzcd}$$

Propriété 11.8 : (*Evolutions successives*)

Soient une valeur initiale $V_I \in \mathbb{R}$, une valeur intermédiaire $V_1 \in \mathbb{R}$, une valeur finale $V_F \in \mathbb{R}$ et C_{M_1}, C_{M_2} les coefficients multiplicateurs des évolutions successives entre V_I et V_1 puis entre V_1 et V_F.

Le coefficient multiplicateur C_M de l'***évolution globale*** est donnée par la relation suivante :

$$C_M = C_{M_1} \times C_{M_2}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{V_I} \arrow[r, bend left, "\times C_{M_1}"] \arrow[rr, bend left=60, "\times C_M"] & \boxed{V_1} \arrow[r, bend left, "\times C_{M_2}"] & \boxed{V_F} \end{tikzcd}$$

Exemple :

Une marchandise coûte 100 euros. Son prix augmente de 8% puis baisse de 7%.

Le coefficient multiplicateur C_{M_1} de la première évolution est donné par :

$$C_{M_1} = 1 + \frac{8}{100} = 1,08$$

Le coefficient multiplicateur C_{M_2} de la deuxième évolution est donné par

$$C_{M_2} = 1 - \frac{7}{100} = 0,93$$

Le coefficient multiplicateur C_M de l'évolution globale est donc donné par :

$$C_M = C_{M_1} \times C_{M_2} = 1,08 \times 0,93 = 1,0044$$

Ce qui correspond à un taux d'évolution de :

$$t = C_M - 1 = 1,0044 - 1 = 0,0044 = 0,44\%$$

Donc le prix de la marchandise a augmenté de $0,44\%$ après les deux évolutions successives.

Son nouveau prix V_F est donc donné par :

$$V_F = V_I \times C_M = 100 \times 1,0044 = 100,44$$

Donc après les deux évolutions successives, la marchandise coûte $100,44$ euros.

$$\begin{tikzcd} \boxed{100} \arrow[r, "+8\%"] \arrow[r, bend left, "\times 1,08"] \arrow[rr, bend left=60, "\times 1,0044"] \arrow[rr, bend right, "+0,44\%"'] & \boxed{108} \arrow[r, "-7\%"] \arrow[r, bend left, "\times 0,93"] & \boxed{100,44} \end{tikzcd}$$

Chapitre 12

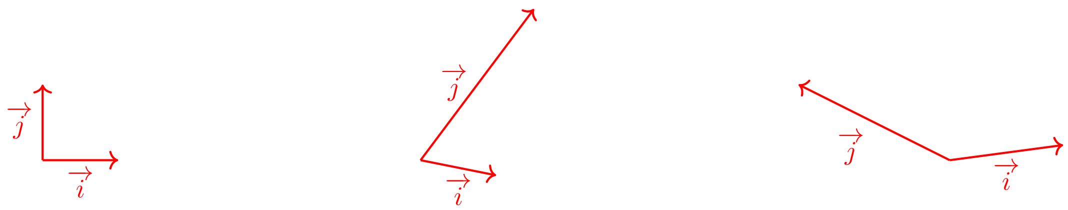
Calculs des vecteurs

Définition 12.1 : (*Base*)

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

On appelle ***base*** du plan le couple de vecteurs $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Exemple :



Dans chaque cas, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires donc le couple $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est une base du plan.

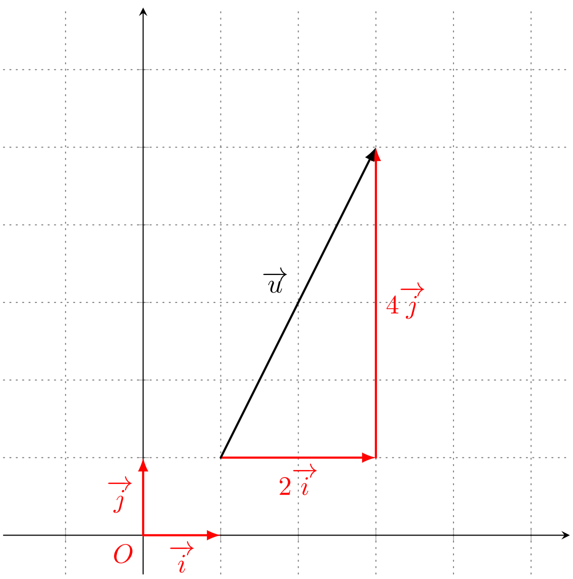
Définition 12.2 : (*Combinaison linéaire*)

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan tel que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ soit une base du plan.

