Algèbre 1

Travaux dirigés de Licence 1 MIEEA 2016-2017

Simon RAULOT,

UFR des Sciences et Techniques,

Saint-Etienne-du-Rouvray.

Rédigé et corrigé par Hicham AMARIR avec LaTeX,

le 16 avril 2026

TD n° 1

Logique

Exercice 1. Soient P, Q et R trois propositions, montrer que les propositions suivantes sont des tautologies.

1. $P \iff (\neg(\neg P))$

2. $P \iff (P \vee P)$

3. $P \iff (P \wedge P)$

4. $(P \wedge Q) \iff (Q \wedge P)$

5. $(P \vee Q) \iff (Q \vee P)$

6. $((P \vee Q) \vee R) \iff (P \vee (Q \vee R))$

7. $((P \wedge Q) \wedge R) \iff (P \wedge (Q \wedge R))$

8. $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg P \vee Q)$

9. $(P \Leftrightarrow Q) \iff ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

10. $(\neg(P \vee Q)) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$

11. $(\neg(P \wedge Q)) \iff (\neg P \vee \neg Q)$

12. $(\neg(P \Rightarrow Q)) \iff (P \wedge \neg Q)$

13. $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Correction de l'exercice 1.

1.

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$P \iff (\neg(\neg P))$
V	F	V	V
F	V	F	V

2.

P	$P \vee P$	$P \iff (P \vee P)$
V	V	V
F	F	V

3.

P	$P \wedge P$	$P \iff (P \wedge P)$
V	V	V
F	F	V

4.

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$(P\wedge Q) \iff (Q \wedge P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

5.

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$	$(P\vee Q) \iff (Q \vee P)$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

6.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	$((P \vee Q) \vee R) \iff (P \vee (Q \vee R))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

7.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \wedge R$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$((P \wedge Q) \wedge R) \iff (P \wedge (Q \wedge R))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

8.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg P \vee Q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

9.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$\begin{array}{c}(P\Leftrightarrow Q)\\ \iff \big((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)\big)\end{array}$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

10.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(\neg(P \vee Q)) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

11.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$(\neg(P \wedge Q)) \iff (\neg P \vee \neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

12.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$(\neg(P \Rightarrow Q)) \iff (P \wedge \neg Q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

13.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Exercice 2. Les propositions suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $\neg(P \Rightarrow Q) \iff [(P \wedge Q) \vee \neg Q]$
2. $(P \wedge \neg P) \Rightarrow [(Q \vee R) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg P)]$
3. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \iff ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

Correction de l'exercice 2.

1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$P \wedge Q$	$\neg Q$	$(P \wedge Q) \vee \neg Q$	$\neg(P \Rightarrow Q) \iff [(P \wedge Q) \vee \neg Q]$
V	V	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	V	F

Donc la proposition $\neg(P \Rightarrow Q) \iff [(P \wedge Q) \vee \neg Q]$ n'est pas une tautologie.

2.

P	Q	R	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$Q \vee R$	$R \Rightarrow \neg P$	$(Q \vee R) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg P)$	$(P\wedge\neg P) \Rightarrow \big[(Q\vee R)\Rightarrow(R\Rightarrow\neg P)\big]$
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V	V

Donc la proposition $(P \wedge \neg P) \Rightarrow [(Q \vee R) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg P)]$ est une tautologie.

3.

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$(P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)) \iff \big((P\wedge Q)\Rightarrow R\big)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Donc la proposition $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \iff ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$ est une tautologie.

Exercice 3. Soit $P : \forall x \in \mathbb{R},\ 2x+1 \leqslant \sqrt{4x^2+4x+5}$. La proposition P est-elle vraie ou fausse ?

Correction de l'exercice 3.

Supposons $\neg P$:

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{4x^2+4x+5} < 2x+1$$

Donc

$$0 \leqslant \sqrt{4x^2+4x+5}$$

Par transitivité, on en déduit que

$$0 < 2x+1$$

Donc en appliquant la fonction carrée à chaque membre on a

$$4x^2 + 4x + 5 < 4x^2 + 4x + 1$$

Ainsi on obtient

$$5 < 1$$

Or par définition, $1 \leqslant 5$ est vraie, donc la négation $5 < 1$ est fausse, donc $\neg P$ est fausse, ce qui revient à dire que $P : \forall x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 \leqslant \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$ est vraie.

Exercice 4. Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion "l'équation $x^2 + bx + 1 = 0$ admet deux solutions réelles".

1. Que peut-on dire de cette phrase ? (vraie, fausse, on ne peut pas répondre...).
2. Que dire si on avait l'équation $x^2 + bx - 1 = 0$?

Correction de l'exercice 4.

1. Pour que cette phrase soit vraie, il faut qu'elle soit vraie pour tous les réels b. Pour $b = 0$ on obtient l'assertion :

   l'équation $x^2 + 1 = 0$
   admet deux solutions réelles

   Ce qui revient à dire

   l'équation $x^2 = -1$
   admet deux solutions réelles

   Or un nombre réel élevé au carré est toujours positif donc cette équation n'admet pas de solution réelle. Donc l'assertion est fausse.

2. Vérifions l'assertion à l'aide du calcul du discriminent Δ du polynôme $x^2 + bx - 1$:

   $$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4 \times 1 \times (-1)\\ &= b^2 + 4\end{aligned}$$

   Or

   $$b^2 > 0 \quad \text{et} \quad 4 > 0$$

   Donc

   $$b^2 + 4 > 0$$

   D'où

   $$\Delta > 0$$

   Donc l'assertion suivante est vraie.

   l'équation $x^2 + bx - 1 = 0$
   admet deux solutions réelles

Exercice 5. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x + 1 = 0$ alors $x = 1$ ou $x = -1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x < 2$ alors $x \leqslant 2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant 2$ alors $x < 2$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x(x - 1) = 0$ alors $x = 1$ et $x = 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, pour que $x = 1$ il suffit que $x^2 = 1$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, pour que $x = 1$ il faut que $x^2 = 1$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, pour que $x > 1$ il suffit que $x^2 > 1$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}$, pour que $3x < 0$ il suffit que $x > -3$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}$, pour que $3x < 0$ il suffit que $x < -3$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, pour que $x < -2$ il faut que $-2x + 1 < 5$.

Correction de l'exercice 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x + 1 = 0$$

alors

$$x = -1$$

donc

$$x = 1 \qquad \text{ou} \qquad x = -1$$

Donc la proposition est vraie.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si

$$x < 2$$

alors

$$x < 2 \qquad \text{ou} \qquad x = 2$$

donc par définition

$$x \leqslant 2$$

Donc la proposition est vraie.

3. Soit $x = 2$. Donc

$$x \leqslant 2$$

Mais comme $x = 2$, donc $x < 2$ est faux et donc la proposition est fausse.

4. Supposons $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{si} \quad x(x-1) = 0 \qquad \text{alors} \qquad x = 1 \qquad \text{et} \qquad x = 0$$

Donc

$$1 = x = 0$$

Par transitivité de l'égalité on a

$$1 = 0$$

ce qui est absurde. Donc la proposition est fausse.

5. $x^2 = 1$ est une condition suffisante de l'implication. La proposition peut donc se formuler de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{si } x^2 = 1 \text{ alors } x = 1$$

Supposons que $x = -1$. On a

$$x^2 = x \times x = -1 \times (-1) = 1$$

Donc par transitivité de l'égalité on a

$$x^2 = 1$$

D'après la proposition, on a alors

$$x = 1$$

D'après l'hypothèse $x = -1$, on a donc

$$x = -1 \qquad \text{et} \qquad x = 1$$

Autrement dit

$$-1 = 1$$

ce qui est absurde. Donc la proposition est fausse.

6. $x^2 = 1$ est une condition nécessaire de l'implication. La proposition peut donc se formuler de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{si } x = 1 \text{ alors } x^2 = 1$$

Soit $x = 1$. En calculant la valeur de x^2, on a

$$x^2 = x \times x = 1 \times 1 = 1$$

Donc par transitivité de l'égalité on a

$$x^2 = 1$$

Donc la proposition est vraie.

7. $x^2 > 1$ est une condition suffisante de l'implication. La proposition peut donc se formuler de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{si } x^2 > 1 \text{ alors } x > 1$$

Supposons $x = -2$. On a

$$\begin{aligned} x^2 &= x \times x \\ &= -2 \times (-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Donc par transitivité de l'égalité on a

$$x^2 = 4$$

Comme $4 > 1$ on a bien

$$x^2 > 1$$

D'après la proposition on a alors

$$x > 1$$

Par hypothèse, $x = -2$ donc

$$-2 > 1$$

ce qui est absurde. Donc la proposition est fausse.

8. $x > -3$ est une condition suffisante de l'implication. La proposition peut donc se formuler de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{si } x > -3 \text{ alors } 3x < 0$$

Supposons que $x = 1$, on a bien

$$x > -3$$

D'après la proposition, on a donc

$$3x < 0$$

Or, en calculant la valeur de $3x$, on a

$$\begin{aligned} 3x &= 3 \times 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$3 < 0$$

ce qui est absurde. Donc la proposition est fausse.

9. $x < -3$ est une condition suffisante de l'implication. La proposition peut donc se formuler de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{si } x < -3 \text{ alors } 3x < 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x < -3$$

Alors en multipliant par 3 chaque membre de l'inégalité on a

$$3x < -9$$

Or $-9 < 0$, donc par transitivité de la relation d'ordre strict, on a

$$3x < 0$$

Donc la proposition est vraie.

10. $-2x + 1 < 5$ est une condition nécessaire de l'implication. La proposition peut donc se formuler de la façon suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{si } x < -2 \text{ alors } -2x + 1 < 5$$

Supposons $x = -3$, on a bien

$$x < -2$$

D'après la proposition, on a alors

$$-2x + 1 < 5$$

Or, par l'hypothèse $x = -3$, on a

$$\begin{aligned} -2x + 1 &= -2 \times (-3) + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Donc

$$7 < 5$$

ce qui est absurde. Donc la proposition est fausse.

Exercice 6. Traduire les propositions suivantes en utilisant "il faut" ou "il suffit". Préciser dans quel cas on peut remplacer le "si alors" par "si et seulement si".

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad$ si $\quad x = 2 \quad$ alors $\quad x^2 = 4.$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad$ si $\quad x \leqslant 2 \quad$ alors $\quad x + 3 \leqslant 5.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad$ si $\quad \frac{1}{x} > 0 \quad$ alors $\quad x > 0.$

Correction de l'exercice 6.

1. Traduction de la proposition en utilisant "il faut" ou "il suffit" :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad$ pour que $\quad x = 2 \quad$ il faut que $\quad x^2 = 4.$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad$ pour que $\quad x^2 = 4 \quad$ il suffit que $\quad x = 2.$

La réciproque est fausse car x peut être égale à -2. Donc on ne peut pas remplacer le "si alors" par "si et seulement si".

2. Traduction de la proposition en utilisant "il faut" ou "il suffit" :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad$ pour que $\quad x \leqslant 2 \quad$ il faut que $\quad x + 3 \leqslant 5.$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad$ pour que $\quad x + 3 \leqslant 5 \quad$ il suffit que $\quad x \leqslant 2.$

Dans cette proposition, on peut remplacer le "si alors" par "si et seulement si".

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Si

$$x \leqslant 2$$

en additionnant chaque membre par 3 on obtient

$$x + 3 \leqslant 5$$

Et réciproquement, si

$$x + 3 \leqslant 5$$

en effectuant une soustraction par 3 de chaque membre on obtient

$$x \leqslant 2$$

3. Traduction de la proposition en utilisant "il faut" ou "il suffit" :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad$ pour que $\quad \frac{1}{x} > 0 \quad$ il faut que $\quad x > 0.$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad$ pour que $\quad x > 0 \quad$ il suffit que $\quad \frac{1}{x} > 0.$

Dans cette proposition, on peut remplacer le "si alors" par "si et seulement si".

En effet, soit $x \in \mathbb{R}^*$. Si

$$\frac{1}{x} > 0$$

en multipliant chaque membre par x^2 on obtient

$$x > 0$$

Et réciproquement, si

$$x > 0$$

comme $x \neq 0$, en multipliant chaque membre par $\frac{1}{x^2}$ on obtient

$$\frac{1}{x} > 0$$

Exercice 7. Pour quelles valeurs du nombre réel x la proposition suivante est-elle vraie ?

$$\left(2x^2 + 5x - 12 < 0\right) \vee \left(x^2 + 3x + 2 > 0\right)$$

Correction de l'exercice 7.

Il suffit de déterminer les racines de chaque polynome pour en déduire les ensembles de solutions de chaque inéquation et de faire la réunion des solutions.

Soit $P_1(x) = 2x^2 + 5x - 12$. Le discriminent Δ_1 de P_1 est

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 5^2 - 4 \times 2 \times (-12)\\ &= 25 + 96\\ &= 121\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta_1 > 0$$

Donc P_1 admet deux racines réelles :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-5-\sqrt{\Delta_1}}{2\times 2} & \text{et} \qquad x_2 &= \frac{-5+\sqrt{\Delta_1}}{2\times 2}\\ &= \frac{-5-\sqrt{121}}{4} & &= \frac{-5+11}{4}\\ &= \frac{-5-11}{4} & &= \frac{3}{2}\\ &= -4 & & \end{aligned}$$

Le coefficient dominant de P_1 est 2 qui est strictement positif. On en déduit l'ensemble de solution S_1 de l'inéquation $2x^2 + 5x - 12 < 0$:

$$x \in S_1 \iff x \in \left]-4; \frac{3}{2}\right[$$

Soit $P_2(x) = x^2 + 3x + 2$. Le discriminent Δ_2 de P_2 est

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 3^2 - 4 \times 1 \times 2\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta_2 > 0$$

Donc P_2 admet deux racines réelles :

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{-3-\sqrt{\Delta_2}}{2\times 1} & \text{et} \qquad x_4 &= \frac{-3+\sqrt{\Delta_2}}{2\times 1}\\ &= \frac{-3-\sqrt{1}}{2} & &= \frac{-3+1}{2}\\ &= \frac{-3-1}{2} & &= -1\\ &= -2 & & \end{aligned}$$

Le coefficient dominant de P_2 est 1 qui est strictement positif. On en déduit l'ensemble de solution S_2 de l'inéquation $x^2 + 3x + 2 > 0$:

$$x \in S_2 \iff x \in]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$$

Finalement la proposition

$$\left(2x^2 + 5x - 12 < 0\right) \vee \left(x^2 + 3x + 2 > 0\right)$$

est vraie si x est solution de $2x^2 + 5x - 12 < 0$ ou si x est solution de $x^2 + 3x + 2 > 0$. Donc

$$x \in S_1 \qquad \text{ou} \qquad x \in S_2$$

Autrement dit

$$x \in \left]-4; \frac{3}{2}\right[\cup]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$$

Donc

$$x \in \mathbb{R}$$

La proposition

$$\left(2x^2 + 5x - 12 < 0\right) \vee \left(x^2 + 3x + 2 > 0\right)$$

est vraie pour toutes les valeurs du nombre réel x.

Exercice 8. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x = |x| \vee x = -|x|)$.

2. $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = |x|) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$.

3. (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ ;\ \left(y \leqslant x^2\right)$.

(b) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \left(y \leqslant x^2\right)$.

4. (a) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ \left(y \leqslant x^2\right)$.

(b) $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ \left(y \leqslant x^2\right)$.

Correction de l'exercice 8.

1. Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x (notée $|x|$) est définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le raisonnement se fera par disjonction de cas :

$\boxed{\text{Premier cas :}}$ soit $x \geqslant 0$. Donc

$$|x| = x$$

Autrement dit

$$x = |x| \qquad \text{ou} \qquad x = -|x|$$

Donc la proposition

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+), \quad (x = |x| \vee x = -|x|)$$

est vraie.

$\boxed{\text{Deuxième cas :}}$ soit $x < 0$. Donc

$$|x| = -x$$

Ce qui est équivalent à

$$-|x| = x$$

Autrement dit

$$x = |x| \qquad \text{ou} \qquad x = -|x|$$

Donc la proposition

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_-^*\right), \quad (x = |x| \vee x = -|x|)$$

est vraie.

Finalement par disjonction de cas, on a les propositions

$$(\forall x \in \mathbb{R}_-), \quad (x = |x| \vee x = -|x|)$$

et

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right), \quad (x = |x| \vee x = -|x|)$$

qui sont vraies. Donc la proposition

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x = |x| \vee x = -|x|)$$

est vraie.

2. Supposons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x = |x|$$

Soit $x = -1$. Par hypothèse, on a

$$-1 = |-1|$$

Par définition de la valeur absolue, on a

$$|x| = |-1| = 1$$

Donc

$$-1 = 1$$

Ce qui est absurde. Donc l'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x = |x|$$

est fausse.

Supposons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x = -|x|$$

Soit $x = 1$. Par hypothèse, on a

$$1 = -|1|$$

Par définition de la valeur absolue, on a

$$|x| = |1| = 1$$

Donc

$$1 = -|1| = -1$$

Ce qui est absurde. Donc l'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x = -|x|$$

est fausse.

Finalement, la proposition

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ x = |x|) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$$

est fausse.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $y = x^2$. On a bien $y \in \mathbb{R}$. De plus

$$y = x^2 \leqslant x^2$$

Donc

$$y \leqslant x^2$$

Donc la proposition est vraie.

(b) Posons $y = -1$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$y = -1 < 0 \leqslant x^2$$

Donc

$$y \leqslant x^2$$

Donc la proposition est vraie $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. (a) Supposons que

$$(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ \left(y \leqslant x^2\right)$$

Supposons donc un tel x réel tel que

$$(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ \left(y \leqslant x^2\right)$$

Donc en particulier pour $y = x^2 + 1$ on a

$$x^2 + 1 = y \leqslant x^2 < x^2 + 1$$

Donc

$$x^2 + 1 < x^2 + 1$$

Ce qui est absurde. On en déduit donc que la proposition est fausse.

(b) Il est possible de faire un démonstration plus simple par disjonction de cas. Cependant, voici une démonstration direct.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et posons $x = y + 1$. On a bien $x \in \mathbb{R}$. De plus

$$0 \leqslant \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$$

Et

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = y^2 + y + 1$$

Donc

$$0 \leqslant y^2 + y + 1$$

En ajoutant y à chaque membre on obtient

$$y \leqslant y^2 + 2y + 1$$

Par identité remarquable on a

$$y \leqslant (y+1)^2$$

D'où

$$y \leqslant x^2$$

Donc la proposition est vraie.

Exercice 9. On considère cinq propositions P, Q, R, S et T.
On suppose que $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ et $(R \vee S) \Rightarrow T$ sont deux propositions vraies. Peut-on en déduire que $P \Rightarrow T$ est vraie ?

Correction de l'exercice 9.

Par hypothèse, on a

$$P \Rightarrow (Q \wedge R)$$

qui est vraie. Par définition de la conjonction, on a

$$(Q \wedge R) \Rightarrow R$$

qui est vraie. Par définition de la disjonction, on a

$$R \Rightarrow (R \vee S)$$

qui est vraie. Par hypothèse, on a

$$(R \vee S) \Rightarrow T$$

qui est vraie. Finalement par transitivité de l'implication, on a la proposition

$$P \Rightarrow T$$

qui est vraie.

Exercice 10. Pour tout entier naturel a, on définit les propositions :

$$\begin{aligned} P(a) &: \quad \big(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0\big) \Rightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \geqslant a\big), \\ Q(a) &: \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \big(x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 \geqslant a\big). \end{aligned}$$

1. Montrer que la proposition $P(a)$ est vraie quel que soit l'entier naturel a.

2. La proposition $Q(a)$ est-elle vraie quel que soit l'entier naturel a ?

Correction de l'exercice 10.

1. Soit $a \in \mathbb{N}$. Donc la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0$$

a une valeur de véracité différente selon les valeurs de a car $x^2 + 2ax + 8$ est un polynôme.

Supposons que

$$x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0$$

Donc le discriminent Δ du polynôme est négatif. Autrement dit

$$(2a)^2 - 4 \times 1 \times 8 \leqslant 0$$

On en déduit que

$$a^2 \leqslant 8$$

Donc

$$-2\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2\sqrt{2}$$

Donc la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0$$

est vraie si $a \in \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{N}$, donc si $a \in \{0; 1; 2\}$, et par principe du tiers exclu, elle est fausse si $a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$, donc si $a \in [\![3; +\infty[\![$.

Raisonnons par disjonction de cas.

$\boxed{\text{Premier cas :}}$ $a \in \{0; 1; 2\}$. Donc la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0$$

est vraie.

Alors, on cherche à savoir si $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \geqslant a\big)$ est vraie. Autrement dit, si

$$x^2 + 2x + 3 - a \geqslant 0$$

est vraie.

Déterminons les discriminants Δ_1, Δ_2 et Δ_3 des polynomes respectives suivant

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + 3 \\ \Delta_1 &= 2^2 - 4 \times 1 \times 3 \\ &= -8 \\ \Delta_1 &\leqslant 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x^2 + 2x + 2 \\ \Delta_2 &= 2^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= -4 \\ \Delta_2 &\leqslant 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x^2 + 2x + 1 \\ \Delta_3 &= 2^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= 0 \\ \Delta_3 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Comme les coefficients dominants de $x^2 + 2x + 3$; $x^2 + 2x + 2$ et $x^2 + 2x + 1$ sont positifs, on en déduit que

$$x^2 + 2x + 3 \geqslant 0 \qquad x^2 + 2x + 2 \geqslant 0 \qquad x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$$

On a donc

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \geqslant a\right)$$

qui est vraie.

Finalement on a montré que dans le cas où $a \in \{0; 1; 2\}$ on a

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0\right) \Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \geqslant a\right)$$

qui est vraie.

$\boxed{\text{Deuxième cas :}}$ $a \in [\![3; +\infty]\!]$. Donc la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0$$

est fausse. Dans ce cas, par définition de l'implication, quel que soit la valeur de véracité de la condition nécessaire, la proposition

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2ax + 8 \geqslant 0\right) \Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \geqslant a\right)$$

est vraie.

En conclusion : si $a \in \{0; 1; 2\}$, $P(a)$ est vraie et si $a \in [\![3; +\infty]\!]$, $P(a)$ est vraie. Donc $P(a)$ est vraie quelque soit l'entier naturel a.

2. Soient $a = 2$ et $x = -1$. On a bien

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + 8 &= (-1)^2 + 2 \times 2 \times (-1) + 8 \\ &= 5 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Déterminons la valeur de $x^2 + 2x + 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= (-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 \\ &= 0 < 2 = a \end{aligned}$$

Donc $x^2 + 2x + 3 \geqslant a$ est faux.

