

Mathématiques 2012–2013

TD d'Algèbre 2 : Algèbre linéaire

Adel BLOUZA

Bureau n° M.1.19

adel.blouza@univ-rouen.fr

Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem

Avenue de l'Université, BP.12,

F76801 Saint-Étienne-du-Rouvray.

Rédigé avec \LaTeX

par Hicham AMARIR

le 19 mai 2026

Table des matières

Fiche n°1 – Les systèmes linéaires	3
Corrigé fiche n°1 – Les systèmes linéaires	6
Fiche n°2 – Vecteurs de \mathbb{R}^n	21
Corrigé fiche n°2 – Vecteurs de \mathbb{R}^n	24
Fiche n°3 – Sous-espaces vectoriels	45
Corrigé fiche n°3 – Sous-espaces vectoriels	48
Fiche n°4 – Applications linéaires	62
Corrigé fiche n°4 – Applications linéaires	65
Fiche n°5 – Matrices. Déterminants. Systèmes.	90
Corrigé fiche n°5 – Matrices. Déterminants. Systèmes.	94

Exercice 1.

Annie et Arthur sont frère et sœur. Annie a autant de frères que de sœurs mais Arthur a deux fois plus de sœurs que de frères.

Combien y-a-t-il d'enfants dans cette famille?

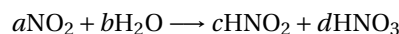
Exercice 2.

Un problème d'argent : Monsieur X. dispose de trois comptes en banque A, B et C. Son compte A est non rémunéré. Son compte B est rémunéré à hauteur de 10 % par an. Enfin, son compte C est quant à lui rémunéré de 20 % par an. Monsieur X. n'intervient pas sur ses comptes pendant trois ans. Cependant, chaque année, les bénéfices de chaque compte sont reversés directement sur le même compte. Monsieur X. a déclaré avoir en tout sur ses trois comptes la somme de 12 000 euros en 2006, de 13 400 euros en 2007, et de 15 040 euros en 2008.

De quelles sommes Monsieur X. disposait-il sur chacun de ses comptes en 2006?

Exercice 3.

On considère la réaction chimique



où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée, c'est-à-dire le nombre d'atomes de chaque élément doit être le même avant et après la réaction. Par exemple le nombre d'atomes d'oxygène doit rester le même :

$$2a + b = 2c + 3d$$

Bien qu'il ait plusieurs valeurs possibles pour a, b, c et d qui équilibrent la réaction, calculer les entiers positifs les plus petits possibles équilibrant la réaction.

Exercice 4.

Sans faire de calculs, déterminer lesquels des systèmes homogènes suivants ont d'autres solutions que la solution triviale.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - 8z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 5.

Résoudre les systèmes suivants à l'aide de l'algorithme de Gauss. On précisera dans chaque cas les variables libres.

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x - y + 4z = 17 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 3x + 8y - 13z = 7 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22 \end{cases} \quad (S_5) \begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 2 \\ 2x + 5y - 2z + t = 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t = 7 \end{cases}$$

Exercice 6.

Expliquer à l'aide de l'algorithme de Gauss pourquoi tout système linéaire admet ou bien :

- a) une unique solution,
- b) aucune solution,
- c) ou une infinité de solution.

Exercice 7.

Déterminer les valeurs de k de sorte que les systèmes suivants d'inconnues x , y et z admettent, (i) une unique solution, (ii) aucune solution, (iii) une infinité de solutions.

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y + kz = -2 \\ ky + 4z = 6 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

Exercice 8.

Quelles conditions doivent vérifier a , b et c pour que le système suivant d'inconnues x , y et z admette une solution.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

Exercice 9.

- ① Résoudre le système suivant en prenant $(e, f) = (1, 0)$ puis $(e, f) = (3, 2)$.

$$\begin{cases} 3x + 6y = e \\ 2x + 4y = f \end{cases}$$

- ② Soient a, b, c, d quatre nombres réels. On considère les trois propriétés suivantes :

P_1 : pour tout couple de réels (e, f) , le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

admet exactement une solution.

P_2 : le système homogène

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

admet $(x, y) = (0, 0)$ pour unique solution.

P_3 : le nombre $ad - bc$ est non nul.

Montrer que ces trois propriétés sont équivalentes.

- ③ Dans le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère les ensembles

$$D_1 = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, ax + by = e\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, cx + dy = f\}.$$

Quelle est la nature géométrique de ces ensembles?

Interpréter géométriquement les différentes possibilités pour l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Exercice 10.

Soit f une fonction polynomiale de degré 3 sur \mathbb{R} , que l'on écrit sous la forme suivante : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Déterminer les paramètres réels a, b, c et d (s'il en existe) pour que f satisfasse :

$$f(1) = 4, \quad f(-1) = 0, \quad f(-2) = -5, \quad f(2) = 15.$$

Exercice 11.

Trouvez un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p), (2, q), (3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Exercice 1.

Annie et Arthur sont frère et sœur. Annie a autant de frères que de sœurs mais Arthur a deux fois plus de sœurs que de frères.

Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille?

Correction de l'exercice 1.

Posons :

x = le nombre de garçons

y = le nombre de filles

Il s'agit de trouver le système associé à ce problème.

$x - 1$ = le nombre de frères d'Annie

$y - 1$ = le nombre de sœurs d'Annie

Donc $x = y - 1$.

y = le nombre de sœurs d'Arthur

$x - 1$ = le nombre de frères d'Arthur

Donc $y = 2(x - 1)$.

Le système est donc :

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ y = 2(x - 1) \end{cases}$$

Résolution par équivalences de systèmes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = y - 1 \\ y = 2(x - 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = 2((y - 1) - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = 2(y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = 2y - 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y - 2y = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ -y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 1 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc $x + y = 4 + 3 = 7$ enfants dans cette famille.

Exercice 2.

Un problème d'argent : Monsieur X. dispose de trois comptes en banque A, B et C. Son compte A est non rémunéré. Son compte B est rémunéré à hauteur de 10 % par an. Enfin, son compte C est quant à lui rémunéré de 20 % par an. Monsieur X. n'intervient pas sur ses comptes pendant trois ans. Cependant, chaque année, les bénéfices de chaque compte sont reversés directement sur le même compte. Monsieur X. a déclaré avoir en tout sur ses trois comptes la somme de 12 000 euros en 2006, de 13 400 euros en 2007, et de 15 040 euros en 2008.

De quelles sommes Monsieur X. disposait-il sur chacun de ses comptes en 2006?

Correction de l'exercice 2.

Notons a , b et c les sommes initiales sur les comptes A, B et C respectivement en 2006.

$$2006 : a + b + c = 12\,000$$

$$2007 : a + 1,1b + 1,2c = 13\,400$$

$$2008 : a + 1,11b + 1,24c = 15\,040$$

Ce qui donne le système équivalent :

$$\begin{cases} a + b + c = 12\,000 \\ \frac{b}{10} + \frac{c}{5} = 1\,400 \\ \frac{b}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{5} + \frac{c}{25} = 1\,640 \end{cases}$$

Simplifions les deux dernières équations :

$$\begin{cases} a + b + c = 12\,000 & (E_1) \\ b + 2c = 14\,000 & (E_2) \\ 11b + 26c = 164\,000 & (E_3) \end{cases}$$

Effectuons $-11E_2 + E_3$:

$$\begin{cases} a + b + c = 12\,000 & (E_1) \\ b + 2c = 14\,000 & (E_2) \\ 11b + 26c = 164\,000 & (E_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 12\,000 & (E_1) \\ b + 2c = 14\,000 & (E_2) \\ 4c = 20\,000 & (-11E_2 + E_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 12\,000 \\ b + 2c = 14\,000 \\ c = 5\,000 \end{cases}$$

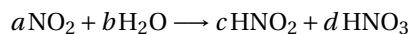
Remontée par substitutions :

$$\begin{cases} a + b + c = 12\,000 \\ b + 2(5\,000) = 14\,000 \\ c = 5\,000 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 12\,000 \\ b = 4\,000 \\ c = 5\,000 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 4\,000 + 5\,000 = 12\,000 \\ b = 4\,000 \\ c = 5\,000 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3\,000 \\ b = 4\,000 \\ c = 5\,000 \end{cases}$$

Monsieur X. disposait de 3 000 euros sur le compte A, 4 000 euros sur le compte B et 5 000 euros sur le compte C en 2006.

Exercice 3.

On considère la réaction chimique



où a , b , c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée, c'est-à-dire le nombre d'atomes de chaque élément doit être le même avant et après la réaction. Par exemple le nombre d'atomes d'oxygène doit rester le même :

$$2a + b = 2c + 3d$$

Bien qu'il ait plusieurs valeurs possibles pour a , b , c et d qui équilibrent la réaction, calculer les entiers positifs les plus petits possibles équilibrant la réaction.

Correction de l'exercice 3.

Le système d'équations obtenu en équilibrant les atomes d'azote (N), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) est :

$$\begin{cases} 2a + b = 2c + 3d & \text{(O)} \\ a = c + d & \text{(N)} \\ 2b = c + d & \text{(H)} \end{cases}$$

Résolution par équivalences de systèmes :

$$\begin{cases} 2a + b = 2c + 3d \\ a = c + d \\ 2b = c + d \end{cases}$$

On remplace $c + d$ par $2b$ dans la deuxième équation car la troisième équation donne aussi $2b = c + d$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2c + 3d \\ a = 2b \\ 2b = c + d \end{cases}$$

On exprime c en fonction de b et d à partir de la troisième équation : $c = 2b - d$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2c + 3d \\ a = 2b \\ c = 2b - d \end{cases}$$

On remplace a par $2b$ dans la première équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 2c + 3d \\ a = 2b \\ c = 2b - d \end{cases}$$

On remplace c par $2b - d$ dans la première équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 4b + d \\ a = 2b \\ c = 2b - d \end{cases}$$

On résout $5b = 4b + d$, ce qui donne $b = d$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = d \\ a = 2b \\ c = 2b - d \end{cases}$$

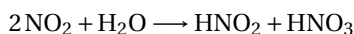
On substitue $b = d$ dans les autres équations.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2d \\ b = d \\ c = d \end{cases}$$

Pour obtenir les entiers strictement positifs les plus petits, on choisit $d = 1$. On obtient alors :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

La réaction équilibrée est :



Exercice 4.

Sans faire de calculs, déterminer lesquels des systèmes homogènes suivants ont d'autres solutions que la solution triviale.

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - 8z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 4.

Pour le système (S_1) :

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - 8z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

On a 3 équations pour 3 inconnues et les équations sont indépendantes car la troisième équation ne fait intervenir que z , la deuxième les inconnues x et z , la première les trois inconnues x , y , z . Aucune n'est une combinaison linéaire des autres. Un tel système homogène carré à équations indépendantes n'admet que la solution triviale $x = y = z = 0$.

Pour le système (S_2) :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

On remarque que la deuxième équation est le double de la première ($L_2 = 2L_1$). Le système est donc équivalent à une seule équation :

$$3x - 2y = 0$$

Ce système admet une infinité de solutions, par exemple $(x, y) = (2, 3)$.

Pour le système (S_3) :

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

La deuxième et la troisième équation sont indépendantes : la deuxième contient x mais pas z , la troisième contient z mais pas x .

Si la première dépendait des deux autres, son x proviendrait de la deuxième et son z de la troisième. Or le coefficient de y dans la deuxième (2) est déjà plus grand que celui de la première (1), et la troisième en apporterait en supplément.

Il est donc impossible d'obtenir la première équation à partir des deux autres : les trois équations sont donc indépendantes.

Un système homogène carré à trois équations indépendantes n'admet que la solution triviale. **Réponse : non.**

Exercice 5.

Résoudre les systèmes suivants à l'aide de l'algorithme de Gauss. On précisera dans chaque cas les variables libres.

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x - y + 4z = 17 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 3x + 8y - 13z = 7 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 2 \\ 2x + 5y - 2z + t = 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t = 7 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5.

Résolution de (S_1) :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 & L_1 \\ 2x - y + 4z = 17 & L_2 \\ 3x - 2y + 2z = 14 & L_3 \end{cases}$$

On effectue $L'_2 = L_2 - 2L_1$ et $L'_3 = L_3 - 3L_1$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 & L_1 \\ 3y + 2z = 3 & L'_2 \\ 4y - z = -7 & L'_3 \end{cases}$$

On échange L'_2 et L'_3 pour avoir un pivot plus simple, ou on continue directement. Multiplions L'_2 par 4 et L'_3 par 3 :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 & L_1 \\ 12y + 8z = 12 & 4L'_2 \\ 12y - 3z = -21 & 3L'_3 \end{cases}$$

On élimine y par $L''_3 = 3L'_3 - 4L'_2$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 & L_1 \\ 12y + 8z = 12 & 4L'_2 \\ -11z = -33 & 3L'_3 - 4L'_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 12y + 8z = 12 \\ z = 3 \end{cases}$$

Remontée par substitutions :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 12y + 8(3) = 12 \\ z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 12y = -12 \\ z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2(-1) + 3 = 7 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Solution unique : $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

Résolution de (S_2) :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & L_1 \\ 2x - y + 4z = 4 & L_2 \\ 3x + 8y - 13z = 7 & L_3 \end{cases}$$

$L'_2 = L_2 - 2L_1$ et $L'_3 = L_3 - 3L_1$:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & L_1 \\ -5y + 10z = 2 & L'_2 \\ 2y - 4z = 4 & L'_3 \end{cases}$$

On remarque que L'_3 est proportionnelle à L'_2 ($L'_3 = -\frac{2}{5}L'_2$). En fait, $5L'_3 + 2L'_2$ donne $0 = 24$, ce qui est impossible. Le système n'a pas de solution.

Résolution de (S_3) :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 & L_1 \\ 3x - y + 2z = 7 & L_2 \\ 5x + 3y - 4z = 2 & L_3 \end{cases}$$

$L'_2 = L_2 - 3L_1$ et $L'_3 = L_3 - 5L_1$:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 & L_1 \\ -7y + 8z = 10 & L'_2 \\ -7y + 6z = 7 & L'_3 \end{cases}$$

$L''_3 = L'_3 - L'_2$:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 & L_1 \\ -7y + 8z = 10 & L'_2 \\ -2z = -3 & L''_3 = L'_3 - L'_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -7y + 8z = 10 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Remontée par substitutions :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -7y + 8 \times \frac{3}{2} = 10 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -7y + 12 = 10 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -7y = -2 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ y = \frac{2}{7} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2 \times \frac{2}{7} - 2 \times \frac{3}{2} = -1 \\ y = \frac{2}{7} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{4}{7} - 3 = -1 \\ y = \frac{2}{7} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{2}{7} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Solution unique : $(x, y, z) = (\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{2})$.