On dit que $\vec{u}$ est une ***combinaison linéaire*** des deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, s'il existe deux réels x et y tels que :

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Exemple :



Dans ce repère, le vecteur $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ car on a :

$$\vec{u} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

Théorème 12.3 : (*Existence et unicité de la combinaison linéaire*)

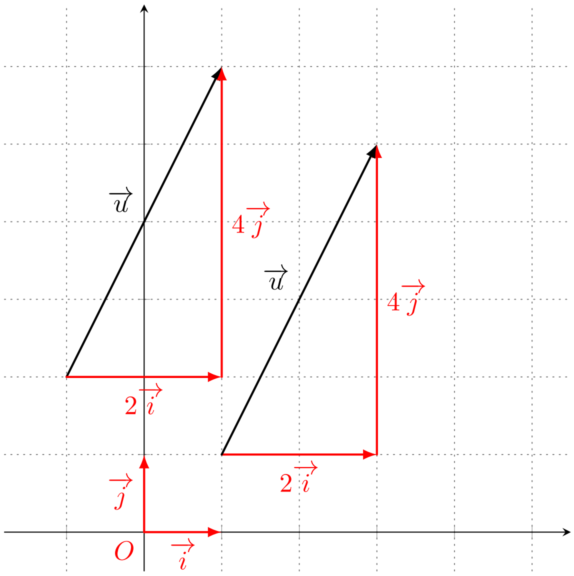
Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan tel que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ soit une base du plan.

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan possède une unique combinaison linéaire des deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Autrement dit, soit $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$ l'ensemble des vecteurs du plan, on a :

$$\forall \vec{u} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^2},\ \exists!(x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Exemple :



Dans ce repère, le vecteur $\vec{u}$ ne possède pas plusieurs combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Définition 12.4 : (*Coordonnées d'un vecteurs*)

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan tel que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ soit une base du plan et soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

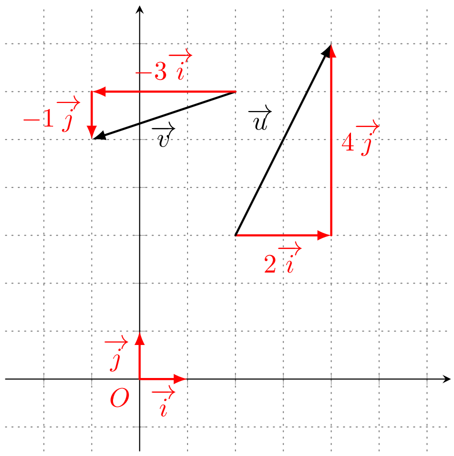
On appelle ***coordonnées de*** $\vec{u}$ ***dans la base*** $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ le couple de réels $(x;y)$ tel que :

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

On note alors :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple :



Dans la base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, le vecteur $\vec{u}$ a pour combinaison linéaire :

$$\vec{u} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

Donc les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ sont :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, le vecteur $\vec{v}$ a pour combinaison linéaire :

$$\vec{v} = -3\,\vec{i} - 1\,\vec{j}$$

Donc les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ sont :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

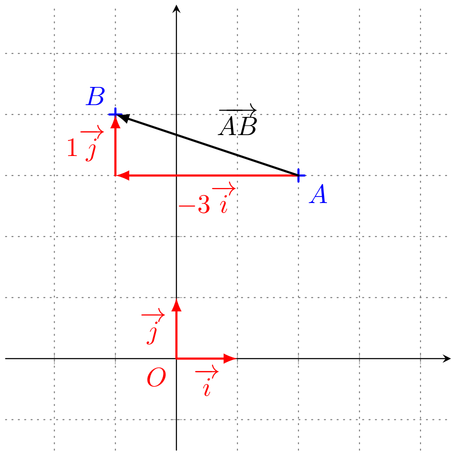
Propriété 12.5 : (*Coordonnées d'un représentant de vecteur*)

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan et soit $\overrightarrow{AB}$ le vecteur dirigé de A vers B.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Exemple :