Par définition de l'implication, on en déduit que $Q(a)$ n'est pas vraie quel que soit l'entier a.

C'est-à-dire que $Q(a)$ est fausse pour au moins une valeur de l'entier a.

TD n° 2

Ensembles

Exercice 1. Ecrire de différentes manières les ensembles suivants :

1. L'ensemble des nombres naturels non nuls et inférieurs ou égaux à 5.

2. L'ensemble des entiers naturels plus petits que 45 et qui sont des carrés des entiers naturels.

3. L'ensemble des entiers naturels, diviseurs de 70.

4. L'ensembre des réels non nuls dont le carré est inférieur ou égal à 36.

Correction de l'exercice 1.

1. L'ensemble des nombres naturels non nuls et inférieurs ou égaux à 5 s'écrit

$$\begin{aligned}
\{\text{nombres naturels non nuls et inférieurs ou égaux à } 5\} &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0 \text{ et } n \leqslant 5\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 5\} \\
&= \mathbb{N}^* \cap \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \\
&= \{1; 2; 3; 4; 5\} \\
&= [\![1; 5]\!]
\end{aligned}$$

2. L'ensemble des entiers naturels plus petits que 45 et qui sont des carrés des entiers naturels s'écrit

$$\begin{aligned}
\left\{\substack{\text{entiers naturels plus petits que 45} \\ \text{et qui sont des carrés des entiers naturels}}\right\} &= \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \leqslant 45 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N},\ k^2 = n\right\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 45\} \cap \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N},\ k^2 = n\right\} \\
&= [\![0; 45]\!] \cap \left\{k^2 \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\} \\
&= [\![0; 45]\!] \cap \Big(\left\{0^2; 1^2; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2; 6^2\right\} \cup \left\{k^2 \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \setminus [\![0; 6]\!]\right\}\Big) \\
&= [\![0; 45]\!] \cap \Big(\{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36\} \cup \left\{k^2 \;\middle|\; k \in [\![7; +\infty[\![\right\}\Big) \\
&= \Big([\![0; 45]\!] \cap \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36\}\Big) \cup \Big([\![0; 45]\!] \cap \left\{k^2 \;\middle|\; k \in [\![7; +\infty[\![\right\}\Big) \\
&= \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36\} \cup \varnothing \\
&= \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36\}
\end{aligned}$$

3. L'ensemble des entiers naturels, diviseurs de 70 s'écrit

$$\begin{aligned}
\{\text{entiers naturels, diviseurs de } 70\} &= \{d \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ 70 = dk\} \\
&= \{d \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ 2 \times 5 \times 7 = dk\} \\
&= \left\{2^i \times 5^j \times 7^k \;\middle|\; i \in \{0; 1\}, j \in \{0; 1\}, k \in \{0; 1\}\right\} \\
&= \big\{2^0 \times 5^0 \times 7^0 \;;\; 2^1 \times 5^0 \times 7^0 \;;\; 2^0 \times 5^1 \times 7^0 \;;\; 2^1 \times 5^1 \times 7^0 \;; \\
&\qquad 2^0 \times 5^0 \times 7^1 \;;\; 2^1 \times 5^0 \times 7^1 \;;\; 2^0 \times 5^1 \times 7^1 \;;\; 2^1 \times 5^1 \times 7^1\big\} \\
&= \{1 \;;\; 2 \;;\; 5 \;;\; 2 \times 5 \;;\; 7 \;;\; 2 \times 7 \;;\; 5 \times 7 \;;\; 2 \times 5 \times 7\} \\
&= \{1 \;;\; 2 \;;\; 5 \;;\; 7 \;;\; 10 \;;\; 14 \;;\; 35 \;;\; 70\}
\end{aligned}$$

4. L'ensemble des réels non nuls dont le carré est inférieur ou égal à 36 s'écrit

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}\text{réels non nuls dont le carré}\\ \text{est inférieur ou égal à 36}\end{matrix}\right\} &= \left\{x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; x^2 \leqslant 36\right\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; x^2 - 6^2 \leqslant 0\right\}\\
&= \{x \in \mathbb{R}^* \mid (x-6)(x+6) \leqslant 0\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; \begin{matrix}\left(x-6 \geqslant 0 \;\text{ et }\; x+6 \leqslant 0\right)\\ \text{ou } \left(x-6 \leqslant 0 \;\text{ et }\; x+6 \geqslant 0\right)\end{matrix}\right\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; x-6 \geqslant 0 \;\text{ et }\; x+6 \leqslant 0\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; x-6 \leqslant 0 \;\text{ et }\; x+6 \geqslant 0\right\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; x \geqslant 6 \;\text{ et }\; x \leqslant -6\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; x \leqslant 6 \;\text{ et }\; x \geqslant -6\right\}\\
&= \varnothing \cup \left\{x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; -6 \leqslant x \leqslant 6\right\}\\
&= [-6;0[\cup]0;6]
\end{aligned}$$

Exercice 2. Comparer par l'inclusion ou l'égalité, les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
&A = \{1;2;3\} && B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x \leqslant 3\}\\
&C = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; (2x-1)\left(x^2-5x+6\right) = 0\right\} && D = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; (x-1)\left(x^2-5x+6\right) = 0\right\}\\
&E = \{3;2;2\} && F = \{3;2;1;2;1;3\}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.

Dans l'écriture par extension d'un ensemble, l'ordre des éléments est sans importance et la répétition d'éléments entre les accolades ne modifie pas l'ensemble. On a donc

$$\begin{aligned}
&A = \{1;2;3\} && B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x \leqslant 3\}\\
&C = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; (2x-1)\left(x^2-5x+6\right) = 0\right\} && D = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; (x-1)\left(x^2-5x+6\right) = 0\right\}\\
&E = \{2;3\} && F = \{1;2;3\}\\
&G = \{1;2;3\}
\end{aligned}$$

L'ensemble B peut être noté en extension :

$$\begin{aligned}
B &= \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x \leqslant 3\}\\
&= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \;\text{ et }\; 1 \leqslant x \leqslant 3\}\\
&= \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}\\
&= \{1;2;3\}
\end{aligned}$$

Pour l'ensemble C, il faut résoudre l'équation $(2x-1)\left(x^2-5x+6\right) = 0$ dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
& x \in C\\
\iff\; & (2x-1)\left(x^2-5x+6\right) = 0 \;\text{ et }\; x \in \mathbb{N}\\
\iff\; & \left(2x-1 = 0 \;\text{ ou }\; x^2-5x+6 = 0\right) \;\text{ et }\; x \in \mathbb{N}\\
\iff\; & \left(x = \frac{1}{2} \;\text{ et }\; x \in \mathbb{N}\right)\\
& \quad \text{ou } \left(x^2-5x+6 = 0 \;\text{ et }\; x \in \mathbb{N}\right)\\
\iff\; & x \in \varnothing \;\text{ ou }\; \left(x^2-5x+6 = 0 \;\text{ et }\; x \in \mathbb{N}\right)\\
\iff\; & x^2-5x+6 = 0 \;\text{ et }\; x \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Déterminons le discriminant Δ du polynôme x^2-5x+6 :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$$

$$= 1$$

Donc $\Delta > 0$ et le polynôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1}$$
$$= 2 \qquad\qquad\qquad\qquad = 3$$

Ainsi, la forme factorisé de l'équation est

$$(x-2)(x-3) = 0$$

On a donc

$$\begin{aligned} x \in C &\iff (x-2=0 \ \text{ ou } \ x-3=0) \ \text{ et } \ x \in \mathbb{N} \\ &\iff (x=2 \ \text{ ou } \ x=3) \ \text{ et } \ x \in \mathbb{N} \\ &\iff x \in \{2;3\} \ \text{ et } \ x \in \mathbb{N} \\ &\iff x \in \{2;3\} \cap \mathbb{N} \\ &\iff x \in \{2;3\} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$C = \{2;3\}$$

On peut utiliser les résultats de l'ensemble C pour déterminer l'écriture en extension de l'ensemble D :

$$\begin{aligned} x \in D &\iff (x-1)\left(x^2-5x+6\right) = 0 \ \text{ et } \ x \in \mathbb{N} \\ &\iff \left(x-1=0 \ \text{ ou } \ x^2-5x+6=0\right) \ \text{ et } \ x \in \mathbb{N} \\ &\iff \left(x=1 \ \text{ et } \ x \in \mathbb{N}\right) \ \text{ ou } \ \left(x^2-5x+6=0 \ \text{ et } \ x \in \mathbb{N}\right) \\ &\iff x \in \{1\} \ \text{ ou } \ x \in \{2;3\} \\ &\iff x \in \{1;2;3\} \end{aligned}$$

On a

$$A = \{1;2;3\} \qquad B = \{1;2;3\} \qquad C = \{2;3\} \qquad D = \{1;2;3\}$$
$$E = \{2;3\} \qquad F = \{1;2;3\} \qquad G = \{1;2;3\}$$

Et finalement on compare par l'inclusion ou l'égalité les ensembles

$$C = E \subset A = B = D = F = G$$

Exercice 3. Soient $A =]-\infty;3]$, $B =]-2;7[$ et $C =]-5;+\infty[$ trois partie de $\mathbb{R}$. Déterminer

$$A \cap B \qquad A \cup B \qquad B \cap C \qquad B \cup C$$
$$\mathbb{R} \setminus A \qquad A \setminus B \qquad (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$$
$$\mathbb{R} \setminus (A \cup B) \qquad (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cap (B \cup C)$$

Correction de l'exercice 3.

$$\begin{aligned} A\cap B &=]-\infty;3]\cap]-2;7[\\ &= \{x\in\mathbb{R}\mid -\infty<x\leqslant 3\}\cap\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x<7\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}\mid -\infty<x\leqslant 3 \ \text{ et } \ -2<x<7\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}\mid -2<x\leqslant 3\} \\ &=]-2;3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\cup B &=]-\infty;3]\cup]-2;7[\\ &= \{x\in\mathbb{R}\mid -\infty<x\leqslant 3 \ \text{ ou } \ -2<x<7\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}\mid -\infty<x<7\} \\ &=]-\infty;7[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B\cap C &=]-2;7[\cap]-5;+\infty[\\ &=]-2;7[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B\cup C &=]-2;7[\cup]-5;+\infty[\\ &=]-5;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\setminus A &= \{x\mid x\in\mathbb{R} \ \text{ et } \ x\notin]-\infty;3]\} \\ &= \{x\mid x\in\mathbb{R}\}\cap\{x\mid x\notin]-\infty;3]\} \\ &=]-\infty;+\infty[\cap\{x\mid x\in]3;+\infty[\} \\ &=]-\infty;+\infty[\cap]3;+\infty[\\ &=]3;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\setminus B &=]-\infty;3]\setminus]-2;7[\\ &=]-\infty;-2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}\setminus A)\cap(\mathbb{R}\setminus B) &=]3;+\infty[\cap\Big(\mathbb{R}\setminus]-2;7[\Big) \\ &=]3;+\infty]\cap\Big(]-\infty;-2]\cup[7;+\infty[\Big) \\ &= \Big(]3;+\infty]\cap]-\infty;-2]\Big)\cup\Big(]3;+\infty]\cap[7;+\infty[\Big) \\ &= \varnothing\cup\Big(]3;+\infty]\cap[7;+\infty[\Big) \\ &=]3;+\infty]\cap[7;+\infty[\\ &= [7;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\setminus(A\cup B) &= \mathbb{R}\setminus]-\infty;7[\\ &= [7;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A\cap B)\cup(A\cap C) &=]-2;3]\cup\Big(]-\infty;3]\cap]-5;+\infty[\Big) \\ &=]-2;3]\cup]-5;3] \\ &=]-5;3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &=]-\infty;3]\cap]-5;+\infty[\\ &=]-5:3] \end{aligned}$$

Exercice 4. Justifier les énoncés suivants.

1. Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.
2. Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est dans $\complement_E A$ ou $\complement_E B$.

Correction de l'exercice 4.

1. Supposons que $A \subset B$. On a

$$\begin{aligned} x \in \complement_E B &\implies x \in \{y \in E \mid y \notin B\} \\ &\implies x \in \{y \in E \mid y \notin A \subset B\} \\ &\implies x \in \{y \in E \mid y \notin A\} \\ &\implies x \in \complement_E A \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\complement_E B \subset \complement_E A$$

2. Supposons que $A \cap B = \varnothing$. On a

$$\begin{aligned} x \in E &\implies x \in A \quad \text{ou} \quad x \in \complement_E A \\ &\implies x \in A \cap E \quad \text{ou} \quad x \in \complement_E A \\ &\implies x \in A \cap \big(B \cup \complement_E B\big) \quad \text{ou} \quad x \in \complement_E A \\ &\implies x \in (A \cap B) \cup \big(A \cap \complement_E B\big) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou} \quad x \in \complement_E A \\ &\implies x \in \varnothing \cup \big(A \cap \complement_E B\big) \quad \text{ou} \quad x \in \complement_E A \\ &\implies x \in A \cap \complement_E B \quad \text{ou} \quad x \in \complement_E A \\ &\implies x \in \big(A \cap \complement_E B\big) \cup \complement_E A \\ &\implies x \in \big(A \cup \complement_E A\big) \cap \big(\complement_E B \cup \complement_E A\big) \\ &\implies x \in E \cap \big(\complement_E B \cup \complement_E A\big) \\ &\implies x \in \complement_E B \cup \complement_E A \\ &\implies x \in \complement_E B \quad \text{ou} \quad x \in \complement_E A \end{aligned}$$

Donc tout élément de E est dans $\complement_E A$ ou $\complement_E B$.

Exercice 5. Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants :

$$\complement_E \left(\complement_E A\right) \qquad A \cap \complement_E A \qquad A \cup \complement_E A \qquad \complement_E \varnothing \qquad \complement_E E$$

Correction de l'exercice 5.

$$\begin{aligned} \complement_E \left(\complement_E A\right) &= \left\{x \in E \;\middle|\; x \notin \complement_E A\right\} \\ &= \{x \in E \mid x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap \complement_E A &= \{x \in E \mid x \in A\} \cap \{x \in E \mid x \notin A\} \\ &= \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \notin A\} \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup \complement_E A &= \{x \in E \mid x \in A\} \cup \{x \in E \mid x \notin A\} \\ &= \{x \in E \mid x \in A \quad \text{ou} \quad x \notin A\} \\ &= E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \complement_E \varnothing &= \{x \in E \mid x \notin \varnothing\} \\ &= \{x \mid x \in E \quad \text{et} \quad x \notin \varnothing\} \\ &= E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \complement_E E &= \{x \in E \mid x \notin E\} \\ &= \{x \mid x \in E \quad \text{et} \quad x \notin E\} \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

Exercice 6. Soit t un réel positif. L'inclusion suivante est-elle vraie ?

$$\left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y \geqslant t\right\} \subset \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqslant \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant \frac{t}{2}\right\}$$

Correction de l'exercice 6.

Soit $(a;b) \in \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y \geqslant t\right\}$. On a

$$\begin{aligned}
a+b \geqslant t &\implies a+b \geqslant t \quad \text{et} \quad (a \geqslant b \quad \text{ou} \quad b \geqslant a) \\
&\implies (a+b \geqslant t \quad \text{et} \quad a \geqslant b) \quad \text{ou} \quad (a+b \geqslant t \quad \text{et} \quad b \geqslant a) \\
&\implies a+a \geqslant a+b \geqslant t \quad \text{ou} \quad b+b \geqslant a+b \geqslant t \quad \text{et} \quad b \geqslant a \\
&\implies a+a \geqslant t \quad \text{ou} \quad b+b \geqslant t \\
&\implies 2a \geqslant t \quad \text{ou} \quad 2b \geqslant t \\
&\implies a \geqslant \frac{t}{2} \quad \text{ou} \quad b \geqslant \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(a;b) \in \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y \geqslant t\right\} &\implies (a;b) \in \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqslant \frac{t}{2} \quad \text{ou} \quad y \geqslant \frac{t}{2}\right\} \\
&\implies (a;b) \in \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqslant \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant \frac{t}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Donc l'inclusion est vraie.

Exercice 7. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

1. $A \subset B$ **2.** $A \cap B = A$ **3.** $A \cup B = B$ **4.** $A \setminus B = \varnothing$

Correction de l'exercice 7.

Soit E un ensemble tel que $A \subset E$ et $B \subset E$.

1. $\implies$ **2.** Supposons que $A \subset B$.

$$\begin{aligned}
x \in A &\implies x \in A \quad \text{et} \quad x \in A \subset B \\
&\implies x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \\
&\implies x \in A \cap B
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x \in A \cap B &\implies x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \\
&\implies x \in A
\end{aligned}$$

Donc $A \subset A \cap B$ et $A \cap B \subset A$ d'où $A \cap B = A$.

2. $\implies$ **3.** Supposons que $A \cap B = A$.

$$\begin{aligned}
x \in B &\implies x \in B \quad \text{ou} \quad x \in A \\
&\implies x \in A \cup B
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x \in A \cup B &\implies x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \\
&\implies x \in A \cap B \quad \text{ou} \quad x \in B \\
&\implies x \in (A \cap B) \cup B \\
&\implies x \in (A \cup B) \cap (B \cup B) \\
&\implies x \in A \cup B \quad \text{et} \quad x \in B \\
&\implies x \in B
\end{aligned}$$

Donc $B \subset A \cup B$ et $A \cup B \subset B$ d'où $A \cup B = B$.

3. $\implies$ **4.** Supposons que $A \cup B = B$.

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\implies x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\implies x \in A \text{ et } x \notin A \cup B \\ &\implies x \in A \text{ et } x \in \complement_E (A \cup B) \\ &\implies x \in A \text{ et } x \in \complement_E A \cap \complement_E B \\ &\implies x \in A \text{ et } x \in \complement_E A \text{ et } x \in \complement_E B \\ &\implies x \in \varnothing \text{ et } x \in \complement_E B \\ &\implies x \in \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \varnothing &\implies x \in \varnothing \subset A \setminus B \\ &\implies x \in A \setminus B \end{aligned}$$

Donc $A \setminus B \subset \varnothing$ et $\varnothing \subset A \setminus B$ d'où $A \setminus B = \varnothing$

4. $\implies$ **1.** Supposons que $A \setminus B = \varnothing$

$$\begin{aligned} & x \in A \\ \implies & x \in A \text{ et } x \in E \\ \implies & x \in A \text{ et } x \in B \cup \complement_E B \\ \implies & x \in A \text{ et } \big(x \in B \text{ ou } x \in \complement_E B\big) \\ \implies & x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \notin B) \\ \implies & (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \notin B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies & x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \setminus B \\ \implies & x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \\ \implies & x \in (A \cap B) \cup \varnothing \\ \implies & x \in (A \cap B) \\ \implies & x \in A \text{ et } x \in B \\ \implies & x \in B \end{aligned}$$

On a montré que **1.** $\implies$ **2.** $\implies$ **3.** $\implies$ **4.** $\implies$ **1.** donc il y a équivalence entre les propositions.

Exercice 8. Montrer les énoncés suivants :

1. $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.
3. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Correction de l'exercice 8.

1. Montrons par double inclusions que $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.

Commençons par $A \setminus B \subset (A \cup B) \setminus B$.

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\implies x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\implies (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin B \\ &\implies x \in A \cup B \text{ et } x \notin B \\ &\implies x \in (A \cup B) \setminus B \end{aligned}$$

Donc $A \setminus B \subset (A \cup B) \setminus B$.

Montrons que $(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus B$.

$$\begin{aligned} & x \in (A \cup B) \setminus B \\ \implies & x \in A \cup B \text{ et } x \notin B \\ \implies & (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin B \\ \implies & (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin B) \\ \implies & x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus B \\ \implies & x \in A \setminus B \text{ ou } x \in \varnothing \\ \implies & x \in (A \setminus B) \cup \varnothing \\ \implies & x \in A \setminus B \end{aligned}$$

Donc $(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus B$.

Commme $A \setminus B \subset (A \cup B) \setminus B$ et $(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus B$ on en déduit que $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.

Montrons par double inclusions que $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Commençons par $(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus (A \cap B)$.

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus B \\
\Longrightarrow\ & x \in A \cup B \ \text{ et } \ x \notin B \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \ \text{ ou } \ x \in B) \ \text{ et } \ x \notin B \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \ \text{ ou } \ (x \in B \ \text{ et } \ x \notin B) \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \ \text{ ou } \ x \in \varnothing \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \ \text{ ou } \ (x \in A \ \text{ et } \ x \notin A) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ (x \notin B \ \text{ ou } \ x \notin A) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ (\neg(x \in B) \ \text{ ou } \ \neg(x \in A)) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in B \ \text{ et } \ x \in A) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in A \cap B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ x \notin A \cap B \\
\Longrightarrow\ & x \in A \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

Donc $(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus (A \cap B)$.

Montrons que $A \setminus (A \cap B) \subset (A \cup B) \setminus B$.

$$\begin{aligned}
& x \in A \setminus (A \cap B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ x \notin A \cap B \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in A \cap B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in A \ \text{ et } \ x \in B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ (\neg(x \in A) \ \text{ ou } \ \neg(x \in B)) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ (x \notin A \ \text{ ou } \ x \notin B) \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \ \text{ et } \ x \notin A) \ \text{ ou } \ (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \\
\Longrightarrow\ & x \in \varnothing \ \text{ ou } \ (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \\
\Longrightarrow\ & (x \in B \ \text{ et } \ x \notin B) \ \text{ ou } \ (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \\
\Longrightarrow\ & (x \in B \ \text{ ou } \ x \in A) \ \text{ et } \ x \notin B \\
\Longrightarrow\ & x \in A \cup B \ \text{ et } \ x \notin B \\
\Longrightarrow\ & x \in (A \cup B) \setminus B
\end{aligned}$$

Donc $A \setminus (A \cap B) \subset (A \cup B) \setminus B$.

On en déduit que $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Finalement par transitivité de l'égalité on a $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

2. Montrons par double inclusions que $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

Commençons par $A \cap B \subset A \setminus (A \setminus B)$.

$$\begin{aligned}
x \in A \cap B \Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ x \in B \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ (x \notin A \ \text{ ou } \ x \in B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in A \setminus B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ x \notin A \setminus B \\
\Longrightarrow\ & x \in A \setminus (A \setminus B)
\end{aligned}$$

Donc $A \cap B \subset A \setminus A \setminus B$

Montrons que $A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B$.

$$\begin{aligned}
& x \in A \setminus (A \setminus B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ x \notin A \setminus B \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in A \setminus B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ (x \notin A \ \text{ ou } \ x \in B) \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \ \text{ et } \ x \notin A) \ \text{ ou } \ (x \in A \ \text{ et } \ x \in B) \\
\Longrightarrow\ & x \in \varnothing \ \text{ ou } \ x \in A \cap B \\
\Longrightarrow\ & x \in \varnothing \cup (A \cap B) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \cap B
\end{aligned}$$

Donc $A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B$.