Résolution de (S_4) : La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & 22 \end{array} \right)$$

$L'_2 = 2L_2 - 3L_1$ et $L'_3 = 2L_3 - 5L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -25 & 12 & 4 & 24 \end{array} \right)$$

$L''_3 = L'_3 - 5L'_2$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -6 \end{array} \right)$$

Les variables liées sont x, y et s . Les variables libres sont z et t . On exprime x, y, s en fonction de z et t par équivalences de systèmes :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ y - 5z + 2s + 2t = 6 \\ 2s - 6t = -6 \end{cases}$$

De la dernière équation, on tire $s = -3 + 3t$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ y - 5z + 2s + 2t = 6 \\ s = -3 + 3t \end{cases}$$

On remplace s par $-3 + 3t$ dans la deuxième équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ y = 12 + 5z - 8t \\ s = -3 + 3t \end{cases}$$

On remplace y et s dans la première équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 - 15t + 11z \\ y = 12 + 5z - 8t \\ s = -3 + 3t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{(26 - 15t + 11z; 12 - 8t + 5z; z; -3 + 3t; t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Les variables libres sont z et t .

Résolution de (S₅) : Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & -7 & 6 & 3 \end{array} \right)$$

$L'_2 = L_2 - 2L_1$ et $L'_3 = L_3 - 5L_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & -7 \end{array} \right)$$

$L''_3 = L'_3 - 2L'_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

La dernière ligne correspond à l'équation $0 = -1$, ce qui est impossible. Le système est incompatible, $S = \emptyset$.

Exercice 6.

Expliquer à l'aide de l'algorithme de Gauss pourquoi tout système linéaire admet ou bien :

- a) une unique solution,
- b) aucune solution,
- c) ou une infinité de solution.

Correction de l'exercice 6.

Tout système linéaire peut être transformé par l'algorithme de Gauss en un système échelonné équivalent de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{pp}x_p + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \\ 0 = b_{p+1} \\ \vdots \\ 0 = b_q \end{array} \right.$$

avec $a_{ii} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq p$.

Cas 1 : Il existe $k \in \llbracket p+1, q \rrbracket$ tel que $b_k \neq 0$. Alors l'équation $0 = b_k$ est impossible. Le système n'a **aucune solution**.

Cas 2 : Pour tout $k \in \llbracket p+1, q \rrbracket$, $b_k = 0$. Le système est alors équivalent aux p premières équations.

- * Si $p = n$ (autant d'équations que d'inconnues principales), il y a une **unique solution**.
- * Si $p < n$, il y a $n - p$ variables libres. Le système admet une **infinité de solutions** paramétrée par ces variables libres.

Exercice 7.

Déterminer les valeurs de k de sorte que les systèmes suivants d'inconnues x , y et z admettent, (i) une unique solution, (ii) aucune solution, (iii) une infinité de solutions.

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y + kz = -2 \\ ky + 4z = 6 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 7.

Étude de (S₁) : Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k & -2 \\ 0 & k & 4 & 6 \end{array} \right)$$

$$L'_2 = L_2 - L_1 :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & -3 \\ 0 & k & 4 & 6 \end{array} \right)$$

$$L'_3 = L_3 - kL'_2 :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & -3 \\ 0 & 0 & 4 - k^2 & 6 + 3k \end{array} \right)$$

- ① **Solution unique :** Si le pivot $4 - k^2 \neq 0$, c'est-à-dire $k \notin \{-2, 2\}$.
- ② **Aucune solution :** Si $4 - k^2 = 0$ et $6 + 3k \neq 0$. Pour $k = 2$, $4 - 4 = 0$ et $6 + 6 = 12 \neq 0$. Donc pour $k = 2$, le système est incompatible.
- ③ **Infinité de solutions :** Si $4 - k^2 = 0$ et $6 + 3k = 0$. Pour $k = -2$, $4 - 4 = 0$ et $6 - 6 = 0$. La dernière ligne est $0 = 0$. Il reste 2 équations pour 3 inconnues, donc infinité de solutions.

Étude de (S₂) : On permute L_1 et L_3 pour avoir un 1 en pivot (si $k \neq 1$, mais on traite le cas général) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L'_2 = L_2 - L_1 \text{ et } L'_3 = L_3 - kL_1 :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array} \right)$$

$$L_3'' = L_3' + L_2' :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \end{array} \right)$$

Le pivot est $2 - k - k^2 = -(k-1)(k+2)$.

- ① **Solution unique** : Si $k \neq 1$ et $k \neq -2$.
- ② **Infinité de solutions** : Si $k = 1$. Toutes les lignes deviennent nulles ou proportionnelles ($0 = 0$). Le système est $x + y + z = 1$, infinité de solutions.
- ③ **Aucune solution** : Si $k = -2$. Le pivot est nul mais le second membre $1 - (-2) = 3 \neq 0$. Incompatible.

Exercice 8.

Quelles conditions doivent vérifier a , b et c pour que le système suivant d'inconnues x , y et z admette une solution.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

Correction de l'exercice 8.

Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array} \right)$$

$$L_2' = L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3' = L_3 - L_1 :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array} \right)$$

$$L_3'' = L_3' + 2L_2' :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-a+2(b-2a) \end{array} \right)$$

La condition de compatibilité est que le dernier terme soit nul :

$$c - a + 2b - 4a = 0 \Rightarrow c + 2b - 5a = 0$$

Si cette condition est vérifiée, le système admet une infinité de solutions (une variable libre, z).

Exercice 9.

- ① Résoudre le système suivant en prenant $(e, f) = (1, 0)$ puis $(e, f) = (3, 2)$.

$$\begin{cases} 3x + 6y = e \\ 2x + 4y = f \end{cases}$$

- ② Soient a, b, c, d quatre nombres réels. On considère les trois propriétés suivantes :

P_1 : pour tout couple de réels (e, f) , le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

admet exactement une solution.

P_2 : le système homogène

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

admet $(x, y) = (0, 0)$ pour unique solution.

P_3 : le nombre $ad - bc$ est non nul.

Montrer que ces trois propriétés sont équivalentes.

- ③ Dans le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère les ensembles

$$D_1 = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, ax + by = e\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, cx + dy = f\}.$$

Quelle est la nature géométrique de ces ensembles ?

Interpréter géométriquement les différentes possibilités pour l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Correction de l'exercice 9.

- ① Matrice du système :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & e \\ 2 & 4 & f \end{array} \right)$$

$L'_2 = 3L_2 - 2L_1$ (ou simplement on remarque la proportionnalité) :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & e \\ 0 & 0 & 3f - 2e \end{array} \right)$$

- ⊛ Si $(e, f) = (1, 0)$, alors $3(0) - 2(1) = -2 \neq 0$. Le système est incompatible.
- ⊛ Si $(e, f) = (3, 2)$, alors $3(2) - 2(3) = 0$. Le système est équivalent à $3x + 6y = 3$, soit $x + 2y = 1$. Il admet une infinité de solutions : $x = 1 - 2\lambda$, $y = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ② **Équivalence des propriétés P_1, P_2 et P_3 :**

$P_3 \Rightarrow P_1$: On suppose que $ad - bc \neq 0$.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

En multipliant la première équation par d et la seconde par b :

$$\begin{cases} adx + bdy = de \\ bcx + bdy = bf \end{cases}$$

Par soustraction :

$$(ad - bc)x = de - bf \Rightarrow x = \frac{de - bf}{ad - bc}$$

De même, en multipliant la première équation par c et la seconde par a :

$$\begin{cases} acx + bcy = ce \\ acx + ady = af \end{cases}$$

Par soustraction :

$$(bc - ad)y = ce - af \Rightarrow y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Donc la solution est unique.

D'où $P_3 \Rightarrow P_1$.

$P_1 \Rightarrow P_2$: On suppose que le système

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique et montrons que $ad - bc \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ 0 & ad - bc & 0 \end{array} \right)$$

Si $ad - bc = 0$, le système n'admet pas de solution unique. Donc $ad - bc \neq 0$.

D'où $P_1 \Rightarrow P_2$.

$P_2 \Rightarrow P_3$: Le réel $ad - bc$ s'appelle le déterminant du système.

Si $ad - bc = 0$ soit aucune solution ou alors une infinité de solutions

Si $ad - bc \neq 0$ une solution unique

③ Interprétation géométrique :

Dans le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soient a, b, c, d, e, f des réels.

On considère :

$$D_1 = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid ax + by = e\}$$

$$D_2 = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid cx + dy = f\}$$

D_1 et D_2 sont deux droites du plan.

⊛ Si $ad - bc \neq 0$: les droites sont sécantes en un point unique (solution unique du système).

⊗ Si $ad - bc = 0$:

- ⊛ Soit les droites sont parallèles distinctes (pas de solution).
- ⊛ Soit les droites sont confondues (une infinité de solutions — le système se réduit à une seule équation).

Exercice 10.

Soit f une fonction polynomiale de degré 3 sur \mathbb{R} , que l'on écrit sous la forme suivante : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Déterminer les paramètres réels a, b, c et d (s'il en existe) pour que f satisfasse :

$$f(1) = 4, \quad f(-1) = 0, \quad f(-2) = -5, \quad f(2) = 15.$$

Correction de l'exercice 10.

Soit f un polynôme de degré 3 :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Trouver a, b, c, d pour que :

$$f(1) = 4, \quad f(-1) = 0, \quad f(-2) = -5, \quad f(2) = 15$$

Remarque : S'il y a une solution, elle doit être unique car un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines.

Le système d'équations est :

$$\begin{aligned} f(1) = 4 &\Leftrightarrow a + b + c + d = 4 \\ f(-1) = 0 &\Leftrightarrow -a + b - c + d = 0 \\ f(-2) = -5 &\Leftrightarrow -8a + 4b - 2c + d = -5 \\ f(2) = 15 &\Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 15 \end{aligned}$$

Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

On peut aussi décomposer en 2 systèmes :

$$\begin{cases} 2b + 2d = 4 & (L_1 + L_2) \\ 8b + 2d = 10 & (L_3 + L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + d = 2 \\ 4b + d = 5 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Et pour a et c :

$$\begin{cases} 2a + 2c = 4 & (L_1 - L_2) \\ 16a + 4c = 20 & (L_4 - L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = 5 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

Exercice 11.

Trouvez un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p)$, $(2, q)$, $(3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Correction de l'exercice 11.

Chercher a, b, c pour que $P(x) = ax^2 + bx + c$ passe par $(1, p)$, $(2, q)$ et $(3, r)$ où $p, q, r \in \mathbb{R}$.

$$P(1) = p, \quad P(2) = q, \quad P(3) = r$$

Le système est :

$$\begin{cases} a + b + c = p \\ 4a + 2b + c = q \\ 9a + 3b + c = r \end{cases}$$

Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & p \\ 4 & 2 & 1 & q \\ 9 & 3 & 1 & r \end{array} \right)$$

$L'_2 = L_2 - 4L_1$ et $L'_3 = L_3 - 9L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -2 & -3 & q - 4p \\ 0 & -6 & -8 & r - 9p \end{array} \right)$$

$L''_3 = L'_3 - 3L'_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -2 & -3 & q - 4p \\ 0 & 0 & 1 & r - 9p - 3(q - 4p) \end{array} \right)$$

avec :

$$r - 9p - 3q + 12p = r + 3p - 3q$$

Les trois pivots sont non nuls. Il existe un seul et unique polynôme vérifiant $P(1) = p$, $P(2) = q$, $P(3) = r$.

Résolution :

$$c = 3p - 3q + r$$

$$-2b = q - 4p + 3c = q - 4p + 3(3p - 3q + r)$$

$$b = \frac{1}{2}(-5p + 8q - 3r)$$

$$a = p - b - c = p - \frac{1}{2}(-5p + 8q - 3r) - (3p - 3q + r)$$

$$a = \frac{1}{2}(p - 2q + r)$$

Donc pour toutes valeurs de p, q, r , il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 passant par ces trois points.

Exercice 1.

- ① Soit dans \mathbb{R}^2 , \mathbb{R} -espace vectoriel, les 3 vecteurs $w = (-1, 2)$, $u = (2, 3)$ et $v = (3, -2)$.

Le vecteur w appartient-il à $\text{Vect}(u, v)$, sous-espace vectoriel engendré par u et v .

- ② On se place dans \mathbb{R}^3 . Soient $B = (-1, 1, 1)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (1, 2, 1)$ et $E = (1, 5, 5)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 . A-t-on $D \in \text{Vect}(B, C)$? $E \in \text{Vect}(B, C)$?

- ③ Soit t un nombre réel, et $F = (2, 1, t)$. Pour quelle valeur de t le vecteur $F \in \text{Vect}(B, C)$?

- ④ Expliciter $\text{Vect}(B, C)$ (trouver la forme générale de ses vecteurs).

Exercice 2.

Toute famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_m\}$ de \mathbb{R}^n est linéairement dépendante si $m > n$. Cette assertion est-elle vraie? Justifier.

Exercice 3.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m si, et seulement si la forme échelonnée a une position pivot dans chaque ligne.

Exercice 4.

Calculer $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$, où

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$

Exercice 5.

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^2 .

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.

Écrire les systèmes ci-dessous sous la forme $Ax = b$. Déterminer dans chaque cas si les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -7x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 37x_3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 7.

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants.

- a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.
- b) A est une matrice 4×2 , $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ et α_2 n'est pas multiple de α_1 .
- c) A est une matrice 4×3 , $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Les vecteurs α_1 et α_2 sont linéairement indépendants, et α_3 n'est pas une combinaison linéaire de α_1 et α_2 .

Exercice 8.

- a) Dans \mathbb{R}^3 , le vecteur $(1, 7, -4)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u = (1, -3, 2)$ et $v = (2, -1, 1)$? Même question pour le vecteur $(2, -5, 4)$.
- b) Trouver $k \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $u = (1, -2, k)$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $v = (3, 0, -2)$ et $w = (2, -1, -5)$.