Soient les points $A(2; 3)$ et $B(-1; 4)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 12.6 : (*Caractérisation de l'égalité de deux vecteurs par les coordonnées*)

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Autrement dit, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Alors $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Exemple :

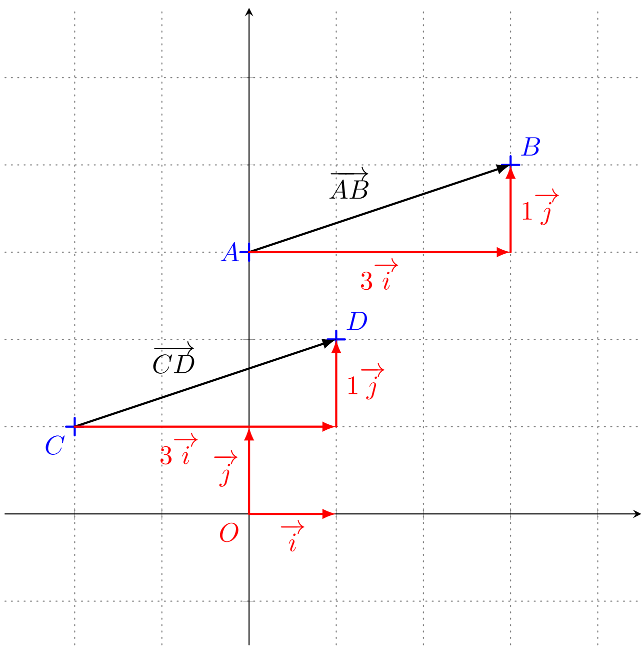
Soient $A(0; 3)$, $B(3; 4)$, $C(-2; 1)$ et $D(1; 2)$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes coordonnées.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Propriété 12.7 : (*Coordonnées d'une somme de vecteurs*)

Soit un repère du plan $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ et soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tels que :

$$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ sont données par :

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$$

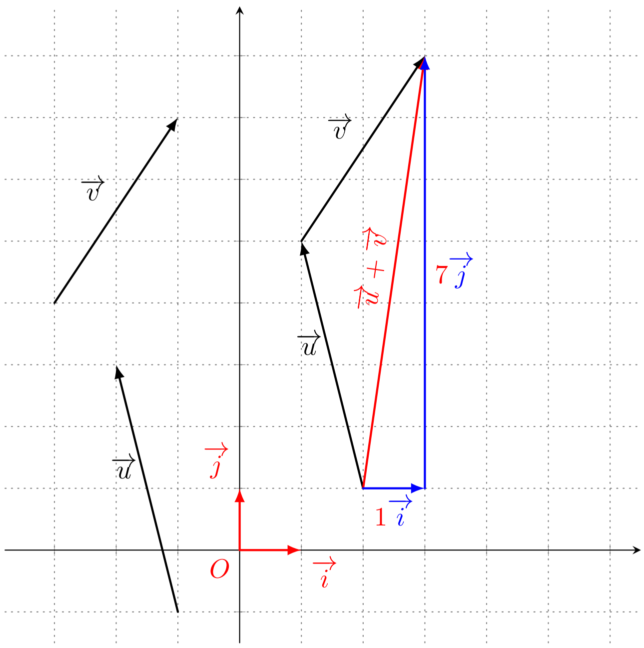
Exemple :

Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que :

$$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ sont données par :

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}-1+2\\4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$



Propriété 12.8 : (*Coordonnées d'un produit d'un vecteur par un scalaire*)

Soit un repère du plan $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$, soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan et soit $k\in\mathbb{R}$ un scalaire tels que :

$$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Alors les coordonnées du vecteur $k\overrightarrow{u}$ sont données par :