On en déduit que $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

3. Montrons par double inclusions que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Commençons par $A \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned}
& x \in A \setminus (B \setminus C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ x \notin (B \setminus C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in (B \setminus C)) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in B \ \text{ et } \ x \notin C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ (x \notin B \ \text{ ou } \ x \in C) \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \ \text{ ou } \ (x \in A \ \text{ et } \ x \in C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \setminus B \ \text{ ou } \ x \in A \cap C \\
\Longrightarrow\ & x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Donc $A \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Montrons que $(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subset A \setminus (B \setminus C)$.

$$\begin{aligned}
& x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \setminus B \ \text{ ou } \ x \in A \cap C \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \ \text{ ou } \ (x \in A \ \text{ et } \ x \in C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ (x \notin B \ \text{ ou } \ x \in C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in B \ \text{ et } \ x \notin C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ \neg(x \in B \setminus C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \ \text{ et } \ x \notin B \setminus C \\
\Longrightarrow\ & x \in A \setminus (B \setminus C)
\end{aligned}$$

Donc $(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subset A \setminus (B \setminus C)$.

On en déduit que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 9. Est-ce que les énoncés suivants sont corrects. Si oui donnez un argument pour les justifier, sinon trouver des exemples qui montrent qu'ils sont faux :

1. $A \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$

2. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

3. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

4. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

5. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

6. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

7. $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$

Correction de l'exercice 9.

1. Soient $A = [0;4]$ et $B = [2;6]$ On a :

$$\begin{aligned}
A \setminus (B \setminus A) &= [0;4] \setminus \Big([2;6] \setminus [0;4]\Big) \\
&= [0;4] \setminus]4;6] \\
&= [0;4]
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
A \setminus B &= [0;4] \setminus [2;6] \\
&= [0;4] \setminus [2;6] \\
&= [0;2[
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
A \setminus B &= [0;4] \setminus [2;6] \\
&= [0;4] \setminus [2;6] \\
&= [0;2[
\end{aligned}$$

Or $[0;4] \neq [0;2[$ donc $A \setminus (B \setminus A) \neq A \setminus B$.

2. Montrons que $A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \setminus C) &\Longrightarrow x \in A \ \text{ et } \ x \in (B \setminus C) \\
&\Longrightarrow x \in A \ \text{ et } \ (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
&\Longrightarrow x \in A \ \text{ et } \ x \in B \ \text{ et } \ x \notin C \\
&\Longrightarrow x \in A \cap B \ \text{ et } \ x \notin C \\
&\Longrightarrow x \in A \cap B \ \text{ et } \ x \notin A \cap C \\
&\Longrightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)
\end{aligned}$$

Donc $A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Montrons que $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subset A \cap (B \setminus C)$.

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \cap B \quad \text{et} \quad x \notin A \cap C \\
\Longrightarrow\ & x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \quad \text{et} \quad (x \notin A \quad \text{ou} \quad x \notin C) \\
\Longrightarrow\ & (x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \quad \text{et} \quad x \notin A) \quad \text{ou} \quad (x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \quad \text{et} \quad x \notin C) \\
\Longrightarrow\ & (x \in \varnothing) \quad \text{ou} \quad (x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \quad \text{et} \quad x \notin C) \\
\Longrightarrow\ & x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \quad \text{et} \quad x \notin C \\
\Longrightarrow\ & x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \setminus C \\
\Longrightarrow\ & x \in A \cap (B \setminus C)
\end{aligned}$$

Donc $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subset A \cap (B \setminus C)$.

3. Soient $A = [0;3]$, $B = [2;5]$ et $C = [1;4]$. On a :

$$\begin{aligned}
A \cup (B \setminus C) &= [0;3] \cup \Big([2;5] \setminus [1;4]\Big) \\
&= [0;3] \cup \,]4;5]
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(A \cup B) \setminus (A \cup C) &= \Big([0;3] \cup [2;5]\Big) \setminus \Big([0;3] \cup [1;4]\Big) \\
&= [0;5] \setminus [0;4] \\
&= \,]4;5]
\end{aligned}$$

Or $[0;3] \cup \,]4;5] \neq \,]4;5]$ donc $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

4. Soient $A = [0;3]$, $B = [0;2]$, $C = [2;5]$ et $D = [1;7]$. On a :

$$\begin{aligned}
& (A \times B) \cup (C \times D) \\
=\ & \Big([0;3] \times [0;2]\Big) \cup \Big([2;5] \times [1;7]\Big)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& (A \cup C) \times (B \cup D) \\
=\ & \Big([0;3] \cup [2;5]\Big) \times \Big([0;2] \cup [1;7]\Big) \\
=\ & [0;5] \times [0;7]
\end{aligned}$$

On remarque que $(0;7) \in [0;5] \times [0;7]$ donc $(0;7) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Mais $(0;7) \notin [0;3] \times [0;2]$ et $(0;7) \notin [2;5] \times [1;7]$

donc $(0;7) \notin \Big([0;3] \times [0;2]\Big) \cup \Big([2;5] \times [1;7]\Big)$ donc $(0;7) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$.

On en déduit que $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

5. Montrons directement par équivalence que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

$$\begin{aligned}
x \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff x \in A \times B \quad \text{et} \quad x \in C \times D \\
&\iff x \in \{(a;b) \mid a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\} \quad \text{et} \quad x \in \{(a;b) \mid a \in C \quad \text{et} \quad b \in D\} \\
&\iff x \in \{(a;b) \mid a \in A \quad \text{et} \quad b \in B \quad \text{et} \quad a \in C \quad \text{et} \quad b \in D\} \\
&\iff x \in \{(a;b) \mid a \in A \quad \text{et} \quad a \in C \quad \text{et} \quad b \in B \quad \text{et} \quad b \in D\} \\
&\iff x \in \{(a;b) \mid a \in A \cap C \quad \text{et} \quad b \in B \cap D\} \\
&\iff x \in (A \cap C) \times (B \cap D)
\end{aligned}$$

Donc $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

6. Montrons par double inclusions que $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

$$\begin{aligned} x \in A \times (B \setminus C) &\implies x \in \{(a;b) \mid a \in A \text{ et } b \in B \setminus C\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid a \in A \text{ et } b \in B \text{ et } b \notin C\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid a \in A \text{ et } b \in B \text{ et } (b \notin C \text{ ou } a \notin A)\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\} \text{ et } x \in \{(a;b) \mid b \notin C \text{ ou } a \notin A\} \\ &\implies x \in A \times B \text{ et } x \in \{(a;b) \mid \neg(b \in C \text{ et } a \in A)\} \\ &\implies x \in A \times B \text{ et } x \notin \{(a;b) \mid b \in C \text{ et } a \in A\} \\ &\implies x \in A \times B \text{ et } x \notin A \times C \\ &\implies x \in (A \times B) \setminus (A \times C) \end{aligned}$$

Donc $A \times (B \setminus C) \subset (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Montrons que $(A \times B) \setminus (A \times C) \subset A \times (B \setminus C)$.

$$\begin{aligned} x \in (A \times B) \setminus (A \times C) &\implies x \in A \times B \text{ et } x \notin A \times C \\ &\implies x \in A \times B \text{ et } x \notin \{(a;b) \mid b \in C \text{ et } a \in A\} \\ &\implies x \in A \times B \text{ et } x \in \{(a;b) \mid \neg(b \in C \text{ et } a \in A)\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\} \text{ et } x \in \{(a;b) \mid b \notin C \text{ ou } a \notin A\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid a \in A \text{ et } b \in B \text{ et } (b \notin C \text{ ou } a \notin A)\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid (a \in A \text{ et } b \in B \text{ et } b \notin C) \text{ ou } (a \in A \text{ et } b \in B \text{ et } a \notin A)\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid (a \in A \text{ et } b \in B \text{ et } b \notin C) \text{ ou } (a \in \varnothing \text{ et } b \in B)\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid a \in A \text{ et } b \in B \text{ et } b \notin C\} \cup \{(a;b) \mid (a \in \varnothing \text{ et } b \in B)\} \\ &\implies x \in \{(a;b) \mid a \in A \text{ et } b \in B \setminus C\} \cup (\varnothing \times B) \\ &\implies x \in A \times (B \setminus C) \cup \varnothing \\ &\implies x \in A \times (B \setminus C) \end{aligned}$$

Donc $(A \times B) \setminus (A \times C) \subset A \times (B \setminus C)$.

Finalement on a montré que $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

7. Soient $A = [0;4]$, $B = [0;3]$, $C = [2;6]$ et $D = [1;3]$. On a d'une part

$$\begin{aligned} (A \times B) \setminus (C \times D) &= \Big([0;4] \times [0;3]\Big) \setminus \Big([2;6] \times [1;3]\Big) \\ &= \{(x;y) \mid x \in [0;4] \text{ et } y \in [0;3]\} \setminus \Big([2;6] \times [1;3]\Big) \\ &= \{(x;y) \mid x \in [0;4] \cup [0;2[\text{ et } y \in [0;3] \cup [0;1[\} \setminus \Big([2;6] \times [1;3]\Big) \\ &= \{(x;y) \mid (x \in [0;4] \text{ ou } x \in [0;2[) \text{ et } (y \in [0;3] \text{ ou } y \in [0;1[)\} \setminus \Big([2;6] \times [1;3]\Big) \\ &= \{(x;y) \mid (x \in [0;4] \text{ et } y \in [0;1[) \text{ ou } (x \in [0;2[\text{ et } y \in [0;3]) \text{ ou } (x \in [0;4] \\ &\qquad \text{et } y \in [0;3]) \text{ ou } (x \in [0;2[\text{ et } y \in [0;1[)\} \setminus \Big([2;6] \times [1;3]\Big) \\ &= \Big(([0;4] \times [0;1[) \cup ([0;2[\times [0;3]) \cup ([0;4] \times [0;3]) \cup ([0;2[\times [0;1[) \Big) \setminus \Big([2;6] \times [1;3]\Big) \\ &= \Big(([0;4] \times [0;1[) \cup ([0;2[\times [0;3]) \cup ([0;4] \times [0;3]) \Big) \setminus \Big([2;6] \times [1;3]\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(([0;4] \times [0;1[) \setminus ([2;6] \times [1;3])\Big) \cup \Big(([0;2[\times [0;3]) \setminus ([2;6] \times [1;3])\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup \Big(([0;4] \times [0;3]) \setminus ([2;6] \times [1;3])\Big) \\
&= \Big([0;4] \times [0;1[\Big) \cup \Big([0;2[\times [0;3]\Big) \cup \Big(([0;4] \times [0;3]) \setminus ([2;6] \times [1;3])\Big)
\end{aligned}
$$

et d'autre part

$$
\begin{aligned}
(A \setminus C) \times (B \setminus D) &= \Big([0;4] \setminus [2;6]\Big) \times \Big([0;3] \setminus [1;3]\Big) \\
&= [0;2[\times [0;1[
\end{aligned}
$$

On remarque que $(0;3) \in \Big([0;2[\times [0;3]\Big)$ donc $(0;3) \in (A \times B) \setminus (C \times D)$.

Mais $(0;3) \notin [0;2[\times [0;1[$ donc $(0;3) \notin (A \setminus C) \times (B \setminus D)$.

On en conclue que $(A \times B) \setminus (C \times D) \neq (A \setminus C) \times (B \setminus D)$.

Exercice 10. Est-ce que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ peuvent s'écrire comme le produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$?

1. $\{(x;y) \mid x \text{ est un entier }\}$ **2.** $\{(x;y) \mid 0 < y \leqslant 1\}$ **3.** $\{(x;y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

Correction de l'exercice 10.

1. $\{(x;y) \mid x \text{ est un entier }\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

2. $\{(x;y) \mid 0 < y \leqslant 1\} = \mathbb{R} \times]0;1]$

3. Posons $D = \{(x;y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ et supposons qu'il existe deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $D = A \times B$. On a :

$$
\begin{aligned}
(0;1) \in D \ \text{ et } \ (1;0) \in D &\implies (0;1) \in A \times B \ \text{ et } \ (1;0) \in A \times B \\
&\implies 0 \in A \ \text{ et } \ 1 \in B \ \text{ et } \ 1 \in A \ \text{ et } \ 0 \in B \\
&\implies 1 \in A \ \text{ et } \ 1 \in B \\
&\implies (1;1) \in A \times B \\
&\implies (1;1) \in D
\end{aligned}
$$

Or $1^2 + 1^2 = 2 > 1$ donc $(1;1) \notin D$. Donc l'hypothèse de départ est fausse : il n'existe pas deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $D = A \times B$.

Exercice 11. On considère les ensembles

$$
E = \left\{ x \in [0;1] \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{n+1} \right\} \qquad\qquad F = \left\{ x \in [0;1] \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{n+1} \right\}
$$

1. L'ensemble E a-t-il un, une infinité ou aucun élément ?

2. L'ensemble F a-t-il un, une infinité ou aucun élément ?

Correction de l'exercice 11.

1. Soit $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[$. On a :

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2}$$

Donc

$$0 \leqslant x < \frac{1}{1+1}$$

En posant $n = 1$ on a

$$0 \leqslant x < \frac{1}{n+1}$$

Donc il existe un entier naturel n tel que $x < \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\left[0; \frac{1}{2}\right[\subset E$. Comme $\left[0; \frac{1}{2}\right[$ possède une infinité d'éléments, on en déduit que E possède une infinité d'éléments.

2. Soit $x \in]0; 1]$ tel que $x \notin F$. Donc

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad x \geqslant \frac{1}{n+1}$$

Autrement dit

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant \frac{1}{x}$$

En posant $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$ on a bien $n \geqslant \frac{1}{x}$ pour $x \in]0; 1]$. Donc tous les éléments de $]0; 1]$ ne sont pas dans F.

Ainsi F possède soit un élémenent qui est 0, soit aucun élement.

Soient $x = 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} n \geqslant 0 &\implies n+1 > 0 \\ &\implies \frac{1}{n+1} > 0 \\ &\implies \frac{1}{n+1} > x \end{aligned}$$

Donc $0 \in F$.

Finalement on a montrer par disjonction de cas que F possède un élement.

TD n° 3

Applications

Exercice 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2.

1. Déterminer l'image direct par f des parties suivantes :

(a) $]-2;3[$ (b) $]-\infty;0[$ (c) $[-6;1]$

2. Déterminer l'image réciproque par f des parties suivantes :

(a) $]-5;9[$ (b) $\left]-7;-\sqrt{2}\right[$ (c) $]0;+\infty[$

Correction de l'exercice 1.

1. (a) Déterminons l'image direct par f de $]-2;3[$

$$\begin{aligned}
f\left(]-2;3[\right) &= f\left(]-2;0]\cup[0;3[\right)\\
&= \{f(x) \mid x\in\,]-2;0] \quad \text{ou} \quad x\in[0;3[\}\\
&= \{f(x) \mid -2<x\leqslant 0 \quad \text{ou} \quad 0\leqslant x<3\}\\
&= \{f(x) \mid -2<x\leqslant 0\}\cup\{f(x) \mid 0\leqslant x<3\} \qquad \overset{\text{(remarque)}}{=} f\left(]-2;0]\right)\cup f\left([0;3[\right)\\
&= \{f(x) \mid f(-2)>f(x)\geqslant f(0)\}\cup\{f(x) \mid f(0)\leqslant f(x)<f(3)\}\\
&= \{f(x) \mid 4>f(x)\geqslant 0\}\cup\{f(x) \mid 0\leqslant f(x)<9\}\\
&= [0;4[\cup[0;9[\\
&= [0;9[
\end{aligned}$$

(b) Déterminons l'image direct par f de $]-\infty;0[$

$$\begin{aligned}
f\left(]-\infty;0[\right) &= \{f(x) \mid x\in\,]-\infty;0[\}\\
&= \{f(x) \mid x<0\}\\
&= \{f(x) \mid f(x)>0\}\\
&=]0;+\infty[
\end{aligned}$$

(c) Déterminons l'image direct par f de $[-6;1]$

$$\begin{aligned}
f\left([-6;1]\right) &= f\left([-6;0]\cup[0;1]\right)\\
&= f\left([-6;0]\right)\cup f\left([0;1]\right)\\
&= \{f(x) \mid x\in[-6;0]\}\cup\{f(x) \mid x\in[0;1]\}\\
&= \{f(x) \mid -6\leqslant x\leqslant 0\}\cup\{f(x) \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}\\
&= \{f(x) \mid f(-6)\geqslant f(x)\geqslant f(0)\}\cup\{f(x) \mid f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)\}\\
&= \{f(x) \mid 36\geqslant f(x)\geqslant 0\}\cup\{f(x) \mid 0\leqslant f(x)\leqslant 1\}\\
&= [0;36]\cup[0;1]\\
&= [0;36]
\end{aligned}$$

2. (a) Déterminons l'image réciproque par f de $]-5;9[$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(]-5;9[) &= \{x \mid f(x) \in]-5;9[\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; -5 < x^2 < 0\right\} \cup \left\{x \;\middle|\; 0 \leqslant x^2 < 9\right\} \\
&= \varnothing \cup \{x \mid -3 < x \leqslant 0 \;\text{ ou }\; 0 \leqslant x < 3\} \\
&= \{x \mid -3 < x < 3\} \\
&=]-3;3[
\end{aligned}$$

(b) Déterminons l'image réciproque par f de $\left]-7;-\sqrt{2}\right[$

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\left]-7;-\sqrt{2}\right[\right) &= \left\{x \;\middle|\; f(x) \in \left]-7;-\sqrt{2}\right[\right\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; -7 < x^2 < -\sqrt{2} \;\text{ et }\; 0 \leqslant x^2\right\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; f(x) \in \left]-7;-\sqrt{2}\right[\cap [0;+\infty[\right\} \\
&= \{x \mid f(x) \in \varnothing\} \\
&= \{x \mid x \in \varnothing\} \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

(c) Déterminons l'image réciproque par f de $]0;+\infty[$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(]0;+\infty[) &= \{x \mid f(x) \in]0;+\infty[\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; 0 < x^2\right\} \\
&= \{x \mid x < 0 \;\text{ ou }\; 0 < x\} \\
&= \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\frac{1}{x^2}$. Déterminer les ensembles suivante :

1. $f(\mathbb{R}^*)$ **2.** $f(]0;1[)$ **3.** $f^{-1}(]0;1])$ **4.** $f^{-1}([-1;1])$

Correction de l'exercice 2.

1. Déterminons l'image direct par f de $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{R}^*) &= \{f(x) \mid x < 0 \;\text{ ou }\; 0 < x\} \\
&= \left\{f(x) \;\middle|\; x^2 > 0 \;\text{ ou }\; 0 < x^2\right\} \\
&= \left\{f(x) \;\middle|\; 0 < x^2\right\} \\
&= \left\{f(x) \;\middle|\; 0 < \frac{1}{x^2}\right\} \\
&= \{f(x) \mid 0 < f(x)\} \\
&= \mathbb{R}_+^*
\end{aligned}$$

2. Déterminons l'image direct par f de $]0;1[$

$$\begin{aligned}
f(]0;1[) &= \{f(x) \mid 0 < x < 1\} \\
&= \left\{f(x) \;\middle|\; 0^2 < x^2 < 1^2\right\} \\
&= \left\{f(x) \;\middle|\; 0 < x^2 < 1\right\} \\
&= \left\{f(x) \;\middle|\; 0 < x^2 \;\text{ et }\; x^2 < 1\right\} \\
&= \left\{f(x) \;\middle|\; 0 < \frac{1}{x^2} \;\text{ et }\; \frac{1}{x^2} > \frac{1}{1}\right\} \\
&= \{f(x) \mid 0 < f(x) \;\text{ et }\; f(x) > 1\} \\
&= \{f(x) \mid 0 < f(x)\} \cap \{f(x) \mid f(x) > 1\} \\
&= \mathbb{R}_+^* \cap]1;+\infty[\\
&=]1;+\infty[
\end{aligned}$$

3. Déterminons l'image réciproque par f de $]0;1]$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(]0;1]) &= \{x \mid 0 < f(x) \leqslant 1\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; 0 < \frac{1}{x^2} \leqslant 1\right\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; 0 < \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \leqslant 1\right\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; 0 < x^2 \quad \text{et} \quad x^2 \geqslant \frac{1}{1}\right\} \\
&= \left\{x \mid 0 < x^2 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant x^2\right\} \\
&= \left\{x \mid 0 < x^2\right\} \cap \left\{x \mid 1 \leqslant x^2\right\} \\
&= \mathbb{R}^* \cap (]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[) \\
&=]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[
\end{aligned}$$

4. Déterminons l'image réciproque par f de $[-1;1]$

$$\begin{aligned}
f^{-1}([-1;1]) &= \{x \mid -1 \leqslant f(x) \leqslant 1\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; -1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1\right\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; -1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{x^2}\right\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; 0 < \frac{1}{x^2} \leqslant 1\right\} \\
&= \left\{x \;\middle|\; 0 < \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \leqslant 1\right\} \\
&= \left\{x \mid 0 < x^2 \quad \text{et} \quad x^2 \geqslant 1\right\} \\
&= \{x \mid (x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x) \\
&\qquad \text{et} \quad (x \leqslant -1 \quad \text{ou} \quad 1 \leqslant x)\} \\
&= \mathbb{R}^* \cap (]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[) \\
&=]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[
\end{aligned}$$

Exercice 3. Soient $f\colon A \to B$ une fonction, $A_0 \subset A$, $A_1 \subset A$, $B_0 \subset B$ et $B_1 \subset B$. Montrer les énoncés suivants :

1. Si $B_0 \subset B_1$, alors $f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$

2. $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$

3. $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$

4. $f^{-1}(B_0 \setminus B_1) = f^{-1}(B_0) \setminus f^{-1}(B_1)$

5. Si $A_0 \subset A_1$, alors $f(A_0) \subset f(A_1)$

6. $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$

7. $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Correction de l'exercice 3.

1. Soit $B_0 \subset B_1$. On a

$$\begin{aligned}
x_0 \in f^{-1}(B_0) &\implies x_0 \in \{x \mid f(x) \in B_0\} \\
&\implies x_0 \in \{x \mid f(x) \in B_0 \subset B_1\} \\
&\implies x_0 \in \{x \mid f(x) \in B_1\} \\
&\implies x_0 \in f^{-1}(B_1)
\end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$.