Exercice 9.

Soient u, v et w trois vecteurs de \mathbb{R}^n linéairement indépendants. Montrer qu'il en est de même des vecteurs $u + v, u - v$ et $u - 2v + w$.

Exercice 10.

Déterminer dans chaque cas si les vecteurs donnés forment une base de \mathbb{R}^3 .

- a) $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)$.
- b) $(1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2)$.
- c) $(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$.

Exercice 11.

On considère les \mathbb{R} -espaces vectoriels \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Dire si les vecteurs sont linéairement indépendants dans chacun des cas suivants.

- (1) $u = (0, 0)$, $v = (1, 2)$.
- (2) $u' = (1, 1)$, $v' = (4, 5)$.
- (3) $u = (-1, 1)$, $v = (2, 1)$, $w = (3, 7)$.
- (4) $a = (-2, 1, -1)$, $b = (1, 1, 1)$, $c = (1, 2, t)$ (discuter selon t).

Exercice 12.

- (1) La famille $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est-elle libre dans \mathbb{R} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel?
- (2) Expliquer pourquoi \mathbb{R} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel. La famille $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est-elle libre dans cet espace?

Exercice 13.

On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 . Calculer les dimensions des sous-espaces vectoriels suivants :

$$E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\},$$

$$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z - t = 0\},$$

$$E_3 = E_1 \cap E_2.$$

Exercice 14.

Soit $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$.

- a) Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Déterminer les composantes de $v = (1, 1, 1)$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 15.

Soit $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = (0, -1, 1)$.

- a) Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Déterminer les composantes de $v = (2, 3, 4)$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 1.

- ① Soit dans \mathbb{R}^2 , \mathbb{R} -espace vectoriel, les 3 vecteurs $w = (-1, 2)$, $u = (2, 3)$ et $v = (3, -2)$.
Le vecteur w appartient-il à $\text{Vect}(u, v)$, sous-espace vectoriel engendré par u et v ?
- ② On se place dans \mathbb{R}^3 . Soient $B = (-1, 1, 1)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (1, 2, 1)$ et $E = (1, 5, 5)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 . A-t-on $D \in \text{Vect}(B, C)$? $E \in \text{Vect}(B, C)$?
- ③ Soit t un nombre réel, et $F = (2, 1, t)$. Pour quelle valeur de t le vecteur $F \in \text{Vect}(B, C)$?
- ④ Expliciter $\text{Vect}(B, C)$ (trouver la forme générale de ses vecteurs).

Correction de l'exercice 1.

- ① On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $w = au + bv$:

$$(-1, 2) = a(2, 3) + b(3, -2)$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 2a + 3b = -1 \\ 3a - 2b = 2 \end{cases}$$

On a : $ad - bc = 2 \times (-2) - 3 \times 3 = -4 - 9 = -13 \neq 0$.

Donc le système admet une solution unique. Ainsi, $w \in \text{Vect}\{u, v\}$.

- ② Pour $D = (1, 2, 1)$, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $D = aB + bC$:

$$(1, 2, 1) = a(-1, 1, 1) + b(1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 2 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent $a + b = 2$ et $a + b = 1$, ce qui est incompatible.

Donc $D \notin \text{Vect}\{B, C\}$.

Pour $E = (1, 5, 5)$:

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 5 \\ a + b = 5 \end{cases}$$

$L_2 + L_1$ donne $2b = 6$, donc $b = 3$.

Puis $-a + 3 = 1$, donc $a = 2$.

Donc $E \in \text{Vect}\{B, C\}$.

③ Pour $F = (2, 1, t)$, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 1 \\ a + b = t \end{cases}$$

Il faut et il suffit que $t = 1$.

④ Un vecteur $(x, y, z) \in \text{Vect}\{B, C\}$ s'écrit :

$$(x, y, z) = a(-1, 1, 1) + b(1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} x = -a + b \\ y = a + b \\ z = a + b \end{cases}$$

Donc $y = z$.

Ainsi, $\text{Vect}\{B, C\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$.

Exercice 2.

Toute famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_m\}$ de \mathbb{R}^n est linéairement dépendante si $m > n$.

Cette assertion est-elle vraie? Justifier.

Correction de l'exercice 2.

Rappel : \mathbb{R}^n est un espace vectoriel sur \mathbb{R} (avec $n = 1, 2, 3, \dots$).

Soient $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$.

Les vecteurs v_1, \dots, v_m sont dits **linéairement indépendants** si l'équation :

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ fois } 0}$$

a pour unique solution la solution triviale $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

Exemples :

① Pour $n = 2$ (\mathbb{R}^2), prenons $v_1 = (0, 1)$ et $v_2 = (1, 0)$.

On résout $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (0, 0)$:

$$\alpha_1 (0, 1) + \alpha_2 (1, 0) = (0, 0)$$

$$(0, \alpha_1) + (\alpha_2, 0) = (0, 0)$$

$$(\alpha_2, \alpha_1) = (0, 0)$$

Donc $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$.

Ainsi, $\{v_1, v_2\}$ est une famille **indépendante**.

② Prenons $v_1 = (0, 1)$ et $v_2 = (0, 2)$.

On résout $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (0, 0)$:

$$\alpha_1 (0, 1) + \alpha_2 (0, 2) = (0, 0)$$

$$(0, \alpha_1) + (0, 2\alpha_2) = (0, 0)$$

$$(0, \alpha_1 + 2\alpha_2) = (0, 0)$$

Donc $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$, soit $\alpha_1 = -2\alpha_2$.

L'ensemble des solutions est :

$$S = \{(-2\alpha_2, \alpha_2) \mid \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

Il existe donc une infinité de solutions non triviales.

Ainsi, $\{v_1, v_2\}$ est une famille **linéairement dépendante**.

Retour à l'exercice :

L'équation $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = (0, \dots, 0)$ correspond à un système de n équations à m inconnues :

$$\begin{cases} \alpha_1 \beta_{11} + \dots + \alpha_m \beta_{1m} = 0 \\ \alpha_1 \beta_{21} + \dots + \alpha_m \beta_{2m} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \beta_{n1} + \dots + \alpha_m \beta_{nm} = 0 \end{cases}$$

Cas $m > n$:

On a strictement plus d'inconnues que d'équations, donc le système admet une infinité de solutions.

Par conséquent, $\{v_1, \dots, v_m\}$ est **linéairement dépendant**.

Cas $m \leq n$:

On ne peut rien dire en général (la famille peut être indépendante ou dépendante).

Conclusion : L'assertion est **VRAIE**. Si $m > n$, toute famille de m vecteurs de \mathbb{R}^n est linéairement dépendante.

Exercice 3.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m si, et seulement si la forme échelonnée a une position pivot dans chaque ligne.

Correction de l'exercice 3.

Rappel : Une famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^m **engendre** \mathbb{R}^m si tout vecteur de \mathbb{R}^m s'écrit comme combinaison linéaire de v_1, \dots, v_n .

Autrement dit : pour tout $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = (b_1, \dots, b_m)$$

Preuve :

Soit A une matrice de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes de A sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Condition pour engendrer \mathbb{R}^m avec $m \leq n$:

$\{v_1, \dots, v_n\}$ engendrent \mathbb{R}^m si et seulement si la forme échelonnée de A possède exactement m pivots (un sur chaque ligne).

$\{v_1, \dots, v_n\}$ engendrent \mathbb{R}^m si et seulement si pour tout $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, le système :

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

admet au moins une solution.

Ce système s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Analyse par élimination de Gauss :

Le système admet une solution pour **tout** $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ si et seulement si la forme échelonnée de la matrice augmentée $(A | b)$ ne contient **aucune** ligne de la forme :

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 | b) \text{ avec } b \neq 0$$

(car une telle ligne correspondrait à l'équation impossible $0 = b$).

Cela est équivalent à dire que **chaque ligne** de la forme échelonnée de A contient un **pivot**.

Exemples illustratifs :

- ① Dans \mathbb{R}^2 , considérons $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$.

La matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on résout :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $\alpha_1 = x_1$ et $\alpha_2 = x_2$. Le système admet toujours une solution.

La forme échelonnée possède un pivot sur chaque ligne (ici, la matrice est déjà échelonnée).

Donc $\{v_1, v_2\}$ engendrent \mathbb{R}^2 .

② Considérons $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (2, 0)$.

La matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Cela donne le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

C'est impossible ! La deuxième ligne ne contient pas de pivot.

Donc $\{v_1, v_2\}$ n'engendre **pas** \mathbb{R}^2 .

Conclusion :

Les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m **si et seulement si** la forme échelonnée de A possède exactement m pivots (un sur chaque ligne).

\Rightarrow Si les colonnes engendrent \mathbb{R}^m , alors le système $Ax = b$ admet une solution pour tout $b \in \mathbb{R}^m$, donc chaque ligne doit avoir un pivot.

\Leftarrow Si chaque ligne a un pivot, alors le système $Ax = b$ admet toujours une solution, donc les colonnes engendrent \mathbb{R}^m .

Exercice 4.

Calculer $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$, où

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$

Correction de l'exercice 4.

Rappel : Le calcul matriciel $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$ peut se faire de deux façons équivalentes :

- * Méthode 1 : Calculer d'abord $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, puis multiplier par A .
- * Méthode 2 : Utiliser la linéarité : $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2$.

a) Premier cas :

On a $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$.

Étape 1 : Calcul de la combinaison linéaire :

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Étape 2 : Multiplication par la matrice A :

$$\begin{aligned}A \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 1 \times 11 \\ 4 \times 3 + 0 \times 11 \\ 1 \times 3 + 3 \times 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 11 \\ 12 + 0 \\ 3 + 33 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b) Deuxième cas :

On a $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$.

Étape 1 : Calcul de la combinaison linéaire :

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &= -1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 + 3 \\ -1 + 1 \\ -2 + 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Étape 2 : Multiplication par la matrice A :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 1 \times 0 + 4 \times 5 \\ 3 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 0 + 20 \\ -3 + 0 + 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rappel important sur la multiplication matricielle :

Pour multiplier deux matrices $A \times B$, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .

Si A est de taille $m \times n$ et B est de taille $n \times p$, alors le produit AB est de taille $m \times p$.

Conclusion :

⊛ Pour le cas a) : $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}$

⊛ Pour le cas b) : $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^2 .

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5.

a) Étude dans \mathbb{R}^3 :

On forme la matrice A dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, v_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On effectue l'élimination de Gauss pour échelonner la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L'_2=L_2-2L_1 \\ L'_3=L_3-L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L''_3=2L'_3-L'_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Analyse des pivots :

La matrice échelonnée possède 3 pivots (mis en évidence par les cadres) :

- ⊙ La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est **linéairement indépendante**.
- ⊙ Comme il y a 3 vecteurs indépendants dans \mathbb{R}^3 , la famille **engendre** \mathbb{R}^3 .

b) Étude dans \mathbb{R}^3 :

Observons les vecteurs v_1 et v_2 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On constate que $v_2 = -v_1$. La famille contient deux vecteurs colinéaires.

Conclusion :

La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est **linéairement dépendante**. Elle ne peut donc pas engendrer \mathbb{R}^3 (il lui manque au moins un vecteur pour avoir une dimension de 3).

c) Étude dans \mathbb{R}^2 :

On considère $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Indépendance linéaire :

\mathbb{R}^2 est un espace vectoriel de dimension 2. D'après le théorème fondamental, toute famille de \mathbb{R}^2 contenant plus de 2 vecteurs est nécessairement **linéairement dépendante**.

Ici, on a 3 vecteurs dans \mathbb{R}^2 , donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est **dépendante**.

Est-ce que la famille engendre \mathbb{R}^2 ?

Pour engendrer \mathbb{R}^2 , il faut trouver une sous-famille libre à 2 vecteurs. Étudions la sous-famille $\{v_1, v_2\}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L'_2=L_2-L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

Il y a 2 pivots. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre (une base) de \mathbb{R}^2 .

Conclusion :

Bien que la famille complète soit dépendante, la sous-famille $\{v_1, v_2\}$ engendre déjà \mathbb{R}^2 . Par conséquent, la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ **engendre** \mathbb{R}^2 .

Rappels importants sur les familles de vecteurs dans \mathbb{R}^n :

Soit $\{v_1, \dots, v_m\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

- ① Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ est **linéairement indépendante**, alors nécessairement $m \leq n$.
- ② Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ **engendre** \mathbb{R}^n , alors nécessairement $m \geq n$.
- ③ Si $m = n$: la famille est linéairement indépendante **si et seulement si** elle engendre \mathbb{R}^n (c'est alors une base).

Exercice 6.

Écrire les systèmes suivants sous la forme $Ax = b$. Déterminer dans chaque cas si les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} -7 & 37 & 119 \\ 5 & 19 & 57 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 6.

a) Mise sous forme matricielle :

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On cherche une matrice A telle que $AX = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -2 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes sont :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Échelonnement de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -2 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 0 & -12 & 9 \\ 0 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L''_3 = L'_3 + L'_2} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -5 & 8 \\ 0 & \boxed{-12} & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

La matrice échelonnée ne possède que 2 pivots. Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est **pas libre** (les vecteurs colonnes sont linéairement dépendants).

b) Deuxième système :

La matrice associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Échelonnement :

$$A \xrightarrow{\substack{L'_2 = L_2 + 2L_1 \\ L'_3 = L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L''_3 = L'_3 + L'_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 7 \\ 0 & \boxed{-5} & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{12} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

La matrice possède 3 pivots. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ forment une **famille libre**.

c) Troisième cas :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 37 & 119 \\ 5 & 19 & 57 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

Les vecteurs colonnes sont **linéairement dépendants** (plus de vecteurs que la dimension : 3 vecteurs dans \mathbb{R}^2).

Exercice 7.

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants.

- a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.
- b) A est une matrice 4×2 , $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ et α_2 n'est pas multiple de α_1 .
- c) A est une matrice 4×3 , $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Les vecteurs α_1 et α_2 sont linéairement indépendants, et α_3 n'est pas une combinaison linéaire de α_1 et α_2 .

Correction de l'exercice 7.

a) Matrice 3×3 à colonnes indépendantes :

Si les 3 colonnes sont linéairement indépendantes dans \mathbb{R}^3 , alors la matrice est inversible et sa forme échelonnée réduite est la matrice identité :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet, $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de \mathbb{R}^3 , donc la matrice est équivalente à I_3 .

b) Matrice 4×2 avec colonnes indépendantes :

Comme α_2 n'est pas multiple de α_1 , les deux colonnes sont linéairement indépendantes.