$$k\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$$

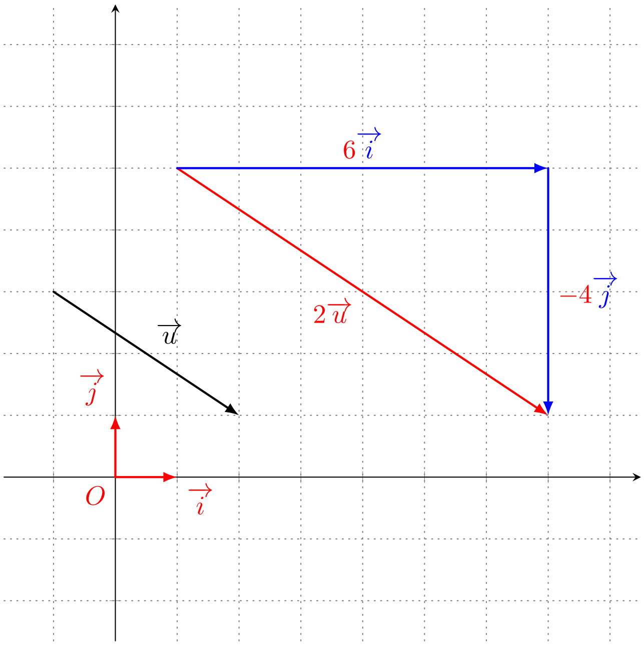
Exemple :

Soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{u}$ sont données par :

$$2\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 \\ 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Propriété 12.9 : *(Norme d'une vecteur)*

Soit un repère **orthonormé** du plan $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan tel que :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Alors la ***norme du vecteur*** $\overrightarrow{u}$ est donnée par :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

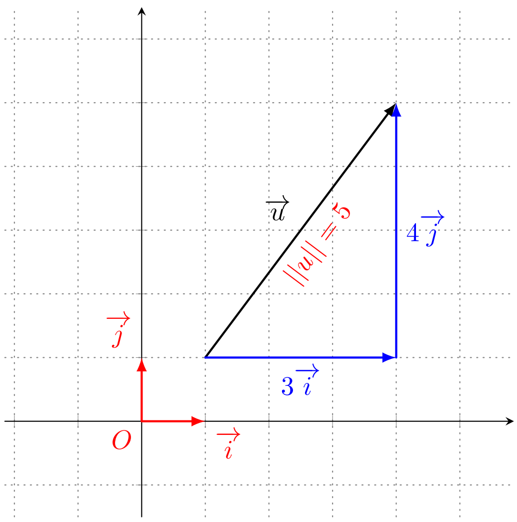
Exemple :

Soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La ***norme du vecteur*** $\overrightarrow{u}$ est donnée par :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$



Chapitre 13

Fonctions de référence

Définition 13.1 : (*Fonction de référence*)

On appelle ***fonction de référence*** toute fonction étudiée pour sa simplicité, son exemplarité ou afin de servir de modèle pour d'autres fonctions plus complexes.

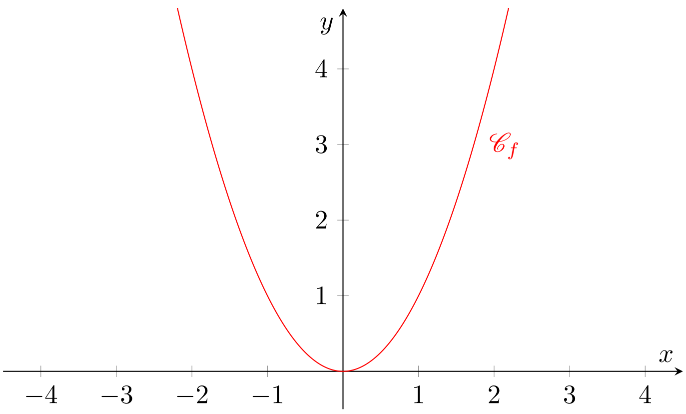
Définition 13.2 : (*Fonction carrée*)

On appelle ***fonction carrée*** la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto x^2$$

Propriété 13.3 : (*Courbe représentative de la fonction carrée*)

La courbe représentative de la fonction carrée dans un repère orthonormé est une parabole *(ayant approximativement la forme d'un U dont les branches s'écarteraient indéfiniment)* dont le sommet est le point $O(0;0)$ et qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriété 13.4 : (*Variations de la fonction carrée*)

La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve :

Le but est d'étudier toutes les variations possible de f dans son ensemble de définition $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

Pour cela on peut couper l'étude en deux parties : $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$ *(ce raisonnement s'appelle le **raisonnement par disjonction de cas**)*.