2. Montrons que $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(B_0 \cup B_1) &= \{x \mid f(x) \in B_0 \cup B_1\} \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0 \quad \text{ou} \quad f(x) \in B_1\} \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0\} \\
&\qquad \cup \{x \mid f(x) \in B_1\} \\
&= f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)
\end{aligned}$$

3. Montrons que $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(B_0 \cap B_1) \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0 \cap B_1\} \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0 \quad \text{et} \quad f(x) \in B_1\} \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0\} \cap \{x \mid f(x) \in B_1\} \\
&= f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)
\end{aligned}$$

4. Montrons que $f^{-1}(B_0 \setminus B_1) = f^{-1}(B_0) \setminus f^{-1}(B_1)$

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(B_0 \setminus B_1) \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0 \setminus B_1\} \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0 \quad \text{et} \quad f(x) \notin B_1\} \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0\} \cap \{x \mid f(x) \notin B_1\} \\
&= \{x \mid f(x) \in B_0\} \setminus \{x \mid f(x) \in B_1\} \\
&= f^{-1}(B_0) \setminus f^{-1}(B_1)
\end{aligned}$$

5. Soit $A_0 \subset A_1$. On a

$$\begin{aligned} y \in f(A_0) &\implies y \in \{f(x) \mid x \in A_0\} \\ &\implies y \in \{f(x) \mid x \in A_0 \subset A_1\} \\ &\implies y \in \{f(x) \mid x \in A_1\} \\ &\implies y \in f(A_1) \end{aligned}$$

Donc $f(A_0) \subset f(A_1)$.

6. Montrons que $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$

$$\begin{aligned} f(A_0 \cup A_1) &= \{f(x) \mid x \in A_0 \cup A_1\} \\ &= \{f(x) \mid x \in A_0 \quad \text{ou} \quad x \in A_1\} \\ &= \{f(x) \mid x \in A_0\} \cup \{f(x) \mid x \in A_1\} \\ &= f(A_0) \cup f(A_1) \end{aligned}$$

7. Montrons que $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$

$$\begin{aligned} & y \in f(A_0 \cap A_1) \\ \implies & y \in \{f(x) \mid x \in A_0 \cap A_1\} \\ \implies & y \in \{f(x) \mid x \in A_0 \quad \text{et} \quad x \in A_1\} \\ \implies & y \in \{f(x) \mid f(x) \in f(A_0) \ \text{ et } f(x) \in f(A_1)\} \\ \implies & y \in \{f(x) \mid f(x) \in f(A_0)\} \\ & \qquad \cap \{f(x) \mid f(x) \in f(A_1)\} \\ \implies & y \in f(A_0) \cap f(A_1) \end{aligned}$$

Donc $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$.

Autre méthode :

$$A_0 \cap A_1 \subset A_0 \qquad \text{et} \qquad A_0 \cap A_1 \subset A_1$$

Donc d'après la question **3.3.5** on a

$$f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \quad \text{et} \quad f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_1)$$

Soit $x \in f(A_0 \cap A_1)$. Donc

$$x \in f(A_0) \qquad \text{et} \qquad x \in f(A_1)$$

Par définition de l'intersection, on a

$$x \in f(A_0) \cap f(A_1)$$

Finalement on obtient

$$f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$$

Donnons un exemple où l'inclusion est stricte. Soient $f\colon x \mapsto x^2$, $A_0 = [-1;0]$ et $A_1 = [0;1]$. On a :

$$\begin{aligned} & A_0 \cap A_1 = \{0\} \\ & f(A_0 \cap A_1) = f(\{0\}) = \{0\} \\ & f(A_0) = f([-1;0]) = [0;1] \\ & f(A_1) = f([0;1]) = [0;1] \\ & f(A_0) \cap f(A_1) = [0;1] \cap [0;1] = [0;1] \end{aligned}$$

Or $\{0\} \subsetneq [0;1]$ donc $f(A_0 \cap A_1) \subsetneq f(A_0) \cap f(A_1)$

Exercice 4. Soit E un ensemble quelconque. Si A est une partie de E, on appelle la **fonction indicatrice** de A, l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0;1\}$ définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout A, $B \in \mathcal{P}(E)$, $A = B$ si et seulement si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

2. Soient A et B des parties de E. Exprimer les fonctions indicatrices de A^c et de $A \cap B$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

3. En déduire l'expression des fonctions indicatrices de $A \setminus B$, de $A \cup B$ puis la différence symétrique $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Montrer que pour toutes parties A, B et C de E, on a :

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

5. Montrer que pour toutes parties A, B et C de E, on a :

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

Correction de l'exercice 4.

1. Montrons l'implication : soient $A,\, B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A = B$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_B(x)\end{aligned}$$

Montrons la réciproque : soient $A,\, B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. On a

$$\begin{aligned} x \in A &\implies \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ &\implies \mathbb{1}_B(x) = 1 \\ &\implies x \in B \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x \in B &\implies \mathbb{1}_B(x) = 1 \\ &\implies \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ &\implies x \in A \end{aligned}$$

Donc $A \subset B$ et $B \subset A$ et donc $A = B$.

Finalement on a bien l'équivalence qu'est vérifiée.

2. Déterminons les fonctions indicatrices de A^{c} et de $A \cap B$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A^{\mathrm{c}}}(x) = 1 &\iff x \in A^{\mathrm{c}} \\ &\iff x \notin A \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 0 \\ &\iff 1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{1}_{A^{\mathrm{c}}}(x) = 0 &\iff x \notin A^{\mathrm{c}} \\ &\iff x \in A \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ &\iff 1 - \mathbb{1}_A(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{1}_{A^{\mathrm{c}}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 &\iff x \in A \cap B \\ &\iff x \in A \ \text{ et } \ x \in B \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 1 \ \text{ et } \ \mathbb{1}_B(x) = 1 \\ &\iff \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(x) = 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0 &\iff x \notin A \cap B \\ &\iff x \notin A \ \text{ ou } \ x \notin B \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 0 \ \text{ ou } \ \mathbb{1}_B(x) = 0 \\ &\iff \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

3. Déterminons les fonctions indicatrices de $A \setminus B$, de $A \cup B$

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\setminus B} &= \mathbb{1}_{A\cap B^{\mathrm{c}}} \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B^{\mathrm{c}}} \\ &= \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cup B} &= \mathbb{1}_{((A\cup B)^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}} \\ &= \mathbb{1}_{(A^{\mathrm{c}}\cap B^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{A^{\mathrm{c}}\cap B^{\mathrm{c}}} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{A^{\mathrm{c}}}\mathbb{1}_{B^{\mathrm{c}}} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) \end{aligned}$$

$$= 1 - 1 + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$
$$= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

Donc $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B)$ et $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Déterminons la fonction indicatrice de la différence symétrique $A \Delta B$

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A \Delta B} &= \mathbb{1}_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} \\
&= \mathbb{1}_{A \setminus B} + \mathbb{1}_{B \setminus A} - \mathbb{1}_{A \setminus B} \mathbb{1}_{B \setminus A} \\
&= \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B (1 - \mathbb{1}_A) - \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B) \mathbb{1}_B (1 - \mathbb{1}_A) \\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_B \\
&= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B
\end{aligned}$$

4. Soient A, B et C des sous-ensembles de E, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A \Delta (B \Delta C)} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B \Delta C} - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B \Delta C} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C + 4 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - 2 \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C + 4 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - 2 \mathbb{1}_C (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) \\
&= \mathbb{1}_{A \Delta B} + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_{A \Delta B} \mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_{(A \Delta B) \Delta C}
\end{aligned}$$

Donc $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

5. Soient A, B et C des sous-ensembles de E, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A \cap (B \Delta C)} &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B \Delta C} \\
&= \mathbb{1}_A (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) \\
&= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_{A \cap B} + \mathbb{1}_{A \cap C} - 2 \mathbb{1}_{A \cap B} \mathbb{1}_{A \cap C} \\
&= \mathbb{1}_{(A \cap B) \Delta (A \cap C)}
\end{aligned}$$

Donc $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Exercice 5. Les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f \colon x \mapsto 2x - 3$

2. $g \colon x \mapsto \cos x$

3. $h \colon x \mapsto x^2 + x + 1$

Correction de l'exercice 5.

1. Montrons que f est injective.

Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \\ &\implies 2x_1 = 2x_2 \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Donc f est injective.

Montrons que f est surjective.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\implies y = 2x - 3 \\ &\implies y + 3 = 2x \\ &\implies x = \frac{y+3}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$$

Autrement dit f est surjective.

Comme on a montré que f est aussi injective, f est donc bijective.

2. Soient $x_1 = 0$ et $x_2 = 2\pi$. On a

$$x_1 \neq x_2$$

Mais comme $\cos(x_1) = \cos(0) = 1$

et $\cos(x_2) = \cos(2\pi) = 1$, on a

$$\cos(x_1) = \cos(x_2)$$

Autrement dit

$$g(x_1) = g(x_2)$$

Donc g n'est pas injective.

g ne peut donc pas être bijective.

De plus, par exemple 2 n'a pas d'antécédent car $\cos(x) = 2$ n'a pas de solution.

Donc g n'est pas surjective.

3. L'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution. Donc 0 n'a pas d'antécédent. On en déduit que h n'est pas surjective.

h ne peut donc pas être bijective.

Soient $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. On a

$$x_1 \neq x_2$$

Mais comme $h(x_1) = h(-2) = (-2)^2 - 2 + 1 = 3$ et $h(x_2) = h(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$, on a

$$h(x_1) = h(x_2)$$

Donc h n'est pas injective.

Exercice 6. Soit $f\colon X \to Y$ une application entre deux ensembles non vides X et Y. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.

2. Pour tous $A,\ B \in \mathcal{P}(X)$, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Correction de l'exercice 6.

Montrons l'équivalence par double implications.

1. $\implies$ **2.**

Soit f injective. Donc

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Montrons que par double inclusions $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

D'après la question **3.3.7** on a déja

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Il suffit de montrer que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cap f(B) &\implies y \in f(A) \quad \text{et} \quad y \in f(B) \\ &\implies y \in \{f(x) \mid x \in A\} \quad \text{et} \quad y \in \{f(x) \mid x \in B\} \end{aligned}$$

Donc soient $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1)$ et $y = f(x_2)$. On a

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Comme f est injective, on a

$$x_1 = x_2$$

Posons $x = x_1 = x_2$, donc $x \in A$ et $x \in B$. Autrement dit $x \in A \cap B$ avec

$$y = f(x)$$

Comme x_1 et x_2 on été choisit arbitrairement, on obtient

$$\begin{aligned} y \in \{f(x) \mid x \in A\} \quad \text{et} \quad y \in \{f(x) \mid x \in B\} &\implies y \in \{f(x) \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\} \\ &\implies y \in \{f(x) \mid x \in A \cap B\} \\ &\implies y \in f(A \cap B) \end{aligned}$$

Donc $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Par double inclusions on obtient $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

2. $\implies$ **1.**

Soit f tel que pour tous sous-ensembles A et B de X on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Montrons que f est injective.

Soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) \quad \text{et} \quad f(\{x_1\}) \neq \varnothing \quad \text{et} \quad f(\{x_2\}) \neq \varnothing \\ &\implies f(\{x_1\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_2\}) \quad \text{et} \quad f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) \neq \varnothing \\ &\implies f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) \neq \varnothing \\ &\implies f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \varnothing \\ &\implies \{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \varnothing \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Donc f est injective.

Finalement on a montré que **1.** $\implies$ **2.** et que **2.** $\implies$ **1.** donc on a montré l'équivalence **1.** $\iff$ **2.**.

Exercice 7.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à $x \in \mathbb{R}$, x^3. Montrer que f est bijective.

2. Soit g l'application $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$. Discuter sa nature.

Correction de l'exercice 7.

1. Montrons que f est injective. Soient $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\implies x_1^3 = x_2^3 \\
&\implies x_1^3 - x_2^3 = 0 \\
&\implies (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0 \\
&\implies x_1 - x_2 = 0 \;\text{ ou }\; x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \\
&\implies x_1 = x_2 \;\text{ ou }\; 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = 0 \\
&\implies x_1 = x_2 \;\text{ ou }\; x_1^2 + 2 \times x_1 \times 2x_2 + (2x_2)^2 + 3x_1^2 = 0 \\
&\implies x_1 = x_2 \;\text{ ou }\; (x_1 + 2x_2)^2 + 3x_1^2 = 0 \\
&\implies x_1 = x_2 \;\text{ ou }\; \left((x_1 + 2x_2)^2 = 0 \;\text{ et }\; 3x_1^2 = 0\right) \\
&\implies x_1 = x_2 \;\text{ ou }\; (x_1 + 2x_2 = 0 \;\text{ et }\; x_1 = 0) \\
&\implies x_1 = x_2 \;\text{ ou }\; (x_2 = 0 \;\text{ et }\; x_1 = 0) \\
&\implies x_1 = x_2 \;\text{ ou }\; x_1 = x_2 = 0 \\
&\implies x_1 = x_2
\end{aligned}$$

Donc f est injective.

Montrons que f est surjective.

$$f \;\text{ est surjective } \iff \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\; y = f(x)$$

Ici il n'est pas possible de montrer l'implication direct mise à par utiliser la fonction racine cubique. Mais utiliser cette fonction suppose que f est surjective alors que c'est ce que l'on souhaite démontrer... Pour résoudre le problème, on applique le cas général du théorème des valeurs intermédiaires :

> ***Théorème :*** *(Cas général du théorème des valeurs intermédiaires)*
>
> Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I et si α et β sont les limites de f aux bornes de cet intervalle (α et β sont soit des nombres, soit $+\infty$ ou soit $-\infty$), alors pour tout réel k strictement compris entre α et β, il existe une solution à l'équation $f(x) = k$.

On a (à démontrer...)

$$f \;\text{ est définie et continue sur }\; I = \mathbb{R}$$

De plus

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty = \beta$$

alors d'après le cas général du théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$\forall y \in \left]\alpha;\beta\right[, \exists x \in I,\; y = f(x)$$

Autrement dit

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$$

Donc f est surjective.

On a montré que f est injective et surjective, donc f est bijective.

2. Soit $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. On a

$$x_1 \neq x_2$$

Or

$$\begin{aligned} g(x_1) &= \lfloor x_1 \rfloor \\ &= \lfloor 0 \rfloor \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(x_2) &= \lfloor x_2 \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$g(x_1) = g(x_2)$$

Donc

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad g(x_1) = g(x_2)$$

C'est à dire qu'on a

$$\neg\left(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2 \implies g(x_1) \neq g(x_2)\right)$$

Autrement dit g n'est pas injective.

Donc g ne peut pas être bijective.

Soit $y \in \mathbb{Z}$ et cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$.

$$\begin{aligned} y = g(x) &\implies y = \lfloor x \rfloor \\ &\implies y \leqslant x < y + 1 \\ &\implies \exists x \in [y; y+1[\\ &\implies \exists x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc g est surjective.

Exercice 8. On considère l'application

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

1. Quelle est la nature de cette application ?
2. Quelle est son image ?
3. Trouver $f^{-}1(\{0\})$.

Correction de l'exercice 8.

1. Soit $y = 2$ et cherchons x tel que $y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\implies 2 = \frac{2x}{1+x^2} \\ &\implies 2\left(1+x^2\right) = 2x \\ &\implies 2x^2 - 2x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant Δ du polynôme $2x^2 - 2x + 2$ est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4 \times 2 \times 2 \\ &= -12 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc le polynôme $2x^2 - 2x + 2$ n'a pas de solution.

Donc pour $y = 2$ on a montré que

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y \neq f(x)$$

Autrement dit f n'est pas surjective.

Donc f ne peut pas être bijective.

Soient $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 2$. On a

$$x_1 \neq x_2$$

Mais

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{2x_1}{1+x_1^2} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(x_2) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} \\ &= \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Donc

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Donc f n'est pas injective.

2. Déterminons $f(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
&f(\mathbb{R})\\
&=\{f(x)\mid x\in\mathbb{R}\}\\
&=\{f(x)\mid (x+1)\in\mathbb{R}\ \text{ et }\ (x-1)\in\mathbb{R}\}\\
&=\left\{f(x)\;\middle|\;(x+1)^2\in\mathbb{R}_+\ \text{et}\ \ (x-1)^2\in\mathbb{R}_+\right\}\\
&=\left\{f(x)\;\middle|\;0\leqslant(x+1)^2\ \ \text{et}\ \ 0\leqslant(x-1)^2\right\}\\
&=\left\{f(x)\;\middle|\;-(x+1)^2\leqslant 0\ \ \text{et}\ \ 0\leqslant(x-1)^2\right\}\\
&=\left\{f(x)\mid -\left(x^2+2x+1\right)\leqslant 0 \text{ et } 0\leqslant x^2-2x+1\right\}\\
&=\left\{f(x)\mid -x^2-2x-1\leqslant 0\ \ \text{et}\ \ 0\leqslant x^2-2x+1\right\}\\
&=\left\{f(x)\mid -x^2-1\leqslant 2x\ \ \text{et}\ \ 2x\leqslant x^2+1\right\}\\
&=\left\{f(x)\mid -\left(x^2+1\right)\leqslant 2x\ \ \text{et}\ \ 2x\leqslant x^2+1\right\}\\
&=\left\{f(x)\;\middle|\;-1\leqslant\frac{2x}{x^2+1}\ \ \text{et}\ \ \frac{2x}{x^2+1}\leqslant 1\right\}\\
&=\{f(x)\mid -1\leqslant f(x)\ \ \text{et}\ \ f(x)\leqslant 1\}\\
&=\{f(x)\mid -1\leqslant f(x)\leqslant 1\}\\
&=[-1;1]
\end{aligned}$$

3. Déterminons $f^{-}1(\{0\})$.

$$\begin{aligned}
f^{-}1(\{0\})&=\{x\mid f(x)\in\{0\}\}\\
&=\{x\mid f(x)=0\}\\
&=\left\{x\;\middle|\;\frac{2x}{x^2+1}=0\right\}\\
&=\{x\mid 2x=0\}\\
&=\{x\mid x=0\}\\
&=\{0\}
\end{aligned}$$

Exercice 9. Soit l'application $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x;y)=(x+y;2x+3y)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que l'application f est bijective.

Correction de l'exercice 9.

Montrons que f est injective.

Soient $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
&f(x_1;y_1)=f(x_2;y_2)\\
\Longrightarrow\ &(x_1+y_1;2x_1+3y_1)=(x_2+y_2;2x_2+3y_2)\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}x_1+y_1=x_2+y_2\\ 2x_1+3y_1=2x_2+3y_2\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}2x_1+2y_1=2x_2+2y_2\\ 2x_1+3y_1=2x_2+3y_2\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}2x_1+2y_1=2x_2+2y_2\\ y_1=y_2\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}2x_1+2y_1=2x_2+2y_1\\ y_1=y_2\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &(x_1;y_1)=(x_2;y_2)
\end{aligned}$$

Donc f est injective.

Montrons que f est surjective. Soit $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ et cherchons $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(\alpha;\beta)=f(x;y)$

$$\begin{aligned}
&(\alpha;\beta)=f(x;y)\\
\Longrightarrow\ &(\alpha;\beta)=(x+y;2x+3y)\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}\alpha=x+y\\ \beta=2x+3y\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}x=\alpha-y\\ \beta=2(\alpha-y)+3y\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}x=\alpha-y\\ y=\beta-2\alpha\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &\begin{cases}x=\alpha-\beta+2\alpha\\ y=\beta-2\alpha\end{cases}\\
\Longrightarrow\ &(x;y)\in\mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2,\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2,\ (\alpha;\beta)=f(x;y)$$

Autrement dit f est surjective. On a montré que f est injective et surjective, donc f est bijective.

Exercice 10. A chaque système de quatre entiers relatifs a, b, c et d tels que $ad-bc=1$, on associe l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (ax+by;cx+dy) \end{array}$$

On désigne par $\mathcal{F}$ la famille des applications ainsi définies.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ alors f est bijective et que f^{-1} est aussi dans $\mathcal{F}$.

2. Montrer que si f et g sont dans $\mathcal{F}$ alors $f \circ g \in \mathcal{F}$.

Correction de l'exercice 10.

1. Soit $f \in \mathcal{F}$. Montrons que f est bijective.

Commençons par montrer que f est injective. Soient $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2) \in \mathbb{Z}^2$. On a

$$\begin{aligned} & f(x_1;y_1) = f(x_2;y_2) \\ \Longrightarrow\ & (ax_1+by_1;cx_1+dy_1) \\ & \quad = (ax_2+by_2;cx_2+dy_2) \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} ax_1+by_1 = ax_2+by_2 \\ cx_1+dy_1 = cx_2+dy_2 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} acx_1+bcy_1 = acx_2+bcy_2 \\ acx_1+ady_1 = acx_2+ady_2 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} ax_1+by_1 = ax_2+by_2 \\ ady_1-bcy_1 = ady_2-bcy_2 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} ax_1+by_1 = ax_2+by_2 \\ (ad-bc)\,y_1 = (ad-bc)\,y_2 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} ax_1+by_1 = ax_2+by_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} ax_1 = ax_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & (x_1;y_1) = (x_2;y_2) \end{aligned}$$

Donc f est injective.

Montrons que f est surjective. Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$ et cherchons $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(\alpha;\beta) = f(x;y)$

$$\begin{aligned} & (\alpha;\beta) = f(x;y) \\ \Longrightarrow\ & (\alpha;\beta) = (ax+by;cx+dy) \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} \alpha = ax+by \\ \beta = cx+dy \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} \alpha c = acx+bcy \\ \beta a = acx+ady \\ \alpha d = adx+bdy \\ \beta b = bcx+bdy \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} \beta a-\alpha c = ady-bcy \\ \alpha d-\beta b = adx-bcx \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} \beta a-\alpha c = (ad-bc)\,y \\ \alpha d-\beta b = (ad-bc)\,x \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & \begin{cases} y = \beta a-\alpha c \\ x = \alpha d-\beta b \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & (x;y) \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2, \exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2,\ (\alpha;\beta) = f(x;y)$$

Autrement dit f est surjective.

On a montré que f est injective et surjective, donc à f qui est bijective. Autrement dit

$$\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2, \exists! (x;y) \in \mathbb{Z}^2,\ (\alpha;\beta) = f(x;y)$$

Montrons que f^{-1} est aussi dans $\mathcal{F}$.