En particulier, $\alpha_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La forme échelonnée réduite est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 2 pivots (un sur chaque colonne).

c) Matrice 4×3 avec 3 colonnes indépendantes :

Les vecteurs α_1 , α_2 et α_3 sont linéairement indépendants, et $\alpha_3 \notin \text{Vect}\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Donc $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ forme une famille libre.

La matrice échelonnée réduite est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots (un sur chaque colonne).

Exercice 8.

a) Dans \mathbb{R}^3 , est-ce que $(1, 7, -4) \in \text{Vect}\{(1, -3, 2), (2, -1, 1)\}$?

Même question avec $(2, -5, 4)$.

b) Trouver $k \in \mathbb{R}$ pour que $(1, -2, k) \in \text{Vect}\{(3, 0, -2), (2, -1, -5)\}$.

Correction de l'exercice 8.

a) Étude de l'appartenance au sous-espace vectoriel :

On cherche à savoir si le vecteur $(1, 7, -4)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, -3, 2)$ et $(2, -1, 1)$.

On forme la matrice augmentée et on l'échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L'_2 = L_2 + 3L_1 \\ L'_3 = L_3 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5L'_3 + 3L'_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Analyse :

La dernière ligne étant nulle, le système est compatible.

Le vecteur $(1, 7, -4)$ est donc une **combinaison linéaire** des deux vecteurs donnés.

Même question avec $(2, -5, 4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L'_2=L_2+3L_1 \\ L'_3=L_3-2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5L'_3+3L'_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

La matrice possède 3 pivots. La famille est **libre**.

Le vecteur $(2, -5, 4)$ n'est **pas** une combinaison linéaire de $(1, -3, 2)$ et $(2, -1, 1)$.

b) Recherche de la valeur de k :

On cherche $k \in \mathbb{R}$ tel que $(1, -2, k) \in \text{Vect}\{(3, 0, -2), (2, -1, -5)\}$.

On échelonne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{L'_3=3L_3+2L_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -11 & 3k+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L''_3=L'_3-11L'_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3k+2+22 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3k+24 \end{pmatrix}$$

Condition de compatibilité :

Pour que le vecteur appartienne au sous-espace engendré, il faut que la dernière ligne soit nulle :

$$3k+24=0 \Rightarrow 3k=-24 \Rightarrow k=-8$$

Conclusion :

Le vecteur $(1, -2, k)$ appartient à $\text{Vect}\{(3, 0, -2), (2, -1, -5)\}$ si et seulement si $k = -8$.

Exercice 9.

Soient u, v et w trois vecteurs de \mathbb{R}^n linéairement indépendants.

Montrer que les trois vecteurs $u + v, u - v$ et $u - 2v + w$ de \mathbb{R}^n linéairement indépendants.

Correction de l'exercice 9.

Démonstration de l'indépendance linéaire :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha(u+v) + \beta(u-v) + \gamma(u-2v+w) = 0$$

En développant et en regroupant les termes :

$$\alpha u + \alpha v + \beta u - \beta v + \gamma u - 2\gamma v + \gamma w = 0$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)u + (\alpha - \beta - 2\gamma)v + \gamma w = 0$$

Utilisation de l'indépendance de $\{u, v, w\}$:

Puisque $\{u, v, w\}$ est une famille linéairement indépendante, les coefficients doivent être nuls :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

De la troisième équation, on obtient $\gamma = 0$.

En substituant dans les deux premières équations :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

En additionnant : $2\alpha = 0$, donc $\alpha = 0$.

Puis $\beta = -\alpha = 0$.

Conclusion :

La seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Donc la famille $\{u+v, u-v, u-2v+w\}$ est **linéairement indépendante**.

Exercice 10.

Déterminer dans chaque cas si les vecteurs donnés forment une base de \mathbb{R}^3 .

- a) $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)$.
- b) $(1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2)$.
- c) $(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$.

Correction de l'exercice 10.

Rappel : On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

Une base de \mathbb{R}^n est une famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ qui est libre **et** génératrice de \mathbb{R}^n .

Dans le cas où le nombre de vecteurs est égal à la dimension de l'espace, on peut remplacer le "et" par "ou".

a) **Étude de la famille** $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$:

B est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si B est libre.

On forme la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue l'élimination de Gauss :

$$A \xrightarrow{\substack{L'_3 = L_3 - L_1 \\ L'_2 = L_2 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L''_3 = L'_3 - 2L'_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}$$

Conclusion : La matrice est inversible (3 pivots). La famille est libre, donc B est une **base de** \mathbb{R}^3 .

b) **Étude de la famille** $\{(1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2)\}$:

Le nombre de vecteurs (4) dépasse la dimension de l'espace (3).

Conclusion : La famille est nécessairement liée. Ce n'est **pas une base de** \mathbb{R}^3 .

c) **Étude de la famille** $\{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$:

On forme la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

On effectue l'élimination de Gauss :

$$A \xrightarrow{\substack{L'_3 = L_3 - 2L_1 \\ L'_2 = L_2 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L''_3 = L'_3 - 3L'_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : La famille n'est pas libre (il n'y a que 2 pivots). Le vecteur (5, 3, 4) est une combinaison linéaire des deux autres.

Ce n'est **pas une base de** \mathbb{R}^3 .

Exercice 11.

On considère les \mathbb{R} -espaces vectoriels \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Dire si les vecteurs sont linéairement indépendants dans chacun des cas suivants.

(1) $u = (0, 0)$, $v = (1, 2)$.

(2) $u' = (1, 1)$, $v' = (4, 5)$.

(3) $u'' = (-1, 1)$, $v'' = (2, 1)$, $w'' = (3, 7)$.

(4) $a = (-2, 1, -1)$, $b = (1, 1, 1)$, $c = (1, 2, t)$ (discuter selon t).

Correction de l'exercice 11.

(1) Étude dans \mathbb{R}^2 :

On a $u = (0, 0)$ et $v = (1, 2)$.

La famille $\{u, v\}$ n'est pas libre car elle contient le vecteur nul u .

(2) Étude dans \mathbb{R}^2 :

On a $u' = (1, 1)$ et $v' = (4, 5)$. On forme la matrice des vecteurs et on l'échelonne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L'_2 = L_2 - L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

La matrice possède 2 pivots. Donc la famille $\{u', v'\}$ est libre (linéairement indépendante).

(3) Étude dans \mathbb{R}^2 :

On a $u'' = (-1, 1)$, $v'' = (2, 1)$, $w'' = (3, 7)$.

On se place dans \mathbb{R}^2 car chaque vecteur possède deux composantes.

La dimension de l'espace est $n = 2$.

Comme la famille contient $m = 3$ vecteurs et que $m > n$, la famille est nécessairement liée (linéairement dépendante).

(4) Étude dans \mathbb{R}^3 (paramétrée) :

On a $a = (-2, 1, -1)$, $b = (1, 1, 1)$, $c = (1, 2, t)$. On forme la matrice A et on l'échelonne :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L'_3 = 2L_3 - L_1 \\ L'_2 = 2L_2 + L_1}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2t - 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L''_3 = 3L'_3 - L'_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3(2t - 1) - 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{6t - 8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Condition pour être libre :

La famille est libre si et seulement si la matrice possède 3 pivots, c'est-à-dire si le dernier terme est non nul :

$$6t - 8 \neq 0 \Rightarrow 6t \neq 8 \Rightarrow t \neq \frac{4}{3}$$

Conclusion :

- * Si $t \neq \frac{4}{3}$, la famille $\{a, b, c\}$ est **libre**.
- * Si $t = \frac{4}{3}$, la famille est **liée**.

Exercice 12.

(1) La famille $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est-elle libre dans \mathbb{R} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel?

(2) Expliquer pourquoi \mathbb{R} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel.

La famille $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est-elle libre dans cet espace?

Correction de l'exercice 12.

(1) Liberté dans \mathbb{R} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel :

L'espace \mathbb{R} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel est de dimension 1.

On considère la famille $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ qui contient 2 vecteurs.

Comme le nombre de vecteurs, qui est de 2, est strictement supérieur à la dimension de l'espace qui est de 1, la famille est nécessairement **liée**.

(2) \mathbb{R} comme \mathbb{Q} -espace vectoriel :

\mathbb{R} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel car :

- * $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien.
- * On peut multiplier un réel par un rationnel et obtenir un réel.
- * Les propriétés de distributivité et d'associativité sont vérifiées.

Liberté de $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ dans cet espace :

On cherche si l'équation $\lambda_1\sqrt{2} + \lambda_2\sqrt{3} = 0$ (avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$) admet pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tels que :

$$\lambda_1\sqrt{2} + \lambda_2\sqrt{3} = 0$$

- * Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\sqrt{2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{3}$, donc $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$.
- * Si $\lambda_2 \neq 0$, alors $\sqrt{3} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{2}$, donc $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

Preuve par l'absurde : Supposons que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$.

Alors $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

$$q\sqrt{2} = p\sqrt{3}$$

En élevant au carré :

$$2q^2 = 3p^2$$

Cela implique que p^2 est pair, donc p est pair. On pose $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

En remplaçant :

$$2q^2 = 3(2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = 12k^2 \Rightarrow q^2 = 6k^2$$

Cela implique que q^2 est pair, donc q est pair.

Contradiction : p et q sont tous les deux pairs, ce qui contredit le fait qu'ils soient premiers entre eux.

Donc $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$.

Conclusion :

La seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Donc la famille $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est **libre** dans \mathbb{R} vu comme \mathbb{Q} -espace vectoriel.

Exercice 13.

On considère l'espace réel \mathbb{R}^4 . Trouver les dimensions des sous-espaces de \mathbb{R}^4 :

$$E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\},$$

$$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z - t = 0\},$$

$$E_3 = E_1 \cap E_2.$$

Correction de l'exercice 13.

Rappel : Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E défini par un système d'équations linéaires homogènes.

$$\dim F = n - \text{rang du système}$$

1) Dimension de E_1 :

E_1 est un sous-espace de \mathbb{R}^4 ($\dim \mathbb{R}^4 = 4$). E_1 est défini par une seule équation linéaire homogène :

$$x + y + z + t = 0$$

Le rang de ce système est 1 (un pivot).

Calcul :

$$\dim E_1 = 4 - 1 = 3$$

2) Dimension de E_2 :

De même, E_2 est défini par une seule équation linéaire homogène :

$$x - y - z - t = 0$$

Le rang est 1.

Calcul :

$$\dim E_2 = 4 - 1 = 3$$

3) Dimension de $E_3 = E_1 \cap E_2$:

E_3 est l'ensemble des vecteurs qui vérifient simultanément les équations de E_1 et E_2 . On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations ($L_1 + L_2$) :

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

En remplaçant x par 0 dans la première équation :

$$0 + y + z + t = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -z - t$$

Analyse des variables :

- ⊙ x et y sont des variables liées (dépendantes).
- ⊙ z et t sont des variables libres.

Puisqu'il y a 2 variables libres, la dimension de l'espace solution est 2.

Conclusion :

$$\dim E_3 = 2$$

Exercice 14.

Soit $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$.

- a) Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Déterminer les composantes de $v = (1, 1, 1)$ dans la base \mathcal{B} .

Correction de l'exercice 14.

a) Montrons que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 :

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et que \mathcal{B} contient 3 vecteurs, pour montrer que \mathcal{B} est une base, il suffit de vérifier que \mathcal{B} est libre.

1ère méthode : Avec la matrice (Échelonnement)

On forme la matrice A dont les colonnes sont les vecteurs de \mathcal{B} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes pour échelonner la matrice :

$$A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L'_3 = L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L''_3 = L'_3 - L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

La matrice échelonnée possède 3 pivots.

Conclusion : \mathcal{B} est une famille libre, donc \mathcal{B} est une **base de \mathbb{R}^3** .

2ème méthode : Avec la définition

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0)$$

En développant :

$$\alpha (0, 1, 1) + \beta (1, 0, 1) + \gamma (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Ce qui donne le système d'équations :

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

De la première équation : $\beta = -\gamma$.

De la deuxième équation : $\alpha = -\gamma$.

En remplaçant dans la troisième équation :

$$-\gamma + (-\gamma) = 0 \Rightarrow -2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Donc $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Conclusion : La seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc \mathcal{B} est une famille libre. Comme \mathcal{B} contient 3 vecteurs dans \mathbb{R}^3 , \mathcal{B} est une **base de** \mathbb{R}^3 .

b) Déterminer les composantes de $v = (1, 1, 1)$ dans la base \mathcal{B} :

Rappel : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} et $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base de E . Pour tout $v \in E$, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Ces scalaires sont les coordonnées de v dans la base \mathcal{B} .

On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (1, 1, 1)$$

En développant :

$$\begin{aligned} \lambda_1 (0, 1, 1) + \lambda_2 (1, 0, 1) + \lambda_3 (1, 1, 0) &= (1, 1, 1) \\ \iff (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

En additionnant les trois équations, on obtient $2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 3$, soit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{3}{2}$.

En soustrayant chaque équation initiale à cette somme, on trouve :

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Conclusion : Les composantes de v dans la base \mathcal{B} sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 15.

Soit $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, \frac{1}{2})$ et $u_3 = (0, -1, \frac{1}{2})$.

- Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer les composantes de $v = (2, 3, 4)$ dans la base \mathcal{B} .

Correction de l'exercice 15.

a) Montrons que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 :

On forme la matrice A dont les colonnes sont les vecteurs de \mathcal{B} et on l'échelonne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes :

$$A \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2L_3 - \frac{3}{2}L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

Conclusion : La matrice échelonnée possède 3 pivots (les éléments encadrés). Donc \mathcal{B} est une famille libre. Comme \mathcal{B} contient 3 vecteurs dans \mathbb{R}^3 , \mathcal{B} est une **base de \mathbb{R}^3** .

b) Déterminer les composantes de $v = (2, 3, 4)$ dans la base \mathcal{B} :

Méthode 1 : Résolution du système avec la matrice échelonnée (Cas particulier)

On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = v$$

Cela revient à résoudre le système linéaire associé à la matrice augmentée $(A|v)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \end{array} \right)$$

On applique la même méthode d'échelonnement que précédemment :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{2L_3 - \frac{3}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

Résolution par remontée :

- * $\frac{5}{2}\lambda_3 = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda_3 = 1.$
- * $2\lambda_2 - \lambda_3 = 1 \Rightarrow 2\lambda_2 - 1 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1.$
- * $\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \Rightarrow \lambda_1 - 1 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = 3.$

Méthode 2 : Méthode générale avec un vecteur $v = (x, y, z)$

Remarque : Soit E un espace vectoriel. $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de E si et seulement si pour tout $v \in E$, il existe de manière unique un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$.