(∗) Pour $x \in]-\infty;0]$:

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2 \leqslant 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on a :

$$x_1 - x_2 < 0$$

De plus, comme $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$ et que $x_1 < x_2$, on a :

$$x_1 + x_2 < 0$$

Donc par règles du signe d'un produit :

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$$

Autrement dit :

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Ce qui donne finalement :

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Donc d'après la définition 3.16 la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

(*) Pour $x \in [0; +\infty[$:

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $0 \leqslant x_1 < x_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on a :

$$x_1 - x_2 < 0$$

De plus, comme $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$, et que $x_1 < x_2$, on a :

$$x_1 + x_2 > 0$$

Donc par règles du signe d'un produit :

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$$

Autrement dit :

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Ce qui donne finalement :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Donc d'après la définition 3.16 la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Conclusion : La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

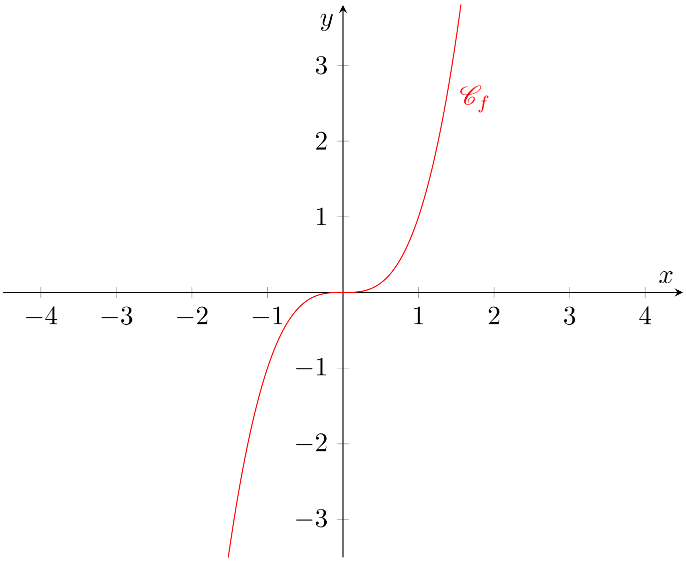
Définition 13.5 : (*Fonction cube*)

On appelle ***fonction cube*** la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto x^3$$

Propriété 13.6 : (*Courbe représentative de la fonction cube*)

La courbe représentative de la fonction cube dans un repère orthonormé est une courbe passant par l'origine du repère et qui est symétrique par rapport à l'origine.



Propriété 13.7 : (*Variations de la fonction cube*)

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Preuve :

Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^3 - x_2^3 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on a :

$$x_1 - x_2 < 0$$

De plus on a :

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_1)^2 > 0$$

Donc :

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$$

Donc par règles du signe d'un produit :

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0$$

Autrement dit :

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Ce qui donne finalement :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Donc d'après la définition 3.16 la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

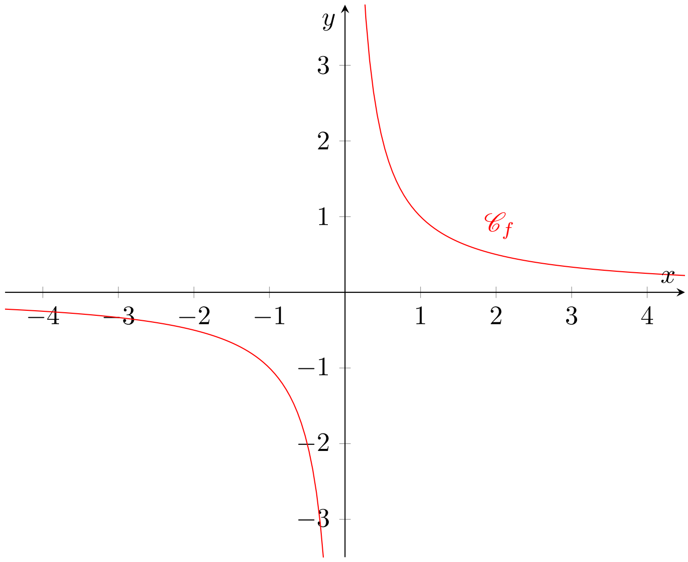
Définition 13.8 : (*Fonction inverse*)

On appelle ***fonction inverse*** la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Propriété 13.9 : (*Courbe représentative de la fonction inverse*)

La courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormé est une hyperbole passant par les points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ et qui est symétrique par rapport à l'origine.