Comme f est une bijection, donc par définition il existe une bijection réciproque $g\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}$. On note alors $g = f^{-1}$.

f^{-1} respecte donc la propriété suivante :

$$\begin{aligned} f(x;y) = (\alpha;\beta) &\iff f^{-1} \circ f(x;y) = f^{-1}(\alpha;\beta) \\ &\iff (x;y) = f^{-1}(\alpha;\beta) \end{aligned}$$

On a déjà montré que

$$f(x;y) = (\alpha;\beta) \implies \begin{cases} x = d\alpha - b\beta \\ y = a\beta - c\alpha \end{cases}$$

La réciproque de cette proposition est assurée par la définition de la bijection qui indique l'unicité du couple $(x;y)$. On a donc

$$f(x;y) = (\alpha;\beta) \iff \begin{cases} x = d\alpha - b\beta \\ y = a\beta - c\alpha \end{cases}$$

On pose donc f^{-1} définie par

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ & (\alpha;\beta) & \longmapsto & (d\alpha - b\beta; -c\alpha + a\beta) \end{array}$$

On a

$$da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$$

Donc f^{-1} est aussi dans $\mathcal{F}$.

2. Soient f et g des élémenents de $\mathcal{F}$. Donc $\exists\,(a_1;b_1;c_1;d_1), (a_2;b_2;c_2;d_2) \in \mathbb{Z}^4, \forall\,(x;y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$f(x;y) = (a_1x + b_1y; c_1x + d_1y) \quad \text{et} \quad g(x;y) = (a_2x + b_2y; c_2x + d_2y)$$

Montrons que $f \circ g \in \mathcal{F}$.

Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$. On a

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(a_2x + b_2y; c_2x + d_2y) \\ &= (a_1(a_2x + b_2y) + b_1(c_2x + d_2y); c_1(a_2x + b_2y) + d_1(c_2x + d_2y)) \\ &= (a_1a_2x + a_1b_2y + b_1c_2x + b_1d_2y; c_1a_2x + c_1b_2y + d_1c_2x + d_1d_2y) \\ &= ((a_1a_2 + b_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)y; (c_1a_2 + d_1c_2)x + (c_1b_2 + d_1d_2)y) \end{aligned}$$

On a

$$(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a_1a_2c_1b_2 + b_1c_2c_1b_2\right) + \left(a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2d_1d_2\right) - \left(\left(a_1b_2c_1a_2 + b_1d_2c_1a_2\right) + \left(a_1b_2d_1c_2 + b_1d_2d_1c_2\right)\right)\\
&= a_1a_2c_1b_2 + b_1c_2c_1b_2 + a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2d_1d_2 - \left(a_1b_2c_1a_2 + b_1d_2c_1a_2 + a_1b_2d_1c_2 + b_1d_2d_1c_2\right)\\
&= a_1a_2b_2c_1 + b_1b_2c_1c_2 + a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2d_1d_2 - a_1a_2b_2c_1 - a_2b_1c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 - b_1c_2d_1d_2\\
&= b_1b_2c_1c_2 + a_1a_2d_1d_2 - a_2b_1c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1\\
&= a_1d_1\left(a_2d_2 - b_2c_2\right) - b_1c_1\left(a_2d_2 - b_2c_2\right)\\
&= \left(a_1d_1 - b_1c_1\right)\left(a_2d_2 - b_2c_2\right)\\
&= 1 \times 1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Donc $f \circ g \in \mathcal{F}$.

Exercice 11. Soient $f\colon A \to B$ un fonction et $X \subset A$ et $Y \subset B$.

1. (a) Montrer que $X \subset f^{-1}\left(f\left(X\right)\right)$.

(b) Montrer qu'on a égalité si f est injective.

2. (a) Montrer que $f\left(f^{-1}\left(Y\right)\right) \subset Y$.

(b) Montrer qu'on a égalité si f est surjective.

Correction de l'exercice 11.

1. (a) Soit $x \in A$. Montrons que $X \subset f^{-1}\left(f\left(X\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
x \in X &\implies f\left(x\right) \in f\left(X\right)\\
&\implies f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) \subset f^{-1}\left(f\left(X\right)\right)\\
&\implies \left\{a \mid f\left(a\right) = f\left(x\right)\right\} \subset f^{-1}\left(f\left(X\right)\right)\\
&\implies x \in \left\{a \mid f\left(a\right) = f\left(x\right)\right\} \subset f^{-1}\left(f\left(X\right)\right)\\
&\implies x \in f^{-1}\left(f\left(X\right)\right)
\end{aligned}
$$

Donc $X \subset f^{-1}\left(f\left(X\right)\right)$

(b) Soit f injective. Donc

$$\forall x \in A,\ f\left(x\right) \in f\left(X\right) \implies x \in X$$

Preuve :

Soit $x \in A$ tel que $f\left(x\right) \in f\left(X\right)$. On a

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) \in f\left(X\right) &\implies f\left(x\right) \in \left\{f\left(a\right) \mid a \in X\right\}\\
&\implies \exists a \in X,\ f\left(x\right) = f\left(a\right)\\
&\overset{f \text{ injective}}{\implies} \exists a \in X,\ x = a\\
&\implies x \in X
\end{aligned}
$$

Soit $x \in A$. Montrons que $f^{-1}\left(f\left(X\right)\right) \subset X$

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}\left(f\left(X\right)\right) &\implies x \in \left\{a \mid f\left(a\right) \in f\left(X\right)\right\}\\
&\implies f\left(x\right) \in f\left(X\right)\\
&\implies x \in X
\end{aligned}
$$

Donc $f^{-1}(f(X)) \subset X$. Finalement, avec le résultat précédent on a $X = f^{-1}(f(X))$

2. (a) Montrons que $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y$

$$\begin{aligned} & y \in f\left(f^{-1}(Y)\right) \\ \Longrightarrow\ & y \in \left\{f(x) \;\middle|\; x \in f^{-1}(Y)\right\} \\ \Longrightarrow\ & y \in \{f(x) \mid x \in \{\lambda \mid f(\lambda) \in Y\}\} \\ \Longrightarrow\ & y \in \{f(x) \mid \exists x \in A,\ f(x) \in Y\} \\ \Longrightarrow\ & y \in \{\alpha \mid \alpha \in Y\} \\ \Longrightarrow\ & y \in Y \end{aligned}$$

Donc $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y$.

(b) Soit f surjective.

Montrons que $Y \subset f\left(f^{-1}(Y)\right)$

$$\begin{aligned} & y \in Y \\ \overset{f \text{ surjective}}{\Longrightarrow}\ & y \in Y \text{ et } \exists x \in A,\ f(x) = y \\ \Longrightarrow\ & \exists x \in A,\ f(x) \in Y \text{ et } f(x) = y \\ \Longrightarrow\ & \exists x \in f^{-1}(Y) \text{ et } f(x) = y \\ \Longrightarrow\ & y \in \left\{f(x) \;\middle|\; x \in f^{-1}(Y)\right\} \\ \Longrightarrow\ & y \in f\left(f^{-1}(Y)\right) \end{aligned}$$

Donc $Y \subset f\left(f^{-1}(Y)\right)$.

Finalement, avec le résultat précédent on a $f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

1. Déterminer le nombre d'injections de E dans F.

2. En déduire le nombre de bijections de E dans f.

Correction de l'exercice 12.

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.

Soit $f\colon E \to F$. Par définition de l'image direct d'une fonction on a directement que

$$f(E) \subset F$$

> ***Preuve :***
>
> Soit $f\colon E \to F$. On a
>
> $$\begin{aligned} y \in f(E) &\Longrightarrow y \in \{f(x) \mid x \in E \text{ et } f(x) \in F\} \\ &\Longrightarrow y \in \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ &\Longrightarrow y \in \{\alpha \in F\} \\ &\Longrightarrow y \in F \end{aligned}$$
>
> Donc $f(E) \subset F$

Donc

$$\mathbb{1}_{f(E)} \leqslant \mathbb{1}_F$$

> ***Preuve :***
>
> Soient A et B deux ensembles tel que $A \subset B$. Montrons que $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$
>
> $$\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B} \qquad \text{d'après 2.7.3}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B && \text{d'après 3.4.3} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \left(1 - \mathbb{1}_A\right) && \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B \setminus A} && \text{d'après 3.4.3} \\
&\geqslant \mathbb{1}_A && \text{car } \mathbb{1}_{B \setminus A} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$

Donc

$$\forall y \in F,\ \mathbb{1}_{f(E)}(y) \leqslant \mathbb{1}_F(y)$$

Donc

$$\sum_{y \in F} \mathbb{1}_{f(E)}(y) \leqslant \sum_{y \in F} \mathbb{1}_F(y) = p$$

On a donc

$$\operatorname{card}(f(E)) \leqslant \operatorname{card}(F) = p \tag{1}$$

De plus, on a

$$\operatorname{card}(f(E)) \leqslant \operatorname{card}(E)$$

Preuve :

Soit $f\colon E \to F$ avec E et F des ensembles finis. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(E) = n &\implies \exists (x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}, \forall i,j \in [\![1;n]\!],\ x_i \neq x_j \quad \text{et} \quad E = \{x_i \mid i \in [\![1;n]\!]\} \\
&\implies \exists (x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}, \forall i,j \in [\![1;n]\!],\ x_i \neq x_j \quad \text{et} \quad f(E) = \{f(x_i) \mid i \in [\![1;n]\!]\} \qquad (2) \\
&\implies \operatorname{card}(f(E)) \leqslant n \\
&\implies \operatorname{card}(f(E)) \leqslant \operatorname{card}(E)
\end{aligned}$$

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas :}}$ Soit $p < n$ et supposons $f\colon E \to F$ injective.

Donc

$$\forall x, y \in E,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

D'après (2) de la preuve précédente et d'après (1), on en déduit que

$$\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(E) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{card}(f(E)) \leqslant \operatorname{card}(F)$$

Donc

$$\operatorname{card}(f(E)) = n \qquad \text{et} \qquad n \leqslant p$$

Absurde car on a posé $p < n$. Donc il n'y a pas d'injection si $\operatorname{card}(F) < \operatorname{card}(E)$

$\boxed{2^{\text{e}} \text{ cas :}}$ Soient $n = p$

Note à moi-même : EXERCICE A FINIR

Remarque : Exercice chronophage qui m'a demandé 3 jours de recherche. Il faudra essayer de démontrer sans la récurrence (car la récurrence implique qu'on connait déjà le résultat or l'énoncé ne donne pas le résultat).

Réponse : c'est le nombre d'arrangement k parmi n

Exercice 13.

1. Soit A un ensemble fini à n éléments. Trouver le cardinal de $\mathcal{P}(A)$.

2. Soit X un ensemble quelconque.

(a) Trouver une injection de X dans $\mathcal{P}(X)$.

(b) Montrer qu'il existe pas de bijection entre $\mathcal{P}(X)$ et X.

Correction de l'exercice 13.

Note à moi-même : EXERCICE A FAIRE

Remarque : Exercice problablement chronophage.

Réponse pour la 1 : 2^n

Réponse pour la 2a : $f\colon X \to \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$

Piste pour la 2b : Probablement par l'absurde

1. Exercice qui touche la construction axiomatique de la théorie des ensembles.

On suppose que A_0 possède 0 élémenent.

Donc $A_0 = \emptyset$ et donc $\mathcal{P}(A_0) = \{\emptyset\}$.

Donc $\text{card}(\mathcal{P}(A_0)) = 1$

On suppose que A_1 possède 1 élémenent.

Donc $A_1 = \{x_1\}$ et donc $\mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset; \{x_1\}\}$.

Donc $\text{card}(\mathcal{P}(A_1)) = 2$

On suppose que A_2 possède 2 élémenents.

Donc $A_2 = \{x_1; x_2\}$ et donc $\mathcal{P}(A_2) = \{\emptyset; \{x_1\}; \{x_2\}; \{x_1; x_2\}\}$.

Donc $\text{card}(\mathcal{P}(A_2)) = 4$

On suppose que A_3 possède 3 élémenents.

Donc $A_3 = \{x_1; x_2; x_3\}$ et donc $\mathcal{P}(A_3) = \{\emptyset; \{x_1\}; \{x_2\}; \{x_3\}; \{x_1; x_2\}; \{x_1; x_3\}; \{x_2; x_3\}; \{x_1; x_2; x_3\}\}$.

Donc $\text{card}(\mathcal{P}(A_3)) = 8$

On suppose que A_4 possède 4 élémenents.

Donc $A_4 = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A_4) = \Big\{&\emptyset; \{x_1\}; \{x_2\}; \{x_3\}; \{x_4\}; \{x_1; x_2\}; \{x_1; x_3\}; \{x_1; x_4\}; \{x_2; x_3\};\\ &\{x_2; x_4\}; \{x_3; x_4\}; \{x_1; x_2; x_3\}; \{x_1; x_2; x_4\}; \{x_1; x_3; x_4\}; \{x_2; x_3; x_4\}; \{x_1; x_2; x_3; x_4\}\Big\}\end{aligned}$$

Donc $\text{card}(\mathcal{P}(A_4)) = 16$

On remarque que pour tout n entier naturel, on a très probablement $\text{card}(\mathcal{P}(A_n)) = 2^n$

Supposons que $\text{card}(\mathcal{P}(A_n)) = 2^n$. Montrons que $\text{card}(\mathcal{P}(A_{n+1})) = 2^{n+1}$

Par définition, $\mathcal{P}(A_{n+1})$ possède tous les élémenents de $\mathcal{P}(A_n)$ et ainsi que tous les ensembles formés par l'ajout d'un élément supplémentaire à chaque element de $\mathcal{P}(A_n)$

Autrement dit, $\mathcal{P}(A_{n+1})$ contient 2^n éléments supplémentaires à ceux de $\mathcal{P}(A_n)$.

Donc $\text{card}(\mathcal{P}(A_{n+1})) = \text{card}(\mathcal{P}(A_n)) + 2^n = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

La propriété est ainsi prouvée par récurrence. La relation est vraie pour $n = 0$ et on a montré que si elle est vraie pour n, elle l'est aussi pour $n + 1$. Donc, elle est vraie pour tout n entier naturel.

Autre rédaction :

Soit A un ensemble fini à n éléments.

Phase de découverte (conjecture) : Regardons ce qui se passe pour les petites valeurs de n :

— Si $n = 0$, $A = \emptyset$, alors $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$, donc $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 1 = 2^0$.

— Si $n = 1$, $A = \{x_1\}$, alors $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset; \{x_1\}\}$, donc $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2 = 2^1$.

— Si $n = 2$, $A = \{x_1; x_2\}$, alors $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset; \{x_1\}; \{x_2\}; \{x_1; x_2\}\}$, donc $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 4 = 2^2$.

On conjecture donc que le résultat est 2^n.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Démonstration par récurrence :

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a vu que $\text{card}(\mathcal{P}(\emptyset)) = 1$ et $2^0 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.

— **Hérédité :** Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, pour tout ensemble A de cardinal n, on ait $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Soit B un ensemble de cardinal $n + 1$. Choisissons un élément $x \in B$ et posons $A = B \setminus \{x\}$. L'ensemble A a donc un cardinal n.

Les éléments de $\mathcal{P}(B)$ (les parties de B) se répartissent en deux catégories disjointes :

(a) Les parties de B qui ne contiennent pas x. Ce sont exactement les parties de A. D'après l'hypothèse de récurrence, il y en a 2^n.

(b) Les parties de B qui contiennent x. Elles sont de la forme $P \cup \{x\}$ où $P \in \mathcal{P}(A)$. Il y a donc autant de telles parties que de parties dans $\mathcal{P}(A)$, c'est-à-dire 2^n.

Ainsi, le cardinal total de $\mathcal{P}(B)$ est :

$$\text{card}(\mathcal{P}(B)) = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout ensemble fini A à n éléments, $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

2. (a) **Injection de X dans $\mathcal{P}(X)$**

On peut intuitivement penser à l'application qui à tout élément de X on associe son singleton qui est par définition dans $\mathcal{P}(X)$.

Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f\colon & X & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ & x & \longmapsto & \{x\} \end{array}$$

Montrons que f est injective.

Soient $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$.

$$f(x) = f(y) \implies \{x\} = \{y\} \implies x = y$$

Donc f est injective.

(b) **Non-existence de bijection (Théorème de Cantor)**

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une bijection $g\colon X \to \mathcal{P}(X)$.

Considérons l'ensemble Y défini par :

$$Y = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}.$$

Puisque Y est une partie de X (donc $Y \in \mathcal{P}(X)$) et que g est surjective,

il existe un élément $y \in X$ tel que $g(y) = Y$.

Deux cas se présentent :

- Si $y \in Y$, alors par définition de Y, $y \notin g(y)$. Or $g(y) = Y$, donc $y \notin Y$. Contradiction.
- Si $y \notin Y$, alors par définition de Y, il est faux que $y \notin g(y)$, donc $y \in g(y)$. Or $g(y) = Y$, donc $y \in Y$. Contradiction.

Dans les deux cas, on aboutit à une absurdité. Donc une telle bijection ne peut pas exister.

TD n° 4

Relations

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation suivante :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2, \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ est un multiple de } 5$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer que cette relation est compatible avec l'addition. C'est à dire

$$\forall ((x; y); (x'; y')) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, \quad x\mathcal{R}x' \text{ et } y\mathcal{R}y' \implies (x + y)\,\mathcal{R}\,(x' + y')$$

Correction de l'exercice 1.

1. $\boxed{\text{Réflexivité}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive.

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrons que $x\mathcal{R}x$.

$$x - x = 0$$

Or pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$0 = 5k \iff k = 0$$

Donc 0 est un multiple de 5, ainsi $x - x$ est un multiple de 5

Donc $x\mathcal{R}x$, autrement dit $\mathcal{R}$ est réflexive.

$\boxed{\text{Symétrie}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique.

Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x\mathcal{R}y$. On a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\implies x - y \text{ est un multiple de } 5 \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 5k \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z},\ y - x = -5k \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z},\ y - x = 5(-k) \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z},\ k' = -k \text{ et } y - x = 5k' \\ &\implies \exists k' \in \mathbb{Z},\ y - x = 5k' \\ &\implies y - x \text{ est un multiple de } 5 \\ &\implies y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive.

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z &\implies (x - y \text{ est un multiple de } 5) \text{ et } (y - z \text{ est un multiple de } 5) \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 5k \text{ et } \exists k' \in \mathbb{Z},\ y - z = 5k' \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 5k \text{ et } \exists k' \in \mathbb{Z},\ y = 5k' + z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\implies \exists k, k' \in \mathbb{Z},\ x - (5k' + z) = 5k \\
&\implies \exists k, k' \in \mathbb{Z},\ x - 5k' - z = 5k \\
&\implies \exists k, k' \in \mathbb{Z},\ x - z = 5k + 5k' \\
&\implies \exists k, k' \in \mathbb{Z},\ x - z = 5\,(k + k') \quad \text{et} \quad (k + k') \in \mathbb{Z} \\
&\implies \exists k, k', k'' \in \mathbb{Z},\ x - z = 5k'' \ \text{ et } \ k'' = k + k' \\
&\implies \exists k'' \in \mathbb{Z},\ x - z = 5k'' \\
&\implies (x - z \ \text{ est un multiple de } \ 5) \\
&\implies x\mathcal{R}z
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On a montré que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, donc par définition, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Montrons que cette relation est compatible avec l'addition.

Soit $((x;y)\,;(x';y')) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ tel que $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$. On a

$$
\begin{aligned}
x\mathcal{R}x' \ \text{ et } \ y\mathcal{R}y' &\implies x - x' \ \text{ est un multiple de } \ 5 \ \text{ et } \ y - y' \ \text{ est un multiple de } \ 5 \\
&\implies \exists k \in \mathbb{Z},\ x - x' = 5k \ \text{ et } \ \exists k' \in \mathbb{Z},\ y - y' = 5k' \\
&\implies \exists k, k' \in \mathbb{Z},\ x - x' = 5k \ \text{ et } \ y - y' = 5k' \\
&\implies \exists k, k' \in \mathbb{Z},\ x - x' + y - y' = 5k + 5k' \\
&\implies \exists k, k' \in \mathbb{Z},\ x + y - (x' + y') = 5\,(k + k') \\
&\implies \exists k'' \in \mathbb{Z},\ x + y - (x' + y') = 5k'' \\
&\implies x + y - (x' + y') \ \text{ est un multiple de } \ 5 \\
&\implies (x + y)\,\mathcal{R}\,(x' + y')
\end{aligned}
$$

Donc cette relation est compatible avec l'addition.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation suivante :

$$
\forall\,((x;y)\,;(x';y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad (x;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') \iff x^2 + y^2 = {x'}^2 + {y'}^2
$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une reltaion d'équivalence.

2. Décrire la partition de $\mathbb{R}^2$ par les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

Correction de l'exercice 2.

1. $\boxed{\text{Réflexivité}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive.

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Montrons que $(x;y)\,\mathcal{R}\,(x;y)$.

On a

$$
x^2 + y^2 = x^2 + y^2
$$

Donc $(x;y)\,\mathcal{R}\,(x;y)$, autrement dit $\mathcal{R}$ est réflexive.

$\boxed{\text{Symétrie}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique. Soit $((x;y)\,;(x';y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tel que $(x;y)\,\mathcal{R}\,(x';y')$.

$$
\begin{aligned}
(x;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') &\implies x^2 + y^2 = {x'}^2 + {y'}^2 \\
&\implies {x'}^2 + {y'}^2 = x^2 + y^2 \\
&\implies (x';y')\,\mathcal{R}\,(x;y)
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrtique.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive.

Soit $((x;y)\,;(x';y')\,;(x'';y'')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tel que $(x;y)\,\mathcal{R}\,(x';y')$ et $(x';y')\,\mathcal{R}\,(x'';y'')$. On a

$$\begin{aligned}
(x;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') \quad \text{et} \quad (x';y')\,\mathcal{R}\,(x'';y'') &\implies x^2+y^2 = {x'}^2+{y'}^2 \quad \text{et} \quad {x'}^2+{y'}^2 = {x''}^2+{y''}^2 \\
&\implies x^2+y^2 = {x'}^2+{y'}^2 = {x''}^2+{y''}^2 \\
&\implies x^2+y^2 = {x''}^2+{y''}^2 \\
&\implies (x;y)\,\mathcal{R}\,(x'';y'')
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On a montré que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, donc par définition, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Une partition d'un ensemble $\mathbb{R}^2$ est un ensemble de parties non vides de $\mathbb{R}^2$ deux à deux disjointes et dont l'union est $\mathbb{R}^2$.

La classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}^2$, notée $[x]$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$[x] = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\mathcal{R}y\right\}$$

> ***Proposition :***
>
> Soient X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. L'ensemble $X/_{\mathcal{R}}$ est une partition de X.
>
> ***Preuve :*** Document de cours.

On a montré que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$. Donc

$$\mathbb{R}^2/_{\mathcal{R}} = \left\{[x] \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^2\right\}$$

est une partition de $\mathbb{R}^2$

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation binaire sur $\mathcal{R}$ par

$$\forall\,((a;b)\,;(x;y)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)^2, \quad (a;b)\,\mathcal{R}\,(x;y) \iff ay = bx$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. On note $\overline{(a;b)}$ la classe d'équivalence de $(a;b)$. Déterminer les classes $\overline{(0;1)}$, $\overline{(0;-1)}$, $\overline{(n;1)}$ et $\overline{(6;2)}$.

Correction de l'exercice 3.

1. $\boxed{\text{Réflexivité}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive.

Soit $(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. On a

$$ab = ba$$

Donc $(a;b)\,\mathcal{R}\,(a;b)$ c'est a dire que $\mathcal{R}$ est réflexive.

$\boxed{\text{Symétrie}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique. Soit $((a;b)\,;(x;y)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)^2$ tel que $(a;b)\,\mathcal{R}\,(x;y)$.

$$\begin{aligned}
(a;b)\,\mathcal{R}\,(x;y) &\implies ay = bx \\
&\implies xb = ya \\
&\implies (x;y)\,\mathcal{R}\,(a;b)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrtique.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive.

Soit $((a;b);(x;y);(\alpha;\beta)) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)^3$ tel que $(a;b)\,\mathcal{R}\,(x;y)$ et $(x;y)\,\mathcal{R}\,(\alpha;\beta)$ On a

$$\begin{aligned}
(a;b)\,\mathcal{R}\,(x;y) \quad \text{et} \quad (x;y)\,\mathcal{R}\,(\alpha;\beta) &\Longrightarrow ay = bx \quad \text{et} \quad x\beta = y\alpha \\
&\Longrightarrow ayx\beta = bxy\alpha \\
&\Longrightarrow a\beta xy = b\alpha xy \\
&\Longrightarrow a\beta xy - b\alpha xy = 0 \\
&\Longrightarrow (a\beta - b\alpha)\,xy = 0 \\
&\Longrightarrow a\beta - b\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad xy = 0 \\
&\Longrightarrow a\beta = b\alpha \quad \text{ou} \quad x = 0 \qquad \text{car} \quad y \in \mathbb{Z}^*
\end{aligned}$$

Il reste donc à étudier le cas $x = 0$.

$$\begin{aligned}
(a;b)\,\mathcal{R}\,(x;y) \quad \text{et} \quad (x;y)\,\mathcal{R}\,(\alpha;\beta) \quad \text{et} \quad x = 0 &\Longrightarrow (a;b)\,\mathcal{R}\,(0;y) \quad \text{et} \quad (0;y)\,\mathcal{R}\,(\alpha;\beta) \\
&\Longrightarrow ay = b\times 0 \quad \text{et} \quad 0\times\beta = y\alpha \\
&\Longrightarrow ay = 0 \quad \text{et} \quad 0 = y\alpha \\
&\Longrightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad 0 = \alpha \qquad \text{car} \quad y \in \mathbb{Z}^*
\end{aligned}$$

Donc le cas $x = 0$ se limite aux cas $a = 0$ et $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}
(a;b)\,\mathcal{R}\,(x;y) \quad \text{et} \quad (x;y)\,\mathcal{R}\,(\alpha;\beta) \quad \text{et} \quad a = 0 \quad \text{et} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0 &\Longrightarrow (0;b)\,\mathcal{R}\,(0;y) \quad \text{et} \quad (0;y)\,\mathcal{R}\,(0;\beta) \\
&\Longrightarrow 0\times y = b\times 0 \quad \text{et} \quad 0\times\beta = y\times 0 \\
&\Longrightarrow 0\times\beta = b\times 0 \\
&\Longrightarrow a\beta = b\alpha \\
&\Longrightarrow a\beta = b\alpha
\end{aligned}$$

Donc dans tous les cas on a

$$\begin{aligned}
(a;b)\,\mathcal{R}\,(x;y) \quad \text{et} \quad (x;y)\,\mathcal{R}\,(\alpha;\beta) &\Longrightarrow a\beta = b\alpha \\
&\Longrightarrow a\beta = b\alpha \\
&\Longrightarrow (a;b)\,\mathcal{R}\,(\alpha;\beta)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On a montré que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, donc par définition, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminons les classes $\overline{(0;1)}$, $\overline{(0;-1)}$, $\overline{(n;1)}$ et $\overline{(6;2)}$

$$\begin{aligned}
\overline{(0;1)} &= \{(a;b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (0;1)\,\mathcal{R}\,(a;b)\} \\
&= \{(a;b) \mid 0b = 1a \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^*\} \\
&= \{(a;b) \mid a = 0 \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^*\} \\
&= \{(a;b) \mid a \in \{0\} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^*\} \\
&= \{0\}\times\mathbb{Z}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(0;-1)} &= \{(a;b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (0;-1)\,\mathcal{R}\,(a;b)\} \\
&= \{(a;b) \mid 0b = -1a \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^*\} \\
&= \{(a;b) \mid a = 0 \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^*\} \\
&= \{(a;b) \mid a \in \{0\} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^*\} \\
&= \{0\}\times\mathbb{Z}^*
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\overline{(n;1)} &= \{(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (n;1)\,\mathcal{R}\,(a;b)\} \\ &= \{(a;b) \mid nb = 1a \ \text{ et } \ a \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ b \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \{(a;b) \mid a = nb \ \text{ et } \ a \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ b \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \{(nb;b) \mid b \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \{b\,(n;1) \mid b \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(n;1) \setminus \{(0;0)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{(6;2)} &= \{(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (6;2)\,\mathcal{R}\,(a;b)\} \\ &= \{(a;b) \mid 6b = 2a \ \text{ et } \ a \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ b \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \{(a;b) \mid a = 3b \ \text{ et } \ a \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ b \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \{(3b;b) \mid b \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \{b\,(3;1) \mid b \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(3;1) \setminus \{(0;0)\}\end{aligned}$$

Exercice 4. On note $\mathcal{D}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall\,(m;n) \in {\mathbb{N}^*}^2,\ m\mathcal{D}n \iff m \text{ divise } n$$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est une relation d'ordre.

2. $\mathcal{D}$ est-elle une relation d'ordre total ?

3. Représenter par un diagramme l'ensemble $\{2, 3, 6, 21, 42\}$ ordonné par $\mathcal{D}$.

4. $\mathbb{N}^*$ muni de la relation $\mathcal{D}$ possède-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

5. Déterminer les éléments minimaux de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Correction de l'exercice 4.

1. $\boxed{\text{Réflexivité}}$ Montrons que $\mathcal{D}$ est réflexive.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ On a

$$\begin{aligned} m = 1 \times m &\implies \exists k \in \mathbb{N},\ m = k \times m \\ &\implies m \text{ divise } m \\ &\implies m\mathcal{D}m \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}$ est réflexive.

$\boxed{\text{Antisymétrie}}$ Montrons que $\mathcal{D}$ est antisymétrique.

Soit $(m;n) \in {\mathbb{N}^*}^2$.

$$\begin{aligned} m\mathcal{D}n \ \text{ et } \ n\mathcal{D}m &\implies m \text{ divise } n \ \text{ et } \ n \text{ divise } m \\ &\implies \exists k_1 \in \mathbb{N},\ n = k_1 m \ \text{ et } \ \exists k_2 \in \mathbb{N},\ m = k_2 n \\ &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ n = k_1 m \ \text{ et } \ m = k_2 n \\ &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ n = k_1 k_2 n \ \text{ et } \ m = k_2 n \\ &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ 1 = k_1 k_2 \ \text{ et } \ m = k_2 n \\ &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ k_1 k_2 = 1 \ \text{ et } \ 1 \leqslant k_1 \ \text{ et } \ 1 \leqslant k_2 \ \text{ et } \ m = k_2 n \\ &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ k_1 k_2 = 1 \ \text{ et } \ k_2 \leqslant k_1 k_2 \ \text{ et } \ k_1 \leqslant k_1 k_2 \ \text{ et } \ m = k_2 n \\ &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ k_1 k_2 = 1 \ \text{ et } \ k_2 \leqslant 1 \ \text{ et } \ k_1 \leqslant 1 \ \text{ et } \ m = k_2 n \\ &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ k_1 k_2 = 1 \ \text{ et } \ k_2 \leqslant 1 \leqslant k_2 \ \text{ et } \ k_1 \leqslant 1 \leqslant k_1 \ \text{ et } \ m = k_2 n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ k_1k_2 = 1 \ \text{ et } \ k_2 = 1 \ \text{ et } \ k_1 = 1 \ \text{ et } \ m = k_2 n \\ &\Longrightarrow m = n \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}$ est antisymétrique.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ Montrons que $\mathcal{D}$ est transitive.

Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} m\mathcal{D}n \ \text{ et } \ n\mathcal{D}p &\Longrightarrow m \text{ divise } n \ \text{ et } \ n \text{ divise } p \\ &\Longrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N},\ n = k_1 m \ \text{ et } \ \exists k_2 \in \mathbb{N},\ p = k_2 n \\ &\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ n = k_1 m \ \text{ et } \ p = k_2 k_1 m \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ p = km \\ &\Longrightarrow m \text{ divise } p \\ &\Longrightarrow m\mathcal{D}p \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}$ est transitive.

On a montré que $\mathcal{D}$ est réflexive, antisymétrique et transitive, donc par définition, $\mathcal{D}$ est une relation d'ordre.

2. $\boxed{\text{Totalité}}$ Montrons que $\mathcal{D}$ n'est pas total. C'est à dire

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \text{ n'est pas total} &\Longleftrightarrow \neg\,(\mathcal{D} \text{ est total}) \\ &\Longleftrightarrow \neg\left(\forall\,(m;n) \in \mathbb{N}^{*2},\ m\mathcal{D}n \ \text{ ou } \ n\mathcal{D}m\right) \\ &\Longleftrightarrow \exists\,(m;n) \in \mathbb{N}^{*2},\ m\not\mathcal{D}n \ \text{ et } \ n\not\mathcal{D}m \end{aligned}$$

Soit $m = 2, n = 3$. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2. Donc

$$2\not\mathcal{D}3 \ \text{ et } \ 3\not\mathcal{D}2$$

Donc $\mathcal{D}$ n'est pas total.

3. Pour représenter un diagramme il faut d'abord déterminer les éléments en relations entre eux.

$$6 = 2 \times 3 \Longrightarrow 2\mathcal{D}6$$

En appliquant le même résonnement on obtient

$2\mathcal{D}6$	$6\mathcal{D}42$	$2\mathcal{D}42$
$3\mathcal{D}6$		
$3\mathcal{D}21$	$21\mathcal{D}42$	$3\mathcal{D}42$

Donc la représentation par le diagramme de Hasse de l'ensemble $\{2; 3; 6; 21; 42\}$ ordonné par $\mathcal{D}$ est

$$\begin{tikzcd} 42 & \\ 6 \arrow[u] & 21 \arrow[ul] \\ 2 \arrow[u] & 3 \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} n = 1n &\implies \exists k \in \mathbb{N},\ n = 1k \\ &\implies 1 \text{ divise } n \\ &\implies 1\mathcal{D}n \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1\mathcal{D}n$$

Donc 1 est le plus petit élément de $(\mathbb{N}^*; \mathcal{D})$.

Montrons que $(\mathbb{N}^*; \mathcal{D})$ n'admet pas de plus grand élément.

Supposons par l'absurde qu'il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\mathcal{D}M$$

c'est-à-dire que M est un multiple de tout entier naturel non nul.

En particulier, $M + 1 \in \mathbb{N}^*$ donc $(M + 1)\mathcal{D}M$, ce qui signifie que $M + 1$ divise M.

Or $M + 1 > M > 0$,

donc $M + 1$ ne peut pas diviser M.

C'est une contradiction.

Donc $(\mathbb{N}^*; \mathcal{D})$ n'admet pas de plus grand élément.

5. Soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} m \text{ minimal} &\implies (\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ n\mathcal{D}m \Rightarrow n = m) \\ &\implies m \text{ ne peut être divisé que par lui-même} \\ &\implies m \text{ est un nombre premier} \\ &\implies m \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des éléments minimaux de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ est l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$.

Exercice 5. La relation «divise» est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^*$? Si oui, l'ordre est-il total ?

Correction de l'exercice 5.
La relation «divise» n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^*$ car elle n'est pas antisymétrique.
En effet, soient $m = 1$ et $n = -1$.

$$\begin{aligned} m = -1 \times (-1) &\implies m = -1 \times n \\ &\implies \exists k_1 \in \mathbb{Z},\ m = k_1 n \\ &\implies n\mathcal{D}m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = -1 \times 1 &\implies n = -1 \times m \\ &\implies \exists k_2 \in \mathbb{Z},\ n = k_2 \times m \\ &\implies m\mathcal{D}n \end{aligned}$$

Or

$$1 \neq -1 \implies m \neq n$$

Donc on a $n\mathcal{D}m$ et $m\mathcal{D}n$ mais $m \neq n$. Donc $\mathcal{D}$ n'est pas antisymétrique et donc $\mathcal{D}$ n'est pas une relation d'ordre.

Exercice 6. *Ordre Lexicographique*

1. On note $E = [-1;1]^2$ et on définit sur E la relation

$$\forall (x;y) \in E, \forall (x';y') \in E,\ (x;y) \preccurlyeq (x';y') \iff \Big((x < x') \quad \text{ou} \quad (x = x' \quad \text{et} \quad y \leqslant y')\Big)$$

(a) $\preccurlyeq$ est-elle une relation d'ordre ?

(b) Si oui, eest-ce une relation d'ordre total ?

(c) Représenter par un diagramme l'ensemble

$$\{(-1;1)\,;(0,5;-1)\,;(0;1)\,;(-1;0)\,;(1;1)\,;(0,5;1)\,;(-0,5;1)\}$$

muni de l'ordre lexicographique $\preccurlyeq$.

2. Représenter graphiquement l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$.

Correction de l'exercice 6.

1. (a) $\boxed{\text{Réflexivité}}$ Montrons que $\preccurlyeq$ est réflexive.

Soit $(x;y) \in E$. Par définition de l'égalité, $x = x$ et $y = y$. On a

$$\begin{aligned} x = x \quad \text{et} \quad y = y &\implies x = x \quad \text{et} \quad (y = y \quad \text{ou} \quad y < y) \\ &\implies x = x \quad \text{et} \quad y \leqslant y \\ &\implies (x < x) \ \text{ou} \ (x = x \quad \text{et} \quad y \leqslant y) \\ &\implies (x;y) \preccurlyeq (x;y) \end{aligned}$$

Donc $\preccurlyeq$ est réflexive.

$\boxed{\text{Antisymétrie}}$ Montrons que $\preccurlyeq$ est antisymétrique.

Soient $(x;y) \in E$ et $(x';y') \in E$.

$$\begin{aligned} &(x;y) \preccurlyeq (x';y') \quad \text{et} \quad (x';y') \preccurlyeq (x;y) \\ \implies &\Big((x < x') \quad \text{ou} \quad (x = x' \quad \text{et} \quad y \leqslant y')\Big) \quad \text{et} \quad \Big((x' < x) \quad \text{ou} \quad (x' = x \quad \text{et} \quad y' \leqslant y)\Big) \\ \implies &\Big((x < x') \quad \text{et} \quad (x' < x)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big((x < x') \quad \text{et} \quad (x' = x \quad \text{et} \quad y' \leqslant y)\Big) \\ &\qquad \text{ou} \quad \Big((x = x' \quad \text{et} \quad y \leqslant y') \quad \text{et} \quad (x' < x)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big((x = x' \quad \text{et} \quad y \leqslant y') \quad \text{et} \quad (x' = x \quad \text{et} \quad y' \leqslant y)\Big) \\ \implies &x = x' \quad \text{et} \quad y = y' \\ \implies &(x;y) = (x';y') \end{aligned}$$

Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ Montrons que $\preccurlyeq$ est transitive.

Soient $(x_1;y_1) \in E$, $(x_2;y_2) \in E$ et $(x_3;y_3) \in E$.

$$\begin{aligned} &(x_1;y_1) \preccurlyeq (x_2;y_2) \quad \text{et} \quad (x_2;y_2) \preccurlyeq (x_3;y_3) \\ \implies &\Big((x_1 < x_2) \quad \text{ou} \quad (x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_2)\Big) \quad \text{et} \quad \Big((x_2 < x_3) \quad \text{ou} \quad (x_2 = x_3 \quad \text{et} \quad y_2 \leqslant y_3)\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \Big((x_1 < x_2) \quad \text{et} \quad (x_2 < x_3)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big((x_1 < x_2) \quad \text{et} \quad (x_2 = x_3 \quad \text{et} \quad y_2 \leqslant y_3)\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{ou} \quad \Big((x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_2) \quad \text{et} \quad (x_2 < x_3)\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \text{ou} \quad \Big((x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_2) \quad \text{et} \quad (x_2 = x_3 \quad \text{et} \quad y_2 \leqslant y_3)\Big) \\
&\Longrightarrow (x_1 < x_3) \quad \text{ou} \quad (x_1 < x_3 \quad \text{et} \quad y_2 \leqslant y_3) \quad \text{ou} \quad \Big(y_1 \leqslant y_2 \quad \text{et} \quad (x_1 < x_3)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big((x_1 = x_3 \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_3)\Big) \\
&\Longrightarrow (x_1 < x_3) \quad \text{ou} \quad (x_1 < x_3) \quad \text{ou} \quad (x_1 < x_3) \quad \text{ou} \quad (x_1 = x_3 \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_3) \\
&\Longrightarrow (x_1 < x_3) \quad \text{ou} \quad (x_1 = x_3 \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_3) \\
&\Longrightarrow (x_1; y_1) \preccurlyeq (x_3; y_3)
\end{aligned}
$$

Donc $\preccurlyeq$ est transitive. $\mathcal{R}$

On a montré que $\preccurlyeq$ est réflexive, antisymétrique et transitive, donc par définition, $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

(b) $\boxed{\text{Totalité}}$ Montrons que $\preccurlyeq$ est total.

Soient $(x; y) \in E$ et $(a; b) \in E$.

Pour soulager la reflexion, posons les propositions suivantes :

$$
\begin{array}{ccc}
A : x < a & B : x = a & C : a < x \\
D : y < b & E : y = b & F : b < y
\end{array}
$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
&(x < a \quad \text{ou} \quad x = a \quad \text{ou} \quad a < x) \quad \text{et} \quad (y < b \quad \text{ou} \quad y = b \quad \text{ou} \quad b < y) \\
&\Longrightarrow (A \quad \text{ou} \quad B \quad \text{ou} \quad C) \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E \quad \text{ou} \quad F) \\
&\Longrightarrow \Big(A \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E \quad \text{ou} \quad F)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(B \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E \quad \text{ou} \quad F)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(C \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E \quad \text{ou} \quad F)\Big) \\
&\Longrightarrow A \quad \text{ou} \quad \Big(B \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E \quad \text{ou} \quad F)\Big) \quad \text{ou} \quad C \\
&\Longrightarrow A \quad \text{ou} \quad \Big(B \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E \quad \text{ou} \quad E \quad \text{ou} \quad F)\Big) \quad \text{ou} \quad C \\
&\Longrightarrow A \quad \text{ou} \quad \Bigg(\Big(B \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(B \quad \text{et} \quad (E \quad \text{ou} \quad F)\Big)\Bigg) \quad \text{ou} \quad C \\
&\Longrightarrow A \quad \text{ou} \quad \Big(B \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E)\Big) \quad \text{ou} \quad C \quad \text{ou} \quad \Big(B \quad \text{et} \quad (E \quad \text{ou} \quad F)\Big) \\
&\Longrightarrow \Bigg(A \quad \text{ou} \quad \Big(B \quad \text{et} \quad (D \quad \text{ou} \quad E)\Big)\Bigg) \quad \text{ou} \quad \Bigg(C \quad \text{ou} \quad \Big(B \quad \text{et} \quad (E \quad \text{ou} \quad F)\Big)\Bigg) \\
&\Longrightarrow \Bigg((x < a) \quad \text{ou} \quad \Big(x = a \quad \text{et} \quad (y < b \quad \text{ou} \quad y = b)\Big)\Bigg) \\
&\qquad\quad \text{ou} \quad \Bigg((a < x) \quad \text{ou} \quad \Big(x = a \quad \text{et} \quad (y = b \quad \text{ou} \quad b < y)\Big)\Bigg) \\
&\Longrightarrow \Big((x < a) \quad \text{ou} \quad (x = a \quad \text{et} \quad y \leqslant b)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big((a < x) \quad \text{ou} \quad (a = x \quad \text{et} \quad b \leqslant y)\Big) \\
&\Longrightarrow (x; y) \preccurlyeq (a; b) \quad \text{ou} \quad (a; b) \preccurlyeq (x; y)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\forall (x; y) \in E, \forall (a; b) \in E, \; (x; y) \preccurlyeq (a; b) \quad \text{ou} \quad (a; b) \preccurlyeq (x; y)
$$

Autrement dit, la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est total.

(c) Pour représenter un diagramme il faut d'abord déterminer les éléments en relations entre eux. Par exemple

$$\begin{aligned} -1 < 0,5 &\implies (-1 < 0,5) \quad \text{ou} \quad (-1 = 0,5 \ \text{ et } \ 1 \leqslant -1) \\ &\implies (-1;1) \preccurlyeq (0,5;-1) \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} -1 = -1 \ \text{ et } \ 0 \leqslant 1 &\implies (-1 < -1) \quad \text{ou} \quad (-1 = -1 \ \text{ et } \ 0 \leqslant 1) \\ &\implies (-1;0) \preccurlyeq (-1;1) \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement à tous les éléments de l'ensemble entre eux on obtient

$$(-1;0) \preccurlyeq (-1;1) \preccurlyeq (-0,5;1) \preccurlyeq (0;1) \preccurlyeq (0,5;-1) \preccurlyeq (0,5;1) \preccurlyeq (1;1)$$

Donc la représentation par le diagramme de Hasse de l'ensemble

$$\{(-1;1)\,;(0,5;-1)\,;(0;1)\,;(-1;0)\,;(1;1)\,;(0,5;1)\,;(-0,5;1)\}$$

muni de l'ordre $\preccurlyeq$ est

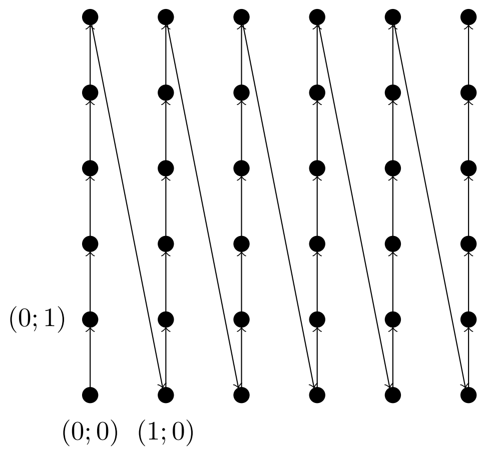
$$\begin{array}{c} (1;1) \\ | \\ (0,5;1) \\ | \\ (0,5;-1) \\ | \\ (0;1) \\ | \\ (-0,5;1) \\ | \\ (-1;1) \\ | \\ (-1;0) \end{array}$$

2.

Note à moi-même : Réponse à vérifier plus tard

Remarque : Aucun exemple de réponse n'a été trouvé. Donc la réponse qui suit est dû à mon intuition.

La représentation graphique de l'ordre lexicographique sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ est



Exercice 7. On définite sur $\mathbb{N}^2$ la relation $\lhd$ par

$$\forall (x_1;y_1) \in \mathbb{N}^2, \forall (x_2;y_2) \in \mathbb{N}^2,\ (x_1;y_1) \lhd (x_2;y_2) \iff \begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \\ y_1 \leqslant y_2 \end{cases}$$

1. Montrer que cette relation est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?

2. Soit $A = \{(2;2)\,;(1;5)\,;(3;0)\,;(4;2)\}$. Donner un majorant et un minorant de A.

Correction de l'exercice 7.

1. $\boxed{\text{Réflexivité}}$ Montrons que $\lhd$ est réflexive.

Soit $(x;y) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = x \\ y = y \end{cases} &\implies \begin{cases} x \leqslant x \\ y \leqslant y \end{cases} \\ &\implies (x;y) \lhd (x;y) \end{aligned}$$

Donc $\lhd$ est réflexive.

$\boxed{\text{Antisymétrie}}$ Montrons que $\lhd$ est antisymétrique.

Soient $(x_1;y_1) \in \mathbb{N}^2$ et $(x_2;y_2) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} (x_1;y_1) \lhd (x_2;y_2) \quad \text{et} \quad (x_2;y_2) \lhd (x_1;y_1) &\implies \begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \\ y_1 \leqslant y_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 \leqslant x_1 \\ y_2 \leqslant y_1 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \\ y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_1 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \\ &\implies (x_1;y_1) = (x_2;y_2) \end{aligned}$$

Donc $\lhd$ est antisymétrique.

$\boxed{\text{Transtitivité}}$ Montrons que $\lhd$ est transitive.

Soient $(x_1;y_1)\in\mathbb{N}^2$, $(x_2;y_2)\in\mathbb{N}^2$ et $(x_3;y_3)\in\mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}
(x_1;y_1)\lhd(x_2;y_2) \quad\text{et}\quad (x_2;y_2)\lhd(x_3;y_3) &\implies \begin{cases} x_1\leqslant x_2 \\ y_1\leqslant y_2\end{cases} \quad\text{et}\quad \begin{cases} x_2\leqslant x_3 \\ y_2\leqslant y_3\end{cases}\\
&\implies \begin{cases} x_1\leqslant x_2\leqslant x_3 \\ y_1\leqslant y_2\leqslant y_3\end{cases}\\
&\implies \begin{cases} x_1\leqslant x_3 \\ y_1\leqslant y_3\end{cases}\\
&\implies (x_1;y_1)\lhd(x_3;y_3)
\end{aligned}$$

Donc $\lhd$ est transtitive

On a montré que $\lhd$ est réflexive, antisymétrique et transitive, donc par définition, $\lhd$ est une relation d'ordre.

$\boxed{\text{Totalité}}$ Montrons que $\lhd$ n'est pas total. Autrement dit

$$\begin{aligned}
\lhd \text{ n'est pas total} &\iff \neg\,(\lhd \text{ est total})\\
&\iff \neg\Big(\forall\,(x_1;y_1)\in\mathbb{N}^2,\forall\,(x_2;y_2)\in\mathbb{N}^2,\ (x_1;y_1)\lhd(x_2;y_2)\quad\text{ou}\quad(x_2;y_2)\lhd(x_1;y_1)\Big)\\
&\iff \exists\,(x_1;y_1)\in\mathbb{N}^2,\exists\,(x_2;y_2)\in\mathbb{N}^2,\ (x_1;y_1)\not\lhd(x_2;y_2)\quad\text{et}\quad(x_2;y_2)\not\lhd(x_1;y_1)
\end{aligned}$$

Soient $(x_1;y_1)\in\mathbb{N}^2$ et $(x_2;y_2)\in\mathbb{N}^2$ tel que $(x_1;y_1)=(1;0)$ et $(x_2;y_2)=(0;1)$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 0<1 \\ 0<1\end{cases} &\implies \begin{cases} x_2<x_1 \\ y_1<y_2\end{cases}\\
&\implies \begin{cases} x_1\not\leqslant x_2 \\ y_1\leqslant y_2\end{cases} \quad\text{et}\quad \begin{cases} x_2<x_1 \\ y_2\not\leqslant y_1\end{cases}\\
&\implies (x_1;y_1)\not\lhd(x_2;y_2)\quad\text{et}\quad(x_2;y_2)\not\lhd(x_1;y_1)
\end{aligned}$$

Donc $\lhd$ n'est pas total.

2. $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ est un minorant si

$$\forall\,(x;y)\in A,\ (m;n)\lhd(x;y)$$

$(M,N)\in\mathbb{N}^2$ est un majorant si

$$\forall\,(x;y)\in A,\ (x;y)\lhd(M;N)$$

On remarque que

$$\begin{cases} 0\leqslant 1\leqslant 2\leqslant 3\leqslant 4\leqslant 5 \\ 0\leqslant 0\leqslant 2\leqslant 2\leqslant 5\leqslant 5\end{cases}$$

Donc $(0;0)$ est un minorant de A et $(5;5)$ est un majorant de A.

Exercice 8. Soit $\preccurlyeq$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{N},\forall y\in\mathbb{N},\ x\preccurlyeq y \iff \Big((x=y)\vee(y\leqslant x\leqslant 100)\Big)$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Est-ce une relation d'ordre total ?

2. Soit $E = \{3; 4; 55; 6; 10; 92\}$. Donner le plus grand et le plus petit élément de l'ensemble E pour la relatio $\preccurlyeq$.

Correction de l'exercice 8.

1. $\boxed{\text{Réflexivité}}$ Montrons que $\preccurlyeq$ est réflexive.

Soit $x \in \mathbb{N}$. Par définition de l'égalité, $x = x$.

$$\begin{aligned} x = x &\implies \Big((x = x) \vee (x \leqslant x \leqslant 100)\Big) \\ &\implies x \preccurlyeq x \end{aligned}$$

Donc $\preccurlyeq$ est réflexive.

$\boxed{\text{Antisymétrie}}$ Montrons que $\preccurlyeq$ est antisymétrique.

Soient $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq x) &\implies \Big((x = y) \vee (y \leqslant x \leqslant 100)\Big) \wedge \Big((y = x) \vee (x \leqslant y \leqslant 100)\Big) \\ &\implies \bigg((x = y) \wedge \Big((y = x) \vee (x \leqslant y \leqslant 100)\Big)\bigg) \\ &\qquad \vee \bigg((y \leqslant x \leqslant 100) \wedge \Big((y = x) \vee (x \leqslant y \leqslant 100)\Big)\bigg) \\ &\implies (x = y) \vee \bigg(\Big((y \leqslant x \leqslant 100) \wedge (y = x)\Big) \vee \Big((y \leqslant x \leqslant 100) \wedge (x \leqslant y \leqslant 100)\Big)\bigg) \\ &\implies (x = y) \vee \bigg(\Big((y = x)\Big) \vee (x \leqslant y \leqslant x \leqslant 100)\bigg) \\ &\implies (x = y) \vee (y = x) \vee (x = y) \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ Montrons que $\preccurlyeq$ est transitive.

Soient $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq z) &\implies \Big((x = y) \vee (y \leqslant x \leqslant 100)\Big) \wedge \Big((y = z) \vee (z \leqslant y \leqslant 100)\Big) \\ &\implies \bigg((x = y) \wedge \Big((y = z) \vee (z \leqslant y \leqslant 100)\Big)\bigg) \\ &\qquad \vee \bigg((y \leqslant x \leqslant 100) \wedge \Big((y = z) \vee (z \leqslant y \leqslant 100)\Big)\bigg) \\ &\implies \Big((x = z) \vee (z \leqslant x \leqslant 100)\Big) \\ &\qquad \vee \bigg(\Big((y \leqslant x \leqslant 100) \wedge (y = z)\Big) \vee \Big((y \leqslant x \leqslant 100) \wedge (z \leqslant y \leqslant 100)\Big)\bigg) \\ &\implies \Big((x = z) \vee (z \leqslant x \leqslant 100)\Big) \vee \Big((z \leqslant x \leqslant 100) \vee (z \leqslant y \leqslant x \leqslant 100)\Big) \\ &\implies (x = z) \vee (z \leqslant x \leqslant 100) \vee (z \leqslant x \leqslant 100) \vee (z \leqslant x \leqslant 100) \\ &\implies (x = z) \vee (z \leqslant x \leqslant 100) \\ & x \preccurlyeq z \end{aligned}$$

Donc $\preccurlyeq$ est transitive.

On a montré que $\preccurlyeq$ est réflexive, antisymétrique et transitive, donc par définition, $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

$\boxed{\text{Totalité}}$ $\preccurlyeq$ n'est pas total car 101 et 102 ne sont pas comparable. En effet,

$$(101 \neq 102) \wedge (101 \leqslant 102 \nleqslant 100) \implies (101 \not\preccurlyeq 102) \wedge (102 \not\preccurlyeq 101)$$

2. Il faut déterminer les éléments en relation entre eux.

$$\begin{aligned} 3 \leqslant 4 \leqslant 6 \leqslant 10 \leqslant 55 \leqslant 92 &\implies 3 \leqslant 4 \leqslant 6 \leqslant 10 \leqslant 55 \leqslant 92 \leqslant 100 \\ &\implies (92 = 55 = 10 = 6 = 4 = 3) \vee (3 \leqslant 4 \leqslant 6 \leqslant 10 \leqslant 55 \leqslant 92 \leqslant 100) \\ &\implies 92 \preccurlyeq 55 \preccurlyeq 10 \preccurlyeq 6 \preccurlyeq 4 \preccurlyeq 3 \end{aligned}$$

Donc le plus petit élément de l'ensemble E par la relation $\preccurlyeq$ est 92 et le plus grand élément de E est 3.

TD n° 5

Groupes

Exercice 1. Soient $(E;T)$ et $(E';T')$ deux ensembles munis d'une loi de composition interne et soit $f\colon E \to E'$ un morphisme surjectif de $(E;T)$ dans $(E';T')$.

1. Montrer les implications suivantes :

(a) T associative $\Longrightarrow$ T' associative.

(b) T admet un élément neutre $\Longrightarrow$ T' admet un élément neutre.

(c) Tout élément de E admet un symétrique pour T $\Longrightarrow$ Tout élément de E' admet un symétrique pour T'.

(d) T commutative $\Longrightarrow$ T' commutative.

2. (a) Montrer que si $(E;T)$ est un groupe, alors $(E';T')$ aussi.

(b) Montrer que si de plus $(E;T)$ est abélien, alors $(E';T')$ aussi.

Correction de l'exercice 1.

1. (a)

$$
\begin{aligned}
& T \text{ associative sur } E \\
\Longrightarrow\ & \forall x,y,z \in E,\ (xTy)\,Tz = xT\,(yTz) \\
\Longrightarrow\ & \forall x,y,z \in E,\ f\left((xTy)\,Tz\right) = f\left(xT\,(yTz)\right) \\
\overset{f\ \text{morphisme}}{\Longrightarrow}\ & \forall x,y,z \in E,\ f\,(xTy)\,T'f\,(z) = f\,(x)\,T'f\,(yTz) \\
\overset{f\ \text{morphisme}}{\Longrightarrow}\ & \forall x,y,z \in E,\ \Big(f\,(x)\,T'f\,(y)\Big)T'f\,(z) = f\,(x)\,T'\Big(f\,(y)\,T'f\,(z)\Big) \\
\overset{f\ \text{surjective}}{\Longrightarrow}\ & \forall x,y,z \in E,\ \Big(f\,(x)\,T'f\,(y)\Big)T'f\,(z) = f\,(x)\,T'\Big(f\,(y)\,T'f\,(z)\Big) \wedge \big(f \text{ surjective de } E \text{ dans } E'\big) \\
\Longrightarrow\ & \Big(\forall x,y,z \in E,\ \Big(f\,(x)\,T'f\,(y)\Big)T'f\,(z) = f\,(x)\,T'\Big(f\,(y)\,T'f\,(z)\Big)\Big) \\
& \quad \wedge \Big(\forall a,b,c \in E', \exists \alpha,\beta,\gamma \in E,\ f\,(\alpha) = a \wedge f\,(\beta) = b \wedge f\,(\gamma) = c\Big) \\
\Longrightarrow\ & \forall x,y,z \in E, \forall a,b,c \in E', \exists \alpha,\beta,\gamma \in E,\ \Big(\Big(f\,(x)\,T'f\,(y)\Big)T'f\,(z) = f\,(x)\,T'\Big(f\,(y)\,T'f\,(z)\Big)\Big) \\
& \qquad \wedge \Big(f\,(\alpha) = a \wedge f\,(\beta) = b \wedge f\,(\gamma) = c\Big) \\
\Longrightarrow\ & \forall a,b,c \in E', \forall x,y,z \in E, \exists \alpha,\beta,\gamma \in E,\ \Big(\Big(f\,(x)\,T'f\,(y)\Big)T'f\,(z) = f\,(x)\,T'\Big(f\,(y)\,T'f\,(z)\Big)\Big) \\
& \qquad \wedge \Big(f\,(\alpha) = a \wedge f\,(\beta) = b \wedge f\,(\gamma) = c\Big) \\
\Longrightarrow\ & \forall a,b,c \in E', \exists x,y,z \in E, \exists \alpha,\beta,\gamma \in E,\ \Big(\Big(f\,(x)\,T'f\,(y)\Big)T'f\,(z) = f\,(x)\,T'\Big(f\,(y)\,T'f\,(z)\Big)\Big) \\
& \qquad \wedge (x = \alpha) \wedge (y = \beta) \wedge (z = \gamma) \wedge \Big(f\,(\alpha) = a \wedge f\,(\beta) = b \wedge f\,(\gamma) = c\Big) \\
\Longrightarrow\ & \forall a,b,c \in E', \exists \alpha,\beta,\gamma \in E,\ \Big(\Big(f\,(\alpha)\,T'f\,(\beta)\Big)T'f\,(\gamma) = f\,(\alpha)\,T'\Big(f\,(\beta)\,T'f\,(\gamma)\Big)\Big) \\
& \qquad \wedge \Big(f\,(\alpha) = a \wedge f\,(\beta) = b \wedge f\,(\gamma) = c\Big) \\
\Longrightarrow\ & \forall a,b,c \in E',\ (aT'b)\,T'c = aT'\,(bT'c) \\
\Longrightarrow\ & T' \text{ associative sur } E'
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
& T \text{ admet un élément neutre sur } E \\
\Longrightarrow\ & \exists e \in E, \forall x \in E,\ (xTe = x) \wedge (eTx = x) \\
\Longrightarrow\ & \exists e \in E, \forall x \in E,\ \big(f\,(xTe) = f\,(x)\big) \wedge \big(f\,(eTx) = f\,(x)\big)
\end{aligned}
$$

$$\overset{f \text{ morphisme}}{\Longrightarrow} \exists e \in E, \forall x, \in E,\ \big(f(x)\,T'f(e) = f(x)\big) \wedge \big(f(e)\,T'f(x) = f(x)\big)$$

$$\Longrightarrow \exists e' \in E', \exists e \in E, \forall x, \in E,\ \big(f(x)\,T'f(e) = f(x)\big) \wedge \big(f(e)\,T'f(x) = f(x)\big) \wedge \big(f(e) = e'\big)$$

$$\Longrightarrow \exists e' \in E', \forall x, \in E,\ \big(f(x)\,T'e' = f(x)\big) \wedge \big(e'T'f(x) = f(x)\big)$$

$$\Longrightarrow \exists e' \in E', \forall f(x), \in f(E),\ \big(f(x)\,T'e' = f(x)\big) \wedge \big(e'T'f(x) = f(x)\big)$$

$$\Longrightarrow \exists e' \in E', \forall y, \in f(E),\ \big(yT'e' = y\big) \wedge \big(e'T'y = y\big)$$

$$\Longrightarrow \exists e' \in E', \forall y, \in \{b \in E' \mid \exists a \in E,\ b = f(a)\},\ \big(yT'e' = y\big) \wedge \big(e'T'y = y\big)$$

$$\overset{f \text{ surjective}}{\Longrightarrow} \exists e' \in E', \forall y, \in E',\ \big(yT'e' = y\big) \wedge \big(e'T'y = y\big)$$

$$\Longrightarrow T' \text{ admet un élément neutre sur } E'$$

(c) Tout élément de E admet un symétrique pour T

$$\Longrightarrow \exists e \in E, \forall x \in E, \exists y \in E,\ (xTy = e) \wedge (yTx = e)$$

$$\Longrightarrow \exists e \in E, \forall x \in E, \exists y \in E,\ \big(f(xTy) = f(e)\big) \wedge \big(f(yTx) = f(e)\big)$$

$$\Longrightarrow \exists e' \in E', \forall x \in E, \exists y \in E,\ \big(f(xTy) = e'\big) \wedge \big(f(yTx) = e'\big)$$

$$\overset{f \text{ morphisme}}{\Longrightarrow} \exists e' \in E', \forall x \in E, \exists y \in E,\ \big(f(x)\,T'f(y) = e'\big) \wedge \big(f(y)\,T'f(x) = e'\big)$$

$$\overset{f \text{ surjective}}{\Longrightarrow} \exists e' \in E', \forall x' \in E', \exists y' \in E',\ \big(x'T'y' = e'\big) \wedge \big(y'T'x' = e'\big)$$

$$\Longrightarrow \text{Tout élément de } E' \text{ admet un symétrique pour } T'$$

(d)

$$T \text{ comutative sur } E \Longrightarrow \forall x, y \in E,\ xTy = yTx$$

$$\Longrightarrow \forall x, y \in E,\ f(xTy) = f(yTx)$$

$$\overset{f \text{ morphisme}}{\Longrightarrow} \forall x, y \in E,\ f(x)\,T'f(y) = f(y)\,T'f(x)$$

$$\overset{f \text{ surjective}}{\Longrightarrow} \forall x', y' \in E',\ x'T'y' = y'T'x'$$

$$\Longrightarrow T' \text{ comutative sur } E'$$

2. (a)

$$(E;T) \text{ est un groupe} \Longrightarrow \begin{cases} \forall x, y, z \in E,\ (xTy)\,Tz = xT\,(yTz) \\ \exists e \in E, \forall x \in E,\ (xTe = x) \wedge (eTx = x) \\ \exists e \in E, \forall x \in E, \exists y \in E,\ (xTy = e) \wedge (yTx = e) \end{cases}$$

$$\overset{\text{d'après 5.1.1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \forall a, b, c \in E',\ (aT'b)\,T'c = aT'\,(bT'c) \\ \exists e' \in E', \forall y, \in E',\ \big(yT'e' = y\big) \wedge \big(e'T'y = y\big) \\ \exists e' \in E', \forall x' \in E', \exists y' \in E',\ \big(x'T'y' = e'\big) \wedge \big(y'T'x' = e'\big) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (E';T')\,T \text{ est un groupe}$$

(b)

$$(E;T) \text{ est un groupe abélien} \Longrightarrow \begin{cases} (E;T) \text{ est un groupe} \\ T \text{ comutative sur } E \end{cases}$$

$$\overset{\text{d'après 5.1.1.d et 5.1.2.a}}{\Longrightarrow} \begin{cases} (E';T') \text{ est un groupe} \\ T' \text{ comutative sur } E \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (E';T')\,T \text{ est un groupe abélien}$$

Exercice 2. Montrer que la relation $\simeq$ définie par : $G \simeq H \Leftrightarrow G$ est isomorphe à H, est une relation d'équivalence sur tout ensemble de groupes.

Correction de l'exercice 2.

$\boxed{\text{Réflexivité}}$ Montrons que $\simeq$ est réflexive.

Soit G un groupe. Considérons l'application identité $\text{Id}_G : G \to G$ définie par $x \mapsto x$.

Id_G est bijective (par définition de l'identité).

De plus, Id_G est un morphisme de groupes car pour tous $x, y \in G$:

$$\text{Id}_G(x \cdot y) = x \cdot y = \text{Id}_G(x) \cdot \text{Id}_G(y).$$

L'application Id_G est donc un isomorphisme de G vers lui-même, ce qui prouve que $G \simeq G$. La relation est réflexive.

$\boxed{\text{Symétrie}}$ Montrons que $\simeq$ est symétrique.

Supposons $G \simeq H$.

Donc G est isomorphe à H. Donc il existe donc un isomorphisme $f : G \to H$.

Comme f est bijective (par définition d'isomorphisme), il existe l'application réciproque $f^{-1} : H \to G$ qui est également bijective (propriété du théorème de l'inverse bijectif 2.3.4 du cours).

Montrons que f^{-1} est un morphisme de groupes.

Soient $u, v \in H$. Puisque f est surjective, il existe $x, y \in G$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$. On a :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(u \cdot v) &= f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) \\
&= f^{-1}(f(x \cdot y)) && \text{(car } f \text{ est un morphisme)} \\
&= x \cdot y \\
&= f^{-1}(u) \cdot f^{-1}(v).
\end{aligned}$$

L'application f^{-1} est donc un isomorphisme de H vers G, ce qui prouve que $H \simeq G$. La relation est symétrique.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ Montrons que $\simeq$ est transitive.

Supposons $G \simeq H$ et $H \simeq K$. Il existe donc des isomorphismes $f : G \to H$ et $g : H \to K$.

La composée $g \circ f : G \to K$ est bijective, car la composée de deux bijections est une bijection.

Montrons que $g \circ f$ est un morphisme de groupes. Pour tous $x, y \in G$:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x \cdot y) &= g(f(x \cdot y)) \\
&= g(f(x) \cdot f(y)) && \text{(car } f \text{ est un morphisme)} \\
&= g(f(x)) \cdot g(f(y)) && \text{(car } g \text{ est un morphisme)} \\
&= (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y).
\end{aligned}$$

La composée $g \circ f$ est donc un isomorphisme de G vers K, ce qui prouve que $G \simeq K$. La relation est transitive.

Conclusion : La relation $\simeq$ est réflexive, symétrique et transitive sur tout ensemble de groupes. C'est donc bien une relation d'équivalence.

Exercice 3. *Sous-groupes de $\mathbb{Z}$.*

On rappelle que $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe abélien. On s'intéresse dans cet exercice à la forme de ses sous-groupes.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on note $k\mathbb{Z} = \{kn; n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $k\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

2. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

  (a) Montrer que si $k \in G$, alors $k\mathbb{Z} \subset G$.

  (b) Soit $k = \min\{\ell \in \mathbb{N}^*, \ell \in G\}$. Montrer que $G = k\mathbb{Z}$.

3. Conclure sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, et montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont isomorphes, en dehors du sous-groupe $\{0\}$.

Correction de l'exercice 3.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrons que $k\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

Non-vide : $0 = k \times 0 \in k\mathbb{Z}$, donc $k\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

Stable par addition : Soient $x, y \in k\mathbb{Z}$. Alors $\exists n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $x = kn$ et $y = km$.

$$x + y = kn + km = k(n+m)$$

Comme $n + m \in \mathbb{Z}$, on a $x + y \in k\mathbb{Z}$.

Stable par passage à l'opposé : Soit $x \in k\mathbb{Z}$. Alors $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = kn$.

$$-x = -(kn) = k(-n)$$

Comme $-n \in \mathbb{Z}$, on a $-x \in k\mathbb{Z}$.

Donc $k\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

2. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

  (a) Soit $k \in G$. Montrons que $k\mathbb{Z} \subset G$.

  Soit $x \in k\mathbb{Z}$. Alors $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = kn$.

  — Si $n \geqslant 0$, alors $x = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n \text{ fois}}$. Comme G est stable par addition et $k \in G$, on a $x \in G$.

  — Si $n < 0$, alors $x = -(\underbrace{k + k + \cdots + k}_{|n| \text{ fois}})$. Comme G est stable par addition et passage à l'opposé, on a $x \in G$.

  Donc $k\mathbb{Z} \subset G$.

  (b) Soit $k = \min\{\ell \in \mathbb{N}^*, \ell \in G\}$. Montrons que $G = k\mathbb{Z}$.

  D'après la question précédente, comme $k \in G$, on a $k\mathbb{Z} \subset G$.

  Réciproquement, soit $x \in G$. Effectuons la division euclidienne de x par k :

$$\exists q \in \mathbb{Z}, \exists r \in \mathbb{N}, \quad x = kq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < k$$

  Comme $x \in G$ et $kq \in k\mathbb{Z} \subset G$, et que G est un sous-groupe, on a $r = x - kq \in G$.

  Or $0 \leqslant r < k$ et k est le plus petit élément strictement positif de G. Donc nécessairement $r = 0$.

  Ainsi $x = kq \in k\mathbb{Z}$. Donc $G \subset k\mathbb{Z}$.

  Finalement, $G = k\mathbb{Z}$.

3. **Conclusion :** Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement les $k\mathbb{Z}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

   Isomorphisme : Soient $k\mathbb{Z}$ et $m\mathbb{Z}$ deux sous-groupes non nuls de $\mathbb{Z}$ (avec $k, m \in \mathbb{N}^*$).

   Considérons l'application $f : k\mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}$ définie par $f(kn) = mn$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

   — f est bien définie : si $kn = kn'$, alors $n = n'$ (car $k \neq 0$), donc $mn = mn'$.

   — f est un morphisme : $f(kn + kn') = f(k(n + n')) = m(n + n') = mn + mn' = f(kn) + f(kn')$.

   — f est bijective : l'application réciproque est $g : m\mathbb{Z} \to k\mathbb{Z}$ définie par $g(mn) = kn$.

   Donc tous les sous-groupes non nuls de $\mathbb{Z}$ sont isomorphes entre eux (et isomorphes à $\mathbb{Z}$).

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien et que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $x\mathcal{R}y \iff x - y \in n\mathbb{Z}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$, et qu'elle est égale à la relation de congruence modulo n. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{k}$ sa classe.
2. Définir une lci sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, notée aussi $+$, telle que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ soit un groupe (ou telle que $k \mapsto \overline{k}$ soit un morphisme).
3. Vérifier que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est abélien.

Correction de l'exercice 4.

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

   Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a $x - x = 0 = n \times 0 \in n\mathbb{Z}$, donc $x\mathcal{R}x$.

   Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$. Alors $x - y \in n\mathbb{Z}$, donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = nk$. Alors $y - x = -nk = n(-k) \in n\mathbb{Z}$, donc $y\mathcal{R}x$.

   Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $x - y \in n\mathbb{Z}$ et $y - z \in n\mathbb{Z}$, donc $\exists k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = nk$ et $y - z = nk'$. Alors $x - z = (x - y) + (y - z) = nk + nk' = n(k + k') \in n\mathbb{Z}$, donc $x\mathcal{R}z$.

   Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   De plus, $x\mathcal{R}y \iff x - y \in n\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = nk \iff x \equiv y \pmod{n}$. Donc $\mathcal{R}$ est la relation de congruence modulo n.

2. Définissons la loi $+$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par :

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{Z}$$

   Bien définie : Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ tels que $\overline{x} = \overline{x'}$ et $\overline{y} = \overline{y'}$. Alors $x \equiv x' \pmod{n}$ et $y \equiv y' \pmod{n}$, donc $x + y \equiv x' + y' \pmod{n}$. Ainsi $\overline{x + y} = \overline{x' + y'}$, donc la loi est bien définie.

   Structure de groupe :

   — **Associativité :** $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x + y} + \overline{z} = \overline{(x + y) + z} = \overline{x + (y + z)} = \overline{x} + \overline{y + z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$.

   — **Élément neutre :** $\overline{0}$ est l'élément neutre car $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x + 0} = \overline{x}$.

   — **Symétrique :** Pour tout $\overline{x}$, son symétrique est $\overline{-x}$ car $\overline{x} + \overline{-x} = \overline{x + (-x)} = \overline{0}$.

   Donc $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

3. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est abélien car pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} = \overline{y + x} = \overline{y} + \overline{x}$$

   car l'addition dans $\mathbb{Z}$ est commutative.

Exercice 5. Morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

1. Montrer que si f est un homomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$, alors $f(\mathbb{Z}) = f(1)\mathbb{Z}$.
2. Déterminer la forme des homomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Quels sont ceux qui sont injectifs ? Surjectifs ?

Correction de l'exercice 5.

1. Soit $f : \mathbb{Z} \to G$ un homomorphisme de groupes (où G est un groupe noté additivement).

   Soit $x \in \mathbb{Z}$. Alors :

   — Si $x \geqslant 0$, $f(x) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{x \text{ fois}}) = \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{x \text{ fois}} = xf(1)$.

   — Si $x < 0$, $f(x) = f(-(-x)) = -f(-x) = -((-x)f(1)) = xf(1)$.

   Donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = xf(1)$.

   Ainsi, $f(\mathbb{Z}) = \{xf(1) \mid x \in \mathbb{Z}\} = f(1)\mathbb{Z}$.

2. D'après la question précédente, tout homomorphisme $f : \mathbb{Z} \to G$ est de la forme $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

   Réciproquement, pour tout $a \in G$, l'application $f_a : \mathbb{Z} \to G$ définie par $f_a(x) = xa$ est un homomorphisme car :

   $$f_a(x + y) = (x + y)a = xa + ya = f_a(x) + f_a(y)$$

   Injectivité : f est injective $\iff$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

   Or $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{Z} \mid xf(1) = 0\}$.

   — Si $f(1)$ est d'ordre infini dans G, alors $xf(1) = 0 \iff x = 0$, donc f est injective.

   — Si $f(1)$ est d'ordre fini n dans G, alors $\mathrm{Ker}(f) = n\mathbb{Z} \neq \{0\}$, donc f n'est pas injective.

   Surjectivité : f est surjective $\iff$ $f(\mathbb{Z}) = G$ $\iff$ $f(1)\mathbb{Z} = G$ $\iff$ G est monogène (engendré par $f(1)$).

Exercice 6. **1.** Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont isomorphes.

2. Montrer que $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.
3. En déduire que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Correction de l'exercice 6.

1. Considérons l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

   — exp est un morphisme : $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

   — exp est bijective (c'est un résultat d'analyse).

   Donc $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont isomorphes.

2. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$.

   On peut écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$.

   Alors $\frac{p^2}{q^2} = 2$, donc $p^2 = 2q^2$.

   Ainsi p^2 est pair, donc p est pair. Écrivons $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   Alors $(2k)^2 = 2q^2$, donc $4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$.

   Ainsi q^2 est pair, donc q est pair.

   Mais alors p et q sont tous les deux pairs, donc $\mathrm{pgcd}(p, q) \geqslant 2$, ce qui contredit $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$.

   Donc $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe un isomorphisme $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

Soit $a = f(1) \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = a^x$ (en adaptant la preuve de l'exercice 5.5).

En particulier, $f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f(1) = a$.

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est une solution de $x^2 = a$ dans $\mathbb{Q}_+^*$.

Mais d'après la question 2, si $a = 2$, cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Contradiction. Donc $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 7. Sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, on considère la loi : $x * y = x + y - xy$, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\})^2$. Montrer que $*$ est une loi de composition interne. $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est-il un groupe ?

Correction de l'exercice 7. Loi de composition interne : Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Supposons que $x * y = 1$. Alors $x + y - xy = 1$, donc $x + y - xy - 1 = 0$, donc $(x - 1)(1 - y) = 0$.
Donc $x = 1$ ou $y = 1$, ce qui est absurde.
Donc $x * y \neq 1$, donc $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Ainsi $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Structure de groupe :

— **Associativité :** Soient $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x + y - xy) * z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * (y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ &= x + y + z - yz - xy - xz + xyz\end{aligned}$$

Donc $(x * y) * z = x * (y * z)$.

— **Élément neutre :** Cherchons $e \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $x * e = x$ pour tout x.

$$x * e = x \iff x + e - xe = x \iff e(1 - x) = 0$$

Comme ceci doit être vrai pour tout $x \neq 1$, on doit avoir $e = 0$.

Vérifions : $x * 0 = x + 0 - x \times 0 = x$ et $0 * x = 0 + x - 0 \times x = x$.

Donc 0 est l'élément neutre.

— **Symétrique :** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Cherchons $x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $x * x' = 0$.

$$x * x' = 0 \iff x + x' - xx' = 0 \iff x'(1 - x) = -x \iff x' = \frac{x}{x - 1}$$

Comme $x \neq 1$, on a $x' \in \mathbb{R}$. De plus, si $x' = 1$, alors $\frac{x}{x-1} = 1$, donc $x = x - 1$, donc $0 = -1$, absurde.

Donc $x' = \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est le symétrique de x.

Donc $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est un groupe.

Exercice 8. Soit X un ensemble. On munit l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X de la différence symétrique Δ définie par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ est un groupe abélien.

Correction de l'exercice 8. D'après l'exercice 3.4 du TD3, on a montré que pour toutes parties A, B, C de E :

— $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (associativité)

— $A\Delta B = B\Delta A$ (commutativité)

De plus :

— **Élément neutre :** $A\Delta\emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$.

Donc $\emptyset$ est l'élément neutre.

— **Symétrique :** $A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Donc chaque élément est son propre symétrique.

Donc $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ est un groupe abélien.

Exercice 9. Soient $(G, *)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G et $f(G)$ un sous-groupe de H.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$ où e est l'élément neutre de G.
3. Montrer que pour tout $x, y \in G$, $f(x) = f(y) \iff x * y^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$.
4. Montrer que la relation définie par $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur G. Pour tout $x \in G$, on notera $\overline{x}$ la classe de x.
5. Montrer que $\overline{f} : G/\mathcal{R} \to H$, $\overline{x} \mapsto f(x)$ est une application bien définie. Que vaut $\overline{f}^{-1}(\{e'\})$ où e' est l'élément neutre de H ?

Correction de l'exercice 9. Notons e l'élément neutre de G et e' celui de H.

1. **$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G :**

   Rappel : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$.

   — $f(e) = e'$ (car f est un morphisme), donc $e \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$.

   — Soient $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = e'$ et $f(y) = e'$.

   $$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) = e' \cdot e' = e'$$

   Donc $x * y \in \mathrm{Ker}(f)$.

   — Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = e'$.

   $$f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = (e')^{-1} = e'$$

   Donc $x^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$.

   $f(G)$ est un sous-groupe de H :

   — $f(e) = e' \in f(G)$, donc $f(G) \neq \emptyset$.

   — Soient $u, v \in f(G)$. Alors $\exists x, y \in G$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$.

   $$u \cdot v = f(x) \cdot f(y) = f(x * y) \in f(G)$$

   — Soit $u \in f(G)$. Alors $\exists x \in G$ tel que $u = f(x)$.

   $$u^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in f(G)$$

2. Injectivité :

($\Rightarrow$) Supposons f injective. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = e' = f(e)$. Comme f est injective, $x = e$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$.

($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$. Soient $x, y \in G$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x) \cdot f(y)^{-1} = e'$, donc $f(x * y^{-1}) = e'$. Donc $x * y^{-1} \in \mathrm{Ker}(f) = \{e\}$, donc $x * y^{-1} = e$, donc $x = y$. Ainsi f est injective.

3. Soient $x, y \in G$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff f(x) \cdot f(y)^{-1} = e' \\ &\iff f(x * y^{-1}) = e' \\ &\iff x * y^{-1} \in \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

4. Relation d'équivalence :

— **Réflexivité :** $f(x) = f(x)$, donc $x\mathcal{R}x$.

— **Symétrie :** Si $x\mathcal{R}y$, alors $f(x) = f(y)$, donc $f(y) = f(x)$, donc $y\mathcal{R}x$.

— **Transitivité :** Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, donc $f(x) = f(z)$, donc $x\mathcal{R}z$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

5. Application bien définie :

Soient $x, y \in G$ tels que $\overline{x} = \overline{y}$. Alors $x\mathcal{R}y$, donc $f(x) = f(y)$.

Donc $\overline{f}(\overline{x}) = f(x) = f(y) = \overline{f}(\overline{y})$.

Ainsi $\overline{f}$ est bien définie.

Image réciproque de e' :

$$\overline{f}^{-1}(\{e'\}) = \{\overline{x} \in G/\mathcal{R} \mid \overline{f}(\overline{x}) = e'\} = \{\overline{x} \in G/\mathcal{R} \mid f(x) = e'\} = \{\overline{x} \in G/\mathcal{R} \mid x \in \mathrm{Ker}(f)\}$$

C'est l'ensemble des classes des éléments du noyau, c'est-à-dire la classe de e : $\overline{e} = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 10. Pour $r \geqslant 0$, on note U_r l'ensemble des nombres complexes de module r.

1. Vérifier que U_1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2. Étant donné $r > 0$, U_r est-il un groupe ?

3. Vérifier que $f : \mathbb{R} \to U_1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$ est un morphisme de groupes surjectif. Quel est son noyau ?

Correction de l'exercice 10.

1. $U_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$.

— $1 \in U_1$ car $|1| = 1$, donc $U_1 \neq \emptyset$.

— Soient $z, z' \in U_1$. Alors $|z| = 1$ et $|z'| = 1$.

$$|zz'| = |z||z'| = 1 \times 1 = 1$$

Donc $zz' \in U_1$.

— Soit $z \in U_1$. Alors $|z| = 1$.

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc $z^{-1} \in U_1$.

Donc U_1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2. Soit $r > 0$. $U_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$.

Si $r \neq 1$, alors $1 \notin U_r$ (car $|1| = 1 \neq r$).

Donc U_r n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ si $r \neq 1$.

Si $r = 1$, on a vu que U_1 est un groupe.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to U_1$ définie par $f(t) = e^{2i\pi t}$.

— **Morphisme :** Pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$:

$$f(t + t') = e^{2i\pi(t+t')} = e^{2i\pi t}e^{2i\pi t'} = f(t)f(t')$$

— **Surjectivité :** Soit $z \in U_1$. Alors $|z| = 1$, donc on peut écrire $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Posons $t = \frac{\theta}{2\pi}$. Alors $f(t) = e^{2i\pi \cdot \frac{\theta}{2\pi}} = e^{i\theta} = z$.

Donc f est surjective.

— **Noyau :**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \{t \in \mathbb{R} \mid e^{2i\pi t} = 1\} \\
&= \{t \in \mathbb{R} \mid 2\pi t \in 2\pi\mathbb{Z}\} \\
&= \{t \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'ensemble R_n des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ forment un sous-groupe de $(U_1, \cdot)$. Quel est son ordre ?

2. Vérifier que $f : \mathbb{Z} \to R_n$, $k \mapsto e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ est un morphisme de groupes surjectif. Quel est son noyau ?

Correction de l'exercice 11.

1. $R_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

— $1^n = 1$, donc $1 \in R_n$. Ainsi $R_n \neq \emptyset$.

— Soient $z, z' \in R_n$. Alors $z^n = 1$ et $(z')^n = 1$.

$$(zz')^n = z^n(z')^n = 1 \times 1 = 1$$

Donc $zz' \in R_n$.

— Soit $z \in R_n$. Alors $z^n = 1$.

$$(z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$$

Donc $z^{-1} \in R_n$.

Donc R_n est un sous-groupe de $(U_1, \cdot)$.

Ordre : Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de $z^n = 1$, c'est-à-dire $z = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Donc $\mathrm{card}(R_n) = n$.

2. Soit $f : \mathbb{Z} \to R_n$ définie par $f(k) = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$.

— **Morphisme :** Pour tous $k, k' \in \mathbb{Z}$:

$$f(k+k') = e^{\frac{2i\pi(k+k')}{n}} = e^{\frac{2i\pi k}{n}} e^{\frac{2i\pi k'}{n}} = f(k)f(k')$$

— **Surjectivité :** Soit $z \in R_n$. Alors $z = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ pour un certain $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Donc $f(k) = z$, donc f est surjective.

— **Noyau :**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \left\{k \in \mathbb{Z} \mid e^{\frac{2i\pi k}{n}} = 1\right\} \\
&= \left\{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{2\pi k}{n} \in 2\pi\mathbb{Z}\right\} \\
&= \{k \in \mathbb{Z} \mid k \in n\mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Exercice 12. Soit G un groupe et soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $G_1 \cap G_2$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Correction de l'exercice 12.

1. Notons e l'élément neutre de G.

— $e \in G_1$ et $e \in G_2$ (car G_1 et G_2 sont des sous-groupes), donc $e \in G_1 \cap G_2$.

— Soient $x, y \in G_1 \cap G_2$. Alors $x, y \in G_1$ et $x, y \in G_2$.

Comme G_1 est un sous-groupe, $xy \in G_1$. Comme G_2 est un sous-groupe, $xy \in G_2$.

Donc $xy \in G_1 \cap G_2$.

— Soit $x \in G_1 \cap G_2$. Alors $x \in G_1$ et $x \in G_2$.

Comme G_1 est un sous-groupe, $x^{-1} \in G_1$. Comme G_2 est un sous-groupe, $x^{-1} \in G_2$.

Donc $x^{-1} \in G_1 \cap G_2$.

Donc $G_1 \cap G_2$ est un sous-groupe de G.

2. ($\Leftarrow$) Si $G_1 \subset G_2$, alors $G_1 \cup G_2 = G_2$ qui est un sous-groupe.

Si $G_2 \subset G_1$, alors $G_1 \cup G_2 = G_1$ qui est un sous-groupe.

($\Rightarrow$) Supposons que $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G.

Supposons par l'absurde que $G_1 \not\subset G_2$ et $G_2 \not\subset G_1$.

Alors $\exists x \in G_1 \setminus G_2$ et $\exists y \in G_2 \setminus G_1$.

Comme $x \in G_1 \subset G_1 \cup G_2$ et $y \in G_2 \subset G_1 \cup G_2$, et que $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe, on a $xy \in G_1 \cup G_2$.

Donc $xy \in G_1$ ou $xy \in G_2$.

— Si $xy \in G_1$, alors comme $x \in G_1$, on a $x^{-1} \in G_1$, donc $y = x^{-1}(xy) \in G_1$, absurde.

— Si $xy \in G_2$, alors comme $y \in G_2$, on a $y^{-1} \in G_2$, donc $x = (xy)y^{-1} \in G_2$, absurde.

Contradiction. Donc $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Exercice 13. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$.

1. Montrer que l'application $f : G \to G$ définie par $f(x) = axa^{-1}$ est un automorphisme de G.

2. Déterminer f^{-1}.

Correction de l'exercice 13.

1. Soit $f : G \to G$ définie par $f(x) = axa^{-1}$.

— **Morphisme :** Pour tous $x, y \in G$:

$$f(xy) = a(xy)a^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = f(x)f(y)$$

— **Bijectivité :** Considérons $g : G \to G$ définie par $g(x) = a^{-1}xa$.

Pour tout $x \in G$:

$$f(g(x)) = f(a^{-1}xa) = a(a^{-1}xa)a^{-1} = (aa^{-1})x(aa^{-1}) = x$$

$$g(f(x)) = g(axa^{-1}) = a^{-1}(axa^{-1})a = (a^{-1}a)x(a^{-1}a) = x$$

Donc $g = f^{-1}$, donc f est bijective.

Donc f est un automorphisme de G (on l'appelle automorphisme intérieur).

2. D'après la preuve précédente, $f^{-1}(x) = a^{-1}xa$ pour tout $x \in G$.

Exercice 14. Soit G un groupe et e son élément neutre.

1. Montrer que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors G est abélien.

2. Plus généralement, montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme de G si et seulement si G est abélien.

Correction de l'exercice 14.

1. Supposons que $\forall x \in G$, $x^2 = e$.

Alors pour tout $x \in G$, $x = x^{-1}$ (car $x^2 = e \iff xx = e \iff x = x^{-1}$).

Soient $x, y \in G$. Alors :

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

car $x = x^{-1}$ et $y = y^{-1}$.

Donc G est abélien.

2. $(\Rightarrow)$ Supposons que $f : x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme.

Alors pour tous $x, y \in G$:

$$(xy)^{-1} = f(xy) = f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1}$$

Or $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, donc $y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

En prenant l'inverse des deux côtés : $(y^{-1}x^{-1})^{-1} = (x^{-1}y^{-1})^{-1}$, donc $xy = yx$.

Donc G est abélien.

$(\Leftarrow)$ Supposons G abélien.

Alors pour tous $x, y \in G$:

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$

car G est abélien.

Donc f est un morphisme.