Application à l'exercice : Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \\ (x, y, z) &= \lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right) + \lambda_3 \left(0, -1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = y \\ \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 = z \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss (matrice augmentée) :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & -1 & y \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & z \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & -1 & y - x \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & z - x \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{4L_3 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & x \\ 0 & \boxed{2} & -1 & y - x \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 4(z - x) - 3(y - x) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Simplifions le dernier terme : $4z - 4x - 3y + 3x = -x - 3y + 4z$.

On en déduit les formules pour les composantes :

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{1}{5}(-x - 3y + 4z) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(y - x + \lambda_3) \\ \lambda_1 &= x + \lambda_2 \end{aligned}$$

Application pour $v = (2, 3, 4)$:

On remplace $x = 2, y = 3, z = 4$ dans les formules trouvées :

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{1}{5}(-2 - 3 \times 3 + 4 \times 4) = \frac{1}{5}(-2 - 9 + 16) = \frac{1}{5} \times 5 = 1 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(3 - 2 + 1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \\ \lambda_1 &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Conclusion : Les composantes de v dans la base \mathcal{B} sont $(3, 1, 1)$.

Exercice 1.

Déterminer si l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de F lorsque

- ① $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 7\}, F = \mathbb{R}^2,$
- ② $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0\}, F = \mathbb{R}^2,$
- ③ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}, F = \mathbb{R}^2,$
- ④ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by = 0\}$ où a, b sont des réels donnés, $F = \mathbb{R}^2.$
- ⑤ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + \alpha y + 1 \geq 0\}, F = \mathbb{R}^2,$
- ⑥ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\},$ où $a \in \mathbb{R}, F = \mathbb{R}^3,$
- ⑦ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, e^x e^y = 0\}, F = \mathbb{R}^3,$
- ⑧ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}, F = \mathbb{R}^3.$

Exercice 2.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

- ① Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- ② (a) Donner un contre-exemple simple montrant que $F \cup G$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- (b) On considère le sous-ensemble

$$\{u \in \mathbb{R}^n, (\exists v \in F \exists w \in G, u = v + w)\}$$

que l'on note $F + G$ (on dit que $F + G$ est la *somme de F et de G*).

Vérifier que $F + G$ est un s.e.v. de \mathbb{R}^n et que c'est le plus petit contenant $F \cup G$.

Exercice 3.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les sous-ensembles

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, b - 2c + d = 0\}, \quad \text{et} \quad W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a = d \text{ et } b = 2c\}.$$

- ① Vérifier que V et W sont des s.e.v. de \mathbb{R}^4 .
- ② Montrer que les vecteurs

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, -1), v_3 = (0, 0, 1, 2),$$

forment une base de V et donner alors la dimension de V .

- ③ Trouver une base de chacun des s.e.v. $W, V + W$ et $V \cap W$ puis donner leurs dimensions respectives.

Exercice 4.

Etant donnés deux s.e.v. F et G de \mathbb{R}^n , on dit que \mathbb{R}^n est la *somme directe* de F et de G (et on écrit que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$) si tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

- ① Montrer que l'on a $\mathbb{R}^n = F \oplus G$ si et seulement si $\mathbb{R}^n = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.
- ② On considère dans cette question

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}.$$

Après avoir vérifié que F et G sont des s.e.v. de \mathbb{R}^3 , montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

- ③ On considère dans cette question

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

On vérifie que F et G sont des s.e.v. de \mathbb{R}^3 (on pourra se dispenser de cette vérification).

- ④ Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$.
- ⑤ A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

Exercice 5.

On considère le s.e.v. F de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (-1, 1, 2), v_3 = (3, 0, -4), v_4 = (5, 1, -6),$$

autrement dit $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Donner F sous forme cartésienne, c'est à dire caractériser les éléments de F par une ou plusieurs équations de la forme $ax + by + cz = 0$.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x \text{ et } z - 2y - x + t = 0\}.$$

- ① Vérifier que F est un s.e.v. de \mathbb{R}^4 .
- ② Quelle est la forme générale d'un élément de F ? En déduire une famille génératrice de F .

Exercice 6.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - \lambda t = 0\}.$$

- ① Vérifier que F est un s.e.v. de \mathbb{R}^4 .
- ② Déterminer une base de F .

Exercice 7.

Soit F le s.e.v. de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3).$$

- ① Les vecteurs u, v, w sont-ils linéairement indépendants?
- ② Trouver une base de F puis donner la dimension de F .

- ③ On considère le sous-ensemble G de \mathbb{R}^3 défini par

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}.$$

- (a) Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
(b) Trouver une base de G puis donner la dimension de G .

- ④ Montrer que $F \subset G$, puis en déduire que $F = G$.

Exercice 8.

Soit $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^4 avec

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), v_2 = (0, 0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0, -1), v_4 = (2, 2, 1, -1), v_5 = (1, 2, 2, 0).$$

On note G le s.e.v engendré par les vecteurs de F , autrement dit $G = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

- ① On se propose d'extraire de F , famille génératrice de G , une base de G .
- (a) Pourquoi peut-on affirmer, sans faire aucun calcul, que ces vecteurs v_1, \dots, v_5 sont liés? Trouver alors des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ non tous nuls tels que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_5 v_5 = 0$ et en déduire une expression de l'un des vecteurs v_i comme combinaison linéaire des autres. On notera ce vecteur v_{i_0} .
- (b) On pose $F_0 = F \setminus \{v_{i_0}\}$. Comparer G et le s.e.v. engendré par les vecteurs de F_0 .
- (c) Vérifier que les vecteurs de F_0 sont liés et en déduire l'expression de l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des autres. On notera ce vecteur v_{i_1} .
- (d) On pose $F_1 = F_0 \setminus \{v_{i_1}\}$. Comparer G et le s.e.v. engendré par les vecteurs de F_1 .
- (e) Vérifier que la famille F_1 est libre. Conclure.
- ② En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, donner une méthode permettant d'extraire une base d'une famille génératrice v_1, \dots, v_k d'un espace vectoriel E .

Exercice 9.

On donne les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 2, 2, 0), \quad v_4 = (0, 0, 0, 1), \quad v_5 = (3, 1, 1, 2),$$

et $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Extraire de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ une base de F . Quelle est la dimension de F ?

Exercice 1.

Déterminer si l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de F lorsque

- ① $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 7\}, F = \mathbb{R}^2,$
- ② $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0\}, F = \mathbb{R}^2,$
- ③ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}, F = \mathbb{R}^2,$
- ④ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by = 0\}$ où a, b sont des réels donnés, $F = \mathbb{R}^2.$
- ⑤ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + \alpha y + 1 \geq 0\}, F = \mathbb{R}^2,$
- ⑥ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\},$ où $a \in \mathbb{R}, F = \mathbb{R}^3,$
- ⑦ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, e^x e^y = 0\}, F = \mathbb{R}^3,$
- ⑧ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}, F = \mathbb{R}^3.$

Correction de l'exercice 1.

Rappel : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Soit $F \subset E$.

On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v) de E si :

- ⊙ $F \neq \emptyset$ (ou de manière équivalente $0_E \in F$)
- * $\forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u + \lambda v \in F$ (stabilité par combinaison linéaire).

① $F = \mathbb{R}^2, E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 7\}.$

Le vecteur nul $0_F = (0, 0)$. Or $0 + 0 = 0 \neq 7$.

Donc $0_F \notin E$.

Conclusion : E n'est pas un sous-espace vectoriel de F .

② $F = \mathbb{R}^2, E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}.$

Prenons $u = (1, 1)$ et $v = (-2, 0)$.

⊙ $u \in E$ car $1 \times 1 = 1 \geq 0$.

⊙ $v \in E$ car $-2 \times 0 = 0 \geq 0$.

Calculons la somme : $u + v = (1 - 2, 1 + 0) = (-1, 1)$.

Le produit des coordonnées est $(-1) \times 1 = -1 < 0$. Donc $u + v \notin E$.

Conclusion : E n'est pas stable par l'addition, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

③ $F = \mathbb{R}^2, E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}.$

Prenons $u = (1, 1) \in E$ (car $1 \geq 0$).

Prenons $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda u = (-1, -1)$.

Or $-1 < 0$, donc $\lambda u \notin E$.

Conclusion : E n'est pas stable par multiplication scalaire, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

④ $F = \mathbb{R}^2$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by = 0\}$ où a et b sont des réels donnés.

① $0_F = (0, 0) \in E$ car $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

② Soient $u = (x, y) \in E$, $v = (x', y') \in E$.

A-t-on $u + v \in E$?

$$u + v = (x + x', y + y').$$

$$a(x + x') + b(y + y') = \underbrace{ax + by}_{=0} + \underbrace{ax' + by'}_{=0} = 0.$$

Car (x, y) et $(x', y') \in E$.

Donc $u + v \in E$.

③ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit $u = (x, y) \in E$.

A-t-on $\lambda u \in E$?

$$\text{On a } \lambda u = (\lambda x, \lambda y).$$

$$a(\lambda x) + b(\lambda y) = \lambda \underbrace{(ax + by)}_{=0} = 0.$$

Donc $\lambda u \in E$.

Donc E est un s.e.v de F .

⑤ $F = \mathbb{R}^2$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + \alpha y + 1 \geq 0\}$.

$u = (2, 0) \in E$ mais $\lambda u = (-2, 0) \notin E$ avec $\lambda = -1$.

Donc E n'est pas un s.e.v de F .

⑥ $\mathbb{R}^3 = F$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$ où $a \in \mathbb{R}$ donné.

$$0_F = (0, 0, 0) \in F \Leftrightarrow a = 0.$$

La condition est vérifiée si $a = 0$. On suppose dans la suite que $a = 0$. Dans ce cas :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ et } x = 0\} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

C'est un s.e.v car toutes les conditions sont vérifiées.

⑦ NON car $e^{2x}e^y = 0 \Rightarrow \emptyset$.

⑧ $F = \mathbb{R}^3$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}$.

$$u = (0, 0, 1) \in E$$

$$v = (1, 1, 0) \in E$$

$$u + v = (1, 1, 1) \notin E$$

E n'est pas un s.e.v de F .

Exercice 2.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

- ① Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- ②
 - Ⓐ Donner un contre-exemple simple montrant que $F \cup G$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
 - Ⓑ On considère le sous-ensemble

$$\{u \in \mathbb{R}^n, (\exists v \in F \exists w \in G, u = v + w)\}$$

que l'on note $F + G$ (on dit que $F + G$ est la *somme de F et de G*).

Vérifier que $F + G$ est un s.e.v. de \mathbb{R}^n et que c'est le plus petit contenant $F \cup G$.

Correction de l'exercice 2.

1) Intersection $F \cap G$:

On sait que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n , donc $\mathbb{R}^n \in F$ et $\mathbb{R}^n \in G$.

Donc $\mathbb{R}^n \in F \cap G$, ce qui montre que $F \cap G$ est non vide.

Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition de l'intersection, on a $x \in F$, $y \in F$, $x \in G$ et $y \in G$.

- ⊛ Comme F est un s.e.v., il est stable par combinaison linéaire : $x + \lambda y \in F$.
- ⊛ Comme G est un s.e.v., il est stable par combinaison linéaire : $x + \lambda y \in G$.

Donc $x + \lambda y \in F \cap G$.

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

2) a) Union $F \cup G$:

Contre-exemple dans \mathbb{R}^2 :

Considérons les sous-espaces vectoriels suivants (les axes du plan) :

$$F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad (\text{axe des abscisses})$$

$$G = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \quad (\text{axe des ordonnées})$$

On a $(1, 0) \in F \subset F \cup G$ et $(0, 1) \in G \subset F \cup G$.

Calculons leur somme :

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$$

Or $(1, 1) \notin F$ (car la deuxième coordonnée n'est pas nulle) et $(1, 1) \notin G$ (car la première coordonnée n'est pas nulle). Donc $(1, 1) \notin F \cup G$.

Conclusion : $F \cup G$ n'est pas stable par l'addition, donc ce n'est **pas** un sous-espace vectoriel en général.

2) b) Somme $F + G$:

Stabilité :

On a $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n + 0_{\mathbb{R}^n}$ avec $\mathbb{R}^n \in F$ et $\mathbb{R}^n \in G$, donc $\mathbb{R}^n \in F + G$. L'ensemble est non vide.

Soient $u_1, u_2 \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe $v_1, v_2 \in F$ et $w_1, w_2 \in G$ tels que :

$$u_1 = v_1 + w_1 \quad \text{et} \quad u_2 = v_2 + w_2$$

Considérons la combinaison linéaire :

$$u_1 + \lambda u_2 = (v_1 + w_1) + \lambda(v_2 + w_2) = \underbrace{(v_1 + \lambda v_2)}_{\in F} + \underbrace{(w_1 + \lambda w_2)}_{\in G}$$

Comme F et G sont des s.e.v., on a $v_1 + \lambda v_2 \in F$ et $w_1 + \lambda w_2 \in G$. Donc $u_1 + \lambda u_2 \in F + G$.

Conclusion partielle : $F + G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Plus petit sous-espace contenant $F \cup G$:

- ⊛ Pour tout $v \in F$, on peut écrire $v = v + 0$ avec $0 \in G$. Donc $v \in F + G$. Ainsi $F \subset F + G$.
- ⊛ Pour tout $w \in G$, on peut écrire $w = 0 + w$ avec $0 \in F$. Donc $w \in F + G$. Ainsi $G \subset F + G$.

On en déduit que $F \cup G \subset F + G$.

Maintenant, soit H un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n tel que $F \cup G \subset H$. Alors $F \subset H$ et $G \subset H$. Pour tout $u \in F + G$, il existe $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$. Comme $v \in H$ et $w \in H$, et que H est stable par addition, on a $u = v + w \in H$. Donc $F + G \subset H$.

Conclusion : $F + G$ est bien le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$.

Exercice 3.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les sous-ensembles

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, b - 2c + d = 0\}, \quad \text{et} \quad W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a = d \text{ et } b = 2c\}.$$

- ① Vérifier que V et W sont des s.e.v. de \mathbb{R}^4 .
- ② Montrer que les vecteurs

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, -1), v_3 = (0, 0, 1, 2),$$

forment une base de V et donner alors la dimension de V .

- ③ Trouver une base de chacun des s.e.v. $W, V + W$ et $V \cap W$ puis donner leurs dimensions respectives.

Correction de l'exercice 3.

1) Vérification que V et W sont des sous-espaces vectoriels :

- ⊛ Le vecteur nul $\mathbb{R}^4 = (0, 0, 0, 0)$ appartient à V car $0 - 2 \times 0 + 0 = 0$.

Il appartient aussi à W car $0 = 0$ et $0 = 2 \times 0$.

- ⊛ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $u = (a, b, c, d) \in V$ et $v = (a', b', c', d') \in V$. On a :

$$u + \lambda v = (a + \lambda a', b + \lambda b', c + \lambda c', d + \lambda d')$$

Vérifions la condition pour V :

$$\begin{aligned} (b + \lambda b') - 2(c + \lambda c') + (d + \lambda d') &= (b - 2c + d) + \lambda(b' - 2c' + d') \\ &= 0 + \lambda \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $u + \lambda v \in V$. Ainsi, V est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

- ⊛ Soient $u = (a, b, c, d) \in W$ et $v = (a', b', c', d') \in W$. On a $a = d, b = 2c$ et $a' = d', b' = 2c'$. Considérons $u + \lambda v = (a + \lambda a', b + \lambda b', c + \lambda c', d + \lambda d')$.

- ⊛ Première coordonnée vs quatrième : $a + \lambda a' = d + \lambda d'$ (car $a = d$ et $a' = d'$).

$$\star \text{ Deuxième coordonnée vs troisième : } b + \lambda b' = 2c + \lambda(2c') = 2(c + \lambda c').$$

Donc $u + \lambda v \in W$. Ainsi, W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

2) Base de V :

On vérifie d'abord que les vecteurs appartiennent à V :

$$\star \text{ Pour } v_1 = (1, 0, 0, 0) : 0 - 2 \times 0 + 0 = 0. \quad \text{OK.}$$

$$\star \text{ Pour } v_2 = (0, 1, 0, -1) : 1 - 2 \times 0 + (-1) = 0. \quad \text{OK.}$$

$$\star \text{ Pour } v_3 = (0, 0, 1, 2) : 0 - 2 \times 1 + 2 = 0. \quad \text{OK.}$$

Étudions si la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. On forme la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En échelonnant, on voit qu'il y a 3 pivots encadrés sur les 3 premières lignes. La famille est donc libre. Ainsi, $\dim V \geq 3$.

De plus, le vecteur $(0, 0, 0, 1)$ n'appartient pas à V (car $0 - 0 + 1 \neq 0$), donc $V \neq \mathbb{R}^4$ et $\dim V < 4$. On en déduit que $\dim V = 3$.

Conclusion : La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une **base de V** .

3) Bases de $W, V \cap W$ et $V + W$:

a) Base de W :

Un vecteur $(a, b, c, d) \in W$ vérifie $a = d$ et $b = 2c$. On peut l'écrire :

$$(a, b, c, d) = (a, 2c, c, a) = a(1, 0, 0, 1) + c(0, 2, 1, 0)$$

Posons $w_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $w_2 = (0, 2, 1, 0)$. La famille $\{w_1, w_2\}$ est génératrice de W . Comme les vecteurs ne sont pas colinéaires, elle est libre.

Conclusion : $\{w_1, w_2\}$ est une **base de W** et $\dim W = 2$.

b) Base de $V \cap W$:

Un vecteur (a, b, c, d) appartient à $V \cap W$ s'il vérifie simultanément les conditions de V et W :

$$\begin{cases} b - 2c + d = 0 & \text{(condition } V) \\ a = d & \text{(condition } W) \\ b = 2c & \text{(condition } W) \end{cases}$$

En substituant $b = 2c$ dans la première équation :

$$2c - 2c + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Puisque $a = d$, on a aussi $a = 0$. Les vecteurs de l'intersection sont donc de la forme $(0, 2c, c, 0) = c(0, 2, 1, 0)$.

On remarque que ce vecteur est exactement w_2 .

Conclusion : Une base de $V \cap W$ est $\{(0, 2, 1, 0)\}$ et $\dim(V \cap W) = 1$.

c) Base de $V + W$:

D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4$$

Comme $V + W$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 de dimension 4, on a $V + W = \mathbb{R}^4$.

Conclusion : Une base de $V + W$ est la base canonique de \mathbb{R}^4 : $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Exercice 4.

Etant donnés deux s.e.v. F et G de \mathbb{R}^n , on dit que \mathbb{R}^n est la *somme directe* de F et de G (et on écrit que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$) si tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

① Montrer que l'on a $\mathbb{R}^n = F \oplus G$ si et seulement si $\mathbb{R}^n = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

② On considère dans cette question

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}.$$

Après avoir vérifié que F et G sont des s.e.v. de \mathbb{R}^3 , montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

③ On considère dans cette question

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

On vérifie que F et G sont des s.e.v. de \mathbb{R}^3 (on pourra se dispenser de cette vérification).

ⓐ Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$.

ⓑ A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

Correction de l'exercice 4.

Rappel 1 :

F et G sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . On dit que \mathbb{R}^n est la *somme directe* de F et G si :

(i) $\mathbb{R}^n = F + G$ (c'est-à-dire : $\forall u \in \mathbb{R}^n, \exists v \in F, \exists w \in G$ tels que $u = v + w$).

(ii) $F \cap G = \{0\}$.

Dans ce cas, on note alors $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Rappel 2 :

Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G \iff \forall u \in \mathbb{R}^n, \exists!(v, w) \in F \times G \text{ tel que } u = v + w$$

$$\iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \text{et} \\ \dim F + \dim G = n \end{cases}$$

① Démonstration de la caractérisation :

Montrons que $\mathbb{R}^n = F \oplus G \iff \mathbb{R}^n = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$

\Leftarrow Supposons $\mathbb{R}^n = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Par hypothèse, tout vecteur u s'écrit $u = v + w$.

Montrons l'unicité.

Supposons $u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$ avec $v_i \in F, w_i \in G$.

$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_2 = w_2 - w_1$$

Le terme de gauche $v_1 - v_2 \in F$ et le terme de droite $w_2 - w_1 \in G$.

Donc $v_1 - v_2 \in F \cap G$.

Comme $F \cap G = \{0\}$, on a $v_1 - v_2 = 0$, soit $v_1 = v_2$.

Par suite $w_1 = w_2$. L'écriture est unique.

\Rightarrow Supposons $\mathbb{R}^n = F \oplus G$. Alors $\mathbb{R}^n = F + G$ par définition.

Montrons $F \cap G = \{0\}$.

Soit $u \in F \cap G$. On peut écrire u de deux manières :

$$u = u + 0 \quad (\text{avec } u \in F, 0 \in G)$$

$$u = 0 + u \quad (\text{avec } 0 \in F, u \in G)$$

Comme la décomposition est unique, on doit avoir $u = 0$ (comparaison de la partie F).

Donc $F \cap G = \{0\}$.

② **Cas de** $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ **et** $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$:

F est une droite passant par l'origine (base $\{(1, 1, 1)\}$), donc c'est un s.e.v.

G est le plan (Oyz) (équation $x = 0$), donc c'est un s.e.v.

Méthode 1 (Dimensions et Intersection) :

- ⊛ $\dim F = 1$ car engendré par $(1, 1, 1)$.
- ⊛ $\dim G = 2$ car engendré par $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.
- ⊛ Intersection : $u \in F \cap G \iff x = y = z$ et $x = 0$. Donc $x = y = z = 0$. $F \cap G = \{0\}$.
- ⊛ $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 1 + 2 - 0 = 3$. Donc $F + G = \mathbb{R}^3$ et la somme est directe.

Méthode 2 (Décomposition directe) : Cherchons (a, b, c) tels que $(x, y, z) = \underbrace{(a, a, a)}_{\in F} + \underbrace{(0, b, c)}_{\in G}$.

$$\begin{cases} x = a \\ y = a + b \\ z = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y - x \\ c = z - x \end{cases}$$

La solution est unique. Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

③ **Cas de** $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ **et** $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$:

ⓐ **Montrer que** $\mathbb{R}^3 = F + G$:

On cherche à écrire $(x, y, z) = \underbrace{(a, b, a)}_{\in F} + \underbrace{(c, d, e)}_{\in G}$.

La condition pour le second vecteur est $c + d + e = 0 \Rightarrow e = -c - d$.

On a donc le système :

$$\begin{cases} a + c = x \\ b + d = y \\ a - c - d = z \end{cases}$$

Additionnons la première et la troisième équation :

$$2a = x + z \Rightarrow a = \frac{x + z}{2}$$

On en déduit $c = x - a = \frac{x-z}{2}$.

On a b et d liés par $b + d = y$. Il y a une infinité de solutions (on peut choisir d librement).

Puisqu'il existe au moins une solution, $\mathbb{R}^3 = F + G$.

ⓑ **A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?**

Pour que ce soit une somme directe, il faut que l'intersection soit réduite à $\{0\}$ (ou que la décomposition soit unique).

Étudions l'intersection $F \cap G$:

$$\begin{cases} x = z \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

L'intersection contient des vecteurs de la forme $(x, -2x, x) = x(1, -2, 1)$.

Pour $x = 1$, le vecteur $(1, -2, 1)$ est non nul et appartient à $F \cap G$.

Conclusion : Comme $F \cap G \neq \{0\}$, la somme **n'est pas directe**.

On a $\mathbb{R}^3 = F + G$ mais $\mathbb{R}^3 \neq F \oplus G$.

Exercice 5.

On considère le s.e.v. F de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (-1, 1, 2), v_3 = (3, 0, -4), v_4 = (5, 1, -6),$$

autrement dit $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Donner F sous forme cartésienne, c'est à dire caractériser les éléments de F par une ou plusieurs équations de la forme $ax + by + cz = 0$.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x \text{ et } z - 2y - x + t = 0\}.$$

- ① Vérifier que F est un s.e.v. de \mathbb{R}^4 .
- ② Quelle est la forme générale d'un élément de F ? En déduire une famille génératrice de F .

Correction de l'exercice 5.

Partie 1 : Sous-espace de \mathbb{R}^3

1ère méthode : Trouver une base de F

On forme la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 et on l'échelonne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice a 2 pivots, donc F est de dimension 2.

Détermination de l'équation cartésienne : Un vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si le système formé par les générateurs et u est compatible. La relation linéaire entre les lignes qui annule les vecteurs de F est $3L_3 - 2L_2 = 0$ (sur la matrice échelonnée). Pour respecter la compatibilité, cette même relation doit s'appliquer aux composantes de u . En remplaçant L_2 par sa valeur transformée ($y - 2x$) visible à la première étape par $L_2 - 2L_1$, on obtient l'équation suivante en

remplaçant $3L_3 - 2L_2 = 0$ à la deuxième étape :

$$3z - 2(y - 2x) = 0 \iff 4x - 2y + 3z = 0$$

Ainsi, une base de F est $((1, 2, 0), (-1, 1, 2))$ et F est le plan d'équation $4x - 2y + 3z = 0$.

2ème méthode : Connaissant une base de F

On considère la base $\{v_1, v_2\}$ de F trouvée précédemment.

Un vecteur (x, y, z) appartient à F si et seulement s'il est combinaison linéaire de v_1 et v_2 .

On examine la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 2 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y - 2x \\ 0 & 2 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y - 2x \\ 0 & 0 & 3z - 2(y - 2x) \end{pmatrix}$$

Pour que $(x, y, z) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$, le système doit être compatible, ce qui impose que la dernière ligne soit nulle :

$$3z - 2(y - 2x) = 0 \iff 4x - 2y + 3z = 0$$

Partie 2 : Sous-ensemble de \mathbb{R}^4

1. F s.e.v de \mathbb{R}^4

F est défini par des équations linéaires homogènes, donc c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

2. Forme générale d'un élément de F

Un vecteur (x, y, z, t) appartient à F si :

$$\begin{cases} y = 2x \\ z - 2y - x + t = 0 \end{cases}$$

En substituant $y = 2x$ dans la deuxième équation :

$$z - 2(2x) - x + t = 0 \Rightarrow z - 5x + t = 0 \Rightarrow t = 5x - z$$

La forme générale d'un vecteur de F est donc :

$$(x, 2x, z, 5x - z)$$

On aurait pu procéder autrement :

$$\left(\frac{1}{2}y, y, z, \frac{5}{2}y - z\right) \text{ avec } t = \frac{1}{2}y + 2y - z = \frac{5}{2}y - z$$

Une base de F :

- ⊗ Pour $x = 1, z = 0$: $v = (1, 2, 0, 5)$
- ⊗ Pour $x = 0, z = 1$: $w = (0, 0, 1, -1)$

Une base de F est donc $\{(1, 2, 0, 5), (0, 0, 1, -1)\}$.

Exercice 6.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - \lambda t = 0\}.$$

où λ est un paramètre.

- ① Vérifier que F est un s.e.v. de \mathbb{R}^4 .
- ② Déterminer une base de F .

Correction de l'exercice 6.

1) Vérification que F est un s.e.v de \mathbb{R}^4 :

Le vecteur nul $0_F = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Soient $u = (a, b, c, d) \in F$ et $v = (a', b', c', d') \in F$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} u + \alpha v &= (a, b, c, d) + \alpha (a', b', c', d') \\ &= (a + \alpha a', b + \alpha b', c + \alpha c', d + \alpha d') \end{aligned}$$

Vérifions la condition d'appartenance à F :

$$\begin{aligned} (a + \alpha a') - (b + \alpha b') + (c + \alpha c') - \lambda (d + \alpha d') &= (a - b + c - \lambda d) + \alpha (a' - b' + c' - \lambda d') \\ &= 0 + \alpha \times 0 && \text{(car } u \in F \text{ et } v \in F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $u + \alpha v \in F$. Ainsi, F est un s.e.v de \mathbb{R}^4 .

En général, $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$ est un s.e.v de \mathbb{R}^n .

2) Trouver une base de F :

On a $\dim F \leq 3$. Une base de F est :

$$\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$$

Exercice 7.

Soit F le s.e.v. de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3).$$

- ① Les vecteurs u, v, w sont-ils linéairement indépendants?
- ② Trouver une base de F puis donner la dimension de F .
- ③ On considère le sous-ensemble G de \mathbb{R}^3 défini par

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}.$$

- a) Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- b) Trouver une base de G puis donner la dimension de G .
- ④ Montrer que $F \subset G$, puis en déduire que $F = G$.

Correction de l'exercice 7.

1) On remarque que $w = u + v$.

Donc les vecteurs sont linéairement dépendants ($\Rightarrow \dim F \leq 2$).

2) u et v sont indépendants, donc $\dim F \geq 2$.

\Rightarrow Donc $\dim F = 2$. Par conséquent $\{u, v\}$ est une base de F .

3) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.

a) G est un s.e.v de \mathbb{R}^3 (défini par une équation linéaire homogène).

b) Trouver une base de G puis donner $\dim G$.

Une base de G est $\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Car $\dim G \leq 2$ (car $G \neq \mathbb{R}^3$).

Les vecteurs $(-2, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ sont indépendants.

4) Montrons que $F \subset G$.

Il suffit de vérifier que $u \in G$ et $v \in G$ car $\{u, v\}$ est une base de F (ce qui est clair).

⊛ Pour $u = (1, -1, 1) : 1 + 2 \times (-1) + 1 = 0$. OK.

⊛ Pour $v = (0, -1, 2) : 0 + 2 \times (-1) + 2 = 0$. OK.

Comme $\dim F = \dim G$ et $F \subset G$, on a forcément $F = G$.

Exercice 8.

Soit $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^4 avec

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), v_2 = (0, 0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0, -1), v_4 = (2, 2, 1, -1), v_5 = (1, 2, 2, 0).$$

On note G le s.e.v engendré par les vecteurs de F , autrement dit $G = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

① On se propose d'extraire de F , famille génératrice de G , une base de G .

ⓐ Pourquoi peut-on affirmer, sans faire aucun calcul, que ces vecteurs v_1, \dots, v_5 sont liés? Trouver alors des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ non tous nuls tels que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_5 v_5 = 0$ et en déduire une expression de l'un des vecteurs v_i comme combinaison linéaire des autres. On notera ce vecteur v_{i_0} .

ⓑ On pose $F_0 = F \setminus \{v_{i_0}\}$. Comparer G et le s.e.v. engendré par les vecteurs de F_0 .

ⓒ Vérifier que les vecteurs de F_0 sont liés et en déduire l'expression de l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des autres. On notera ce vecteur v_{i_1} .

ⓓ On pose $F_1 = F_0 \setminus \{v_{i_1}\}$. Comparer G et le s.e.v. engendré par les vecteurs de F_1 .

ⓔ Vérifier que la famille F_1 est libre. Conclure.

② En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, donner une méthode permettant d'extraire une base d'une famille génératrice v_1, \dots, v_k d'un espace vectoriel E .

Correction de l'exercice 8.

A) 1) La famille $\{v_1, \dots, v_5\}$ est liée car si elle était libre, on aurait $\dim G \geq 5$, or $\dim G \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$.

Trouver un des v_i qui soit combinaison linéaire des autres.

$$v_1 = (1, 1, 2, 1)$$

$$v_2 = (0, 0, 1, 1)$$

$$v_3 = (1, 1, 0, -1)$$

$$v_4 = (2, 2, 1, -1)$$

$$v_5 = (1, 2, 2, 0)$$

On échelonne la matrice formée par ces vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots$$

On trouve que $v_4 = v_1 - v_2 + v_3$.

Donc $G = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$.

On trouve aussi que $v_3 = v_1 - 2v_2$.

Donc $G = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_5\}$.

On étudie la liberté de la famille $\{v_1, v_2, v_5\}$ à l'aide de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La famille est libre. G a pour base $\{v_1, v_2, v_5\}$.

Exercice 9.

On donne les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 2, 2, 0), \quad v_4 = (0, 0, 0, 1), \quad v_5 = (3, 1, 1, 2),$$

et $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Extraire de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ une base de F . Quelle est la dimension de F ?

Correction de l'exercice 9.

La famille $\{v_1, v_3, v_4\}$ est libre.

On a les relations suivantes :

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{2}v_3$$

$$v_5 = 3v_1 + 2v_4 + \frac{1}{2}v_3$$

Donc $\{v_1, v_3, v_4\}$ est une base de F . $\dim F = 3$.

Remarque : ce n'est pas l'unique.

Exercice 10.

Soit F le s.e.v. de \mathbb{R}^3 engendré par $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$.

- ① Donner une base et la dimension de F .
- ② Compléter $\{v_1, v_2\}$ en une base de \mathbb{R}^3 .
- ③ Compléter $\{v_1, v_2\}$ en une base de \mathbb{R}^3 en ajoutant un vecteur parmi $(1, 2, 0)$, $(-1, 1, 2)$, $(3, 0, 4)$.

Correction de l'exercice 10.**Rappel : Théorème de la base incomplète :**

Soit E un espace vectoriel, soit $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ une famille libre de vecteurs de E .

Si $\dim E = n$, alors il existe des vecteurs $u_{p+1}, \dots, u_n \in E$ tels que la famille $\{u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$ soit une base de E .

① Base et dimension de F :

$\{v_1, v_2\}$ est une famille libre car $v_1 \neq \lambda v_2$ (les vecteurs ne sont pas colinéaires).

De plus, elle est génératrice par définition.

Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de F et $\dim F = 2$.

② Compléter la base de F en une base de \mathbb{R}^3 :

Il suffit de trouver un vecteur v_3 tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit libre.

On choisit par exemple $v_3 = (1, 0, 0)$. Pour vérifier, on forme la matrice et on l'échelonne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 7L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{-7} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

La matrice possède 3 pivots. La famille est donc libre et génère \mathbb{R}^3 .

Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

③ Compléter $\{v_1, v_2\}$ en une base de \mathbb{R}^3 avec un vecteur de la liste :

On cherche à compléter $\{v_1, v_2\}$ en une base de \mathbb{R}^3 en ajoutant un vecteur parmi $(1, 2, 0)$, $(-1, 1, 2)$, $(3, 0, 4)$.

⊛ Test de $w_1 = (-1, 1, 2)$: On remarque que $(-1, 1, 2) = -1 \times v_2$. Ce vecteur est déjà dans F , il ne convient pas.

⊛ Test de $w_2 = (1, 2, 0)$: On forme la matrice avec v_1, v_2, w_2 et on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 7L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{-7} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots, donc la famille est libre. Ce vecteur convient.

⊛ Test de $w_3 = (3, 0, 4)$: De même, en échelonnant la matrice formée par $\{v_1, v_2, w_3\}$, on obtient 3 pivots. Ce vecteur convient également.

Conclusion : On peut ajouter $(1, 2, 0)$ ou $(3, 0, 4)$.

Exercice 11.

Soit F le s.e.v. de \mathbb{R}^4 donné par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y - 3z \text{ et } z = 2t\}.$$

- ① Donner une base et la dimension de F .
- ② Compléter la base de F obtenue dans 1) en une base de \mathbb{R}^4 en ajoutant des vecteurs parmi $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$.

Correction de l'exercice 11.

- ① **Base et dimension de F :**

On a $\dim F = 2$.

On exprime les éléments de F en fonction des variables libres y et t (puisque $z = 2t$ et $x = y - 3(2t) = y - 6t$) :

$$\begin{aligned} F &= \{(y - 6t, y, 2t, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(y, y, 0, 0) + (-6t, 0, 2t, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0, 0) + t(-6, 0, 2, 1) \mid y, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-6, 0, 2, 1)\} \end{aligned}$$

La famille $\{(1, 1, 0, 0), (-6, 0, 2, 1)\}$ est une base de F (car c'est une famille libre).

- ② **Complétion de la base :**

On cherche à compléter la base de F obtenue en 1) en une base de \mathbb{R}^4 en ajoutant des vecteurs parmi la base canonique.

Les vecteurs $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ sont indépendants et ne sont pas dans F .

Donc en les ajoutant, on obtient une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 1.

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires? Si oui, déterminer :

- ① leur noyau et leur image;
- ② si elles sont injectives, surjectives, bijectives;
- ③ la matrice associée dans les bases canoniques.

$$f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x^2$$

$$f_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x - 3$$

$$f_3: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (-x, 3y + x)$$

$$f_4: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto 3x + 4y$$

$$f_5: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (2x + y - z, 1)$$

$$f_6: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (xy + x - z, x)$$

Exercice 2.

On munit \mathbb{R}^2 d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- ① Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ?
- ② Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ?
- ③ Est-ce qu'une translation est une application linéaire?

Exercice 3.

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Montrer les équivalences :

- ① f est injective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est libre dans F .
- ② f est surjective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que tout espace vectoriel réel de dimension n est isomorphe à l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^n .

En particulier, deux espaces vectoriels réels ayant la même dimension sont isomorphes.

Exercice 5.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 , et soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$f(e_1) = e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_3 + e_1, \quad f(e_3) = e_1 + e_2.$$

- ① Montrer que f est une application linéaire bijective de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .
- ② Déterminer les images par f des sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}.$$

Exercice 6.

- ① Soit f une application linéaire surjective de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^2 . Quelle est la dimension du noyau de f ?
- ② Soit g une application injective de \mathbb{R}^{15} dans \mathbb{R}^{30} . Quelle est la dimension de l'image de g ?
- ③ Existe-t-il une application linéaire bijective entre \mathbb{R}^{25} et \mathbb{R}^{40} ?

Exercice 7.

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- ① Déterminer le noyau et l'image de f .
Quel est le rang de f ?
- ② Montrer que $f^2 = 3f$.

Exercice 8.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (5x - 6y, 3x - 4y).$$

- ① Vérifier que f est une application linéaire.
- ② Justifier que $B = ((1, 1), (2, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 puis donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 9.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère A comme la matrice d'une application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ exprimée dans les bases canoniques (e_1, e_2, e_3) .

- ① Trouver une base du noyau de A (de f).
- ② Trouver une base de l'image de A (de f).

Exercice 10.

On note respectivement $B = (v_1, v_2, v_3)$ et $C = (w_1, w_2)$ les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .

On considère l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- ① Donner explicitement $f(x, y, z)$.
- ② Déterminer $\text{Ker } f$ puis $\text{Im } f$. En déduire $\text{rg}(f)$.
- ③ On pose $v'_1 = v_2 + v_3$, $v'_2 = v_3 + v_1$ et $v'_3 = v_1 + v_2$.
 - a) Vérifier que $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Calculer la matrice de f dans les bases B' et C .

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit u un endomorphisme de E .

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- ① $\text{Ker } u = \text{Im } u$
- ② $u^2 = 0$ et $\dim \text{Ker } u = \dim \text{Im } u = \frac{\dim E}{2}$

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u \circ u \circ u = 0 \quad \text{et} \quad u \circ u \neq 0.$$

Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), u(u(x_0)))$ soit une base de E .

Exercice 13.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f: E_1 \times E_2 \rightarrow E$ l'application définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

- ① Montrer que f est linéaire.
- ② Montrer que $\text{Ker } f = \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}$.
- ③ Montrer que $\text{Ker } f$ et $E_1 \cap E_2$ sont isomorphes.
- ④ Montrer que f a pour image $E_1 + E_2$.
- ⑤ Dédurre de ce qui précède la formule

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Exercice 14.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} . Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications linéaires.

Montrer que

$$\dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f).$$

Exercice 15.

Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n > 0$. Soit $f: E \rightarrow E$ l'application définie par

$$f(P)(X) = P(X) - P(X-1).$$

- ① Montrer que f est linéaire.
- ② Montrer que $\text{Im } f$ est inclus dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.
- ③ Montrer que $\text{Ker } f$ est l'ensemble des polynômes constants. En déduire $\text{Im } f$.
- ④ On pose $P_0(X) = 1$, et pour tout $0 < k \leq n$

$$P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X+1)\dots(X+k-1).$$

Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de E .

- ⑤ Pour tout $k \leq n$, écrire $f(P_k)$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 1.

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires? Si oui, déterminer :

- ① leur noyau et leur image;
- ② si elles sont injectives, surjectives, bijectives;
- ③ la matrice associée dans les bases canoniques.

$$f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x^2$$

$$f_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x - 3$$

$$f_3: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (-x, 3y + x)$$

$$f_4: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto 3x + 4y$$

$$f_5: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (2x + y - z, 1)$$

$$f_6: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (xy + x - z, x)$$

Correction de l'exercice 1.

Rappel : Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{R} ($E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$).

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. f est dite **linéaire** si :

- (i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- (ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Ce qui est équivalent à : $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.

Propriété : $f(0_E) = 0_F$.

Rappel : $f: E \rightarrow F$ application linéaire.

Le noyau de f est $\{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.

Notation : $\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.

$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in E\}$.

Propriétés :

- * $\text{Ker } f$ est un s.e.v de E .
- * $\text{Im } f$ est un s.e.v de F .
- * f injective $\iff \text{Ker } f = \{0_E\}$.
- * f surjective $\iff \text{Im } f = F$.

Propriété : $f: E \rightarrow F$ linéaire.

$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$.

⊛ **Application f_1 :**

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^2 \end{aligned}$$

Prenons $x = 2$ et $y = 2$:

$$\begin{aligned} f_1(2+2) &= f_1(4) = 2 \times 4^2 = 32 \\ f_1(2) + f_1(2) &= 2 \times 2^2 + 2 \times 2^2 = 8 + 8 = 16 \end{aligned}$$

Donc $f_1(2+2) \neq f_1(2) + f_1(2)$.

Conclusion : f_1 n'est pas une application linéaire.

⊛ **Application f_2 :**

$$\begin{aligned} f_2: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x - 3 \end{aligned}$$

$$f_2(0) = -3 \neq 0.$$

Conclusion : f_2 n'est pas une application linéaire.

⊛ **Application f_3 :**

$$\begin{aligned} f_3: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-x, 3y + x) \end{aligned}$$

Vérifions que f_3 est linéaire :

(i) Soient (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{A-t-on } f_3((x, y) + (x', y')) = f_3(x, y) + f_3(x', y')?$$

D'une part :

$$\begin{aligned} f_3((x, y) + (x', y')) &= f_3(x + x', y + y') \\ &= (-(x + x'), 3(y + y') + (x + x')) \\ &= (-x - x', 3y + 3y' + x + x') \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f_3(x, y) + f_3(x', y') &= (-x, 3y + x) + (-x', 3y' + x') \\ &= (-x - x', 3y + 3y' + x + x') \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f_3((x, y) + (x', y')) = f_3(x, y) + f_3(x', y').$$

(ii) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{A-t-on } f_3(\lambda(x, y)) = \lambda f_3(x, y)?$$

$$\begin{aligned} f_3(\lambda(x, y)) &= f_3(\lambda x, \lambda y) \\ &= (-\lambda x, 3\lambda y + \lambda x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda f_3(x, y) &= \lambda(-x, 3y + x) \\ &= (-\lambda x, 3\lambda y + \lambda x) \end{aligned}$$

Donc $f_3(\lambda(x, y)) = \lambda f_3(x, y)$.

Conclusion : f_3 est une application linéaire.

Calcul du noyau :

$$\begin{aligned}\text{Ker } f_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_3(x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-x, 3y + x) = (0, 0)\} \\ &= \{(0, 0)\}\end{aligned}$$

Donc f_3 est **injective**.

Calcul de l'image :

D'après la propriété $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$:

$$\begin{aligned}2 &= 0 + \dim \text{Im } f_3 \\ \Rightarrow \dim \text{Im } f_3 &= 2\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Im } f_3 = \mathbb{R}^2}$.

Donc f_3 est **surjective** et donc **bijective**.

⊙ **Application f_4 :**

$$\begin{aligned}f_4: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 3x + 4y\end{aligned}$$

Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

A-t-on $f_4((x, y) + \lambda(x', y')) = f_4(x, y) + \lambda f_4(x', y')$?

$$(x, y) + \lambda(x', y') = (x + \lambda x', y + \lambda y')$$

$$\begin{aligned}f_4((x, y) + \lambda(x', y')) &= f_4(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= 3(x + \lambda x') + 4(y + \lambda y') \\ &= 3x + 3\lambda x' + 4y + 4\lambda y'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_4(x, y) + \lambda f_4(x', y') &= 3x + 4y + \lambda(3x' + 4y') \\ &= 3x + 4y + 3\lambda x' + 4\lambda y'\end{aligned}$$

Donc $f_4((x, y) + \lambda(x', y')) = f_4(x, y) + \lambda f_4(x', y')$.

Conclusion : f_4 est une application linéaire.

Calcul du noyau :

$$\begin{aligned}\text{Ker } f_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_4(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 4y = 0\}\end{aligned}$$

$\dim \text{Ker } f_4 = 1$.

Calcul de l'image :

$$2 = 1 + \dim \text{Im } f_4 \\ \Rightarrow \dim \text{Im } f_4 = 1$$

Donc $\text{Im } f_4 = \mathbb{R}$.

Conclusion : L'application est non injective (noyau non réduit à 0) mais elle est **surjective**.

⊙ **Application f_5 :**

$$f_5: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + y - z, 1)$$

$\mathbb{R}^3 = (0, 0, 0)$ et $\mathbb{R}^2 = (0, 0)$.

$$f_5(0_{\mathbb{R}^3}) = (0, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Conclusion : f_5 n'est pas une application linéaire.

⊙ **Application f_6 :**

$$f_6: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (xy + x - z, x)$$

Prenons $x = (1, 1, 1)$ et $\lambda = 2$.

$$\lambda x = (2, 2, 2).$$

$$f_6(\lambda x) = f_6(2, 2, 2) = (4, 2)$$

$$\lambda f_6(x) = 2f_6(1, 1, 1) = 2(1, 1) = (2, 2)$$

Donc $f_6(\lambda x) \neq \lambda f_6(x)$.

Conclusion : f_6 n'est pas une application linéaire.

⊙ **Calcul des matrices associées (pour f_3 et f_4) :**

Rappel : La base canonique de \mathbb{R}^2 est $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Matrice d'une application linéaire $f: E \rightarrow F$ dans les bases $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de E et $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_m\}$ de F :

C'est un tableau obtenu de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & \dots & f(u_n) \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{array} \end{array}$$

avec n colonnes et m lignes.

Pour f_3 :

$$\begin{aligned}f_3(u_1) &= f_3(1, 0) = (-1, 1) \\ &= \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) \\ \alpha &= -1, \quad \beta = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_3(u_2) &= f_3(0, 1) = (0, 3) \\ &= \gamma(1, 0) + \mu(0, 1) \\ \gamma &= 0, \quad \mu = 3\end{aligned}$$

Donc la matrice associée est :

$$\mathcal{M}(f_3, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour f_4 :

Base canonique de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}f_4(1, 0) &= 3 \\ f_4(0, 1) &= 4\end{aligned}$$

Donc la matrice associée est :

$$\mathcal{M}(f_4, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

On munit \mathbb{R}^2 d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- ① Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ?
- ② Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ?
- ③ Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

Correction de l'exercice 2.

- ① **Matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses :**

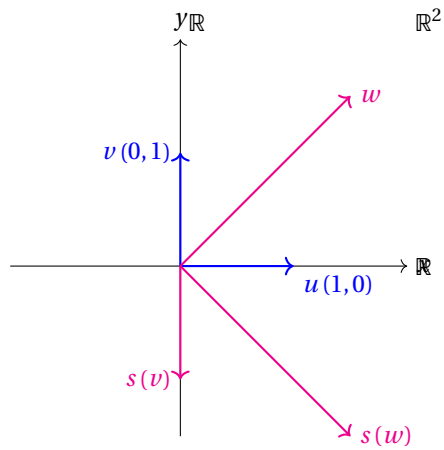
Soit s la symétrie axiale.

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & s(x, y) \end{array}$$

Base canonique : $\left\{ \underbrace{(1, 0)}_u, \underbrace{(0, 1)}_v \right\}$.

Il faut trouver :

- ⊗ $s(1, 0) = ?$
- ⊗ $s(0, 1) = ?$



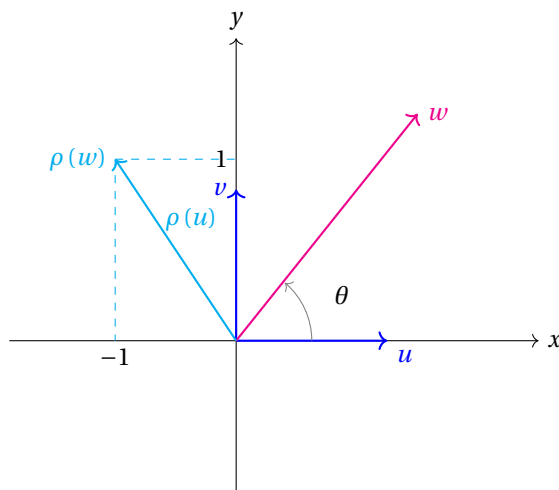
$$s(1,0) = (1,0) = 1 \times u + 0 \times v$$

$$s(0,1) = (0,-1) = 0 \times u + (-1) \times v$$

Donc la matrice de s dans la base canonique est :

$$\mathcal{M}(s, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

② **Matrice de la rotation d'angle θ :**



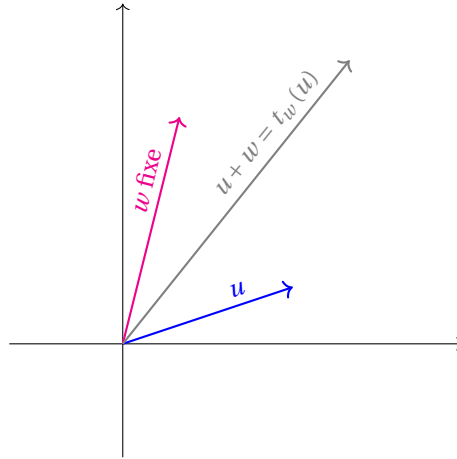
La matrice de la rotation d'angle θ dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

③ **Translation :**

On fixe un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$.

$$t_w: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \longmapsto u + w \end{array}$$



Exemple :

Si $w = 0$:

$$t_w : u \mapsto u$$

L'application est linéaire (c'est l'identité).

Si $w \neq 0$:

$$t_w(0) = w \neq 0$$

Cette application n'est pas linéaire.

Exercice 3.

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Montrer les équivalences :

- ① f est injective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est libre dans F .
- ② f est surjective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .

Correction de l'exercice 3.

- ① f injective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

\Rightarrow On suppose f injective.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0_F$.

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$.

Comme f est linéaire, on a :

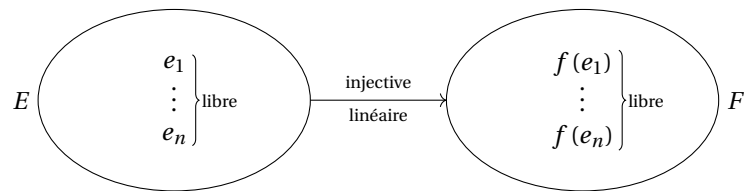
$$\begin{aligned} \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) &= f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &= 0_F \\ &= f(0_E) \end{aligned}$$

Comme f est injective :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E$$

Comme (e_1, \dots, e_n) est libre, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$.

Remarque : Si f est injective, alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F .



⊞ On suppose que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

Pour montrer que f est injective :

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Comme f est linéaire, il suffit de montrer que $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Soit $x \in \text{Ker } f$ et montrons que $x = 0_E$.

Comme (e_1, \dots, e_n) engendre E , on a :

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \quad \text{où } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

On a $f(x) = 0_F$ (car $x \in \text{Ker } f$).

Donc $f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0_F$.

Comme f est linéaire :

$$\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0_F$$

Vu que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, on a :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Donc $x = 0_E$.

② f **surjective** $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ **engendre** F .

\Rightarrow) On suppose f surjective.

Soit $y \in F$ et cherchons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq :

$$y = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$$

Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tq $f(x) = y$.

Comme (e_1, \dots, e_n) engendre E , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tq $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &\text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) \end{aligned}$$

\Leftarrow) On suppose $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F .

Soit $y \in F$ et cherchons $x \in E$ tq $y = f(x)$.

Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq :

$$y = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$$

Comme f est linéaire, on a :

$$\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$$

Donc $y = f(x)$ avec $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

Il suffit de prendre $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

③ **Cas particulier (important) :**

$f: E \rightarrow F$ linéaire, $\dim F = \dim E$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

ⓐ f injective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

ⓑ f surjective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F .

f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective

sous la condition $\dim E = \dim F$.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que tout espace vectoriel réel de dimension n est isomorphe à l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^n .

En particulier, deux espaces vectoriels réels ayant la même dimension sont isomorphes.

Correction de l'exercice 4.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n . Alors E est isomorphe à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n .

Rappel : E et F sont isomorphes s'il existe une bijection $f: E \rightarrow F$ linéaire (un isomorphisme).

Soit E un espace réel de dimension n .

Soit $\varphi_{\mathcal{B}}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E .

Pour tout $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in E$, on associe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les coordonnées de u dans la base fixée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Note perso : à faire/finir...

Exercice 5.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 , et soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$f(e_1) = e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_3 + e_1, \quad f(e_3) = e_1 + e_2.$$

① Montrer que f est une application linéaire bijective de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

② Déterminer les images par f des sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}.$$

Correction de l'exercice 5.

① **Montrons que f est bijective :**

On sait que f injective $\iff f$ surjective \iff bijective $\iff (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est libre.

Les coordonnées des vecteurs images dans la base canonique sont :

$$f(e_1) = (0, 1, 1)$$

$$f(e_2) = (1, 0, 1)$$

$$f(e_3) = (1, 1, 0)$$

On forme la matrice de ces vecteurs colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'échelonnement donne 3 pivots, donc la famille est libre.

Conclusion : f est une application linéaire bijective.

② **Déterminons $f(F)$ et $f(G)$:**

On a $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.

⊗ $\dim F = 2, \dim G = 1.$

⊗ $F \cap G = \{0\}.$

⊗ Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$

Calculons l'expression de $f(x, y, z)$:

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(e_2 + e_3) + y(e_3 + e_1) + z(e_1 + e_2) \\ &= (y + z)e_1 + (x + z)e_2 + (x + y)e_3 \\ &= (y + z, x + z, x + y) \end{aligned}$$

Étude de $f(F)$:

Une base de F est $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$.

Calculons les images des vecteurs de la base :

$$f(1, -1, 0) = (-1, 1, 0) \in F$$

$$f(1, 0, -1) = (-1, 0, 1) \in F$$

Donc $\text{Im } f|_F = \text{Vect}\{f(u), f(v)\} \subset F.$

Comme $\dim f(F) = 2$ et $\dim F = 2$, on a $f(F) = F.$

Étude de $f(G)$:

Une base de G est $\{(1, 1, 1)\} = \{w\}.$

Calculons l'image de w :

$$f(w) = f(1, 1, 1) = (2, 2, 2) \in G$$

Donc $f(G) = \text{Vect}\{f(w)\} \subset G$.

Comme $\dim f(G) = 1$ et $\dim G = 1$, on a $f(G) = G$.

Exercice 6.

- ① Soit f une application linéaire surjective de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^2 . Quelle est la dimension du noyau de f ?
- ② Soit g une application injective de \mathbb{R}^{15} dans \mathbb{R}^{30} . Quelle est la dimension de l'image de g ?
- ③ Existe-t-il une application linéaire bijective entre \mathbb{R}^{25} et \mathbb{R}^{40} ?

Correction de l'exercice 6.

- ① On a $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ surjective.

D'après le théorème du rang :

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f$$

Comme f est surjective, $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$, donc $\dim \text{Im } f = 2$.

On a :

$$4 = 2 + \dim \text{Ker } f \quad \Rightarrow \quad \dim \text{Ker } f = 2$$

- ② On a $g: \mathbb{R}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{30}$ injective.

Comme g est injective, $\text{Ker } g = \{0\}$, donc $\dim \text{Ker } g = 0$.

D'après le théorème du rang :

$$\dim \mathbb{R}^{15} = \dim \text{Im } g + \dim \text{Ker } g$$

$$15 = \dim \text{Im } g + 0$$

Donc $\dim \text{Im } g = 15