Propriété 13.10 : (*Variations de la fonction inverse*)

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Preuve :

Appliquons le ***raisonnement par disjonction de cas*** pour étudier les variations de la fonction f dans son ensemble de définition $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

(∗) Montrons que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Soient $x_1 \in \mathbb{R}^*_-$ et $x_2 \in \mathbb{R}^*_-$, c'est-à-dire tels que $x_1 < x_2 < 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on a :

$$x_2 - x_1 > 0$$

De plus, comme $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$, on a :

$$x_1 x_2 > 0$$

Donc par règles du signe d'un quotient :

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$$

Autrement dit :

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Ce qui donne finalement :

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Donc d'après la définition 3.16 la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

(∗) Montrons que la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Soient $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire tels que $0 < x_1 < x_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on a :

$$x_2 - x_1 > 0$$

De plus, comme $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, on a :

$$x_1 x_2 > 0$$

Donc par règles du signe d'un quotient :

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$$

Autrement dit :

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Ce qui donne finalement :

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Donc d'après la définition 3.16 la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

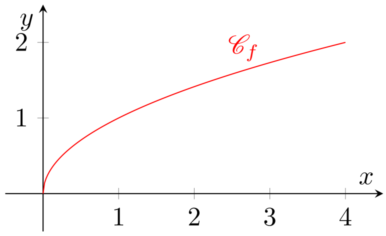
Définition 13.11 : (*Fonction racine carrée*)

On appelle ***fonction racine carrée*** la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : x \mapsto \sqrt{x}$$

Propriété 13.12 : (*Courbe représentative de la fonction racine carrée*)

La courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé est une demi-parabole située dans le premier quadrant du repère et passant par le point $O(0;0)$.



Propriété 13.13 : (*Variations de la fonction racine carrée*)

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Son tableau de variations est :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f	$0 \nearrow +\infty$

Preuve :

Soient $x_1 \in \mathbb{R}_+$ et $x_2 \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire tels que $0 \leqslant x_1 < x_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \quad \text{car } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0 \\ &= \frac{\sqrt{x_1}^2 - \sqrt{x_2}^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on a :

$$x_1 - x_2 < 0$$

De plus, comme $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 > 0$, on a :

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$$

Donc par règles du signe d'un quotient :

$$\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < 0$$

Autrement dit :

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Ce qui donne finalement :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Donc d'après la définition 3.16 la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

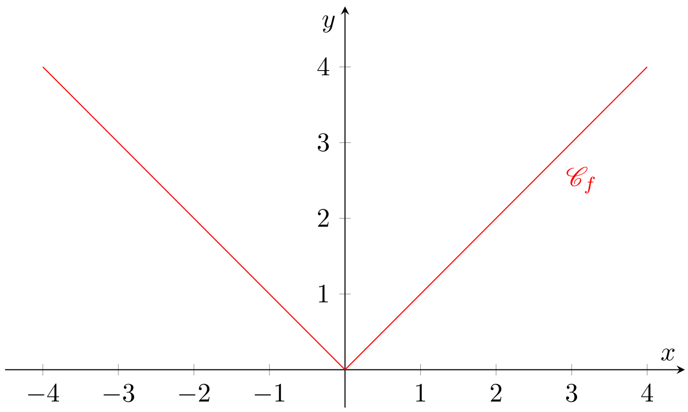
Définition 13.14 : (*Fonction valeur absolue*)

On appelle ***fonction valeur absolue*** la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriété 13.15 : (*Courbe représentative de la fonction valeur absolue*)

La courbe représentative de la fonction valeur absolue dans un repère orthonormé est formée de deux demi-droites perpendiculaires se coupant à l'origine du repère.



Propriété 13.16 : (*Variations de la fonction valeur absolue*)

La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve :

Appliquons le ***raisonnement par disjonction de cas*** pour étudier les variations de la fonction f dans son ensemble de définition $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

⊛ Montrons que la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2 \leqslant 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= |x_1| - |x_2| \\ &= -x_1 - (-x_2) \\ &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on a :

$$x_2 - x_1 > 0$$

Donc :

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Autrement dit :

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Donc d'après la définition 3.16 la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

(*) Montrons que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $0 \leqslant x_1 < x_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= |x_1| - |x_2| \\ &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on a :

$$x_1 - x_2 < 0$$

Donc :

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Autrement dit :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Donc d'après la définition 3.16 la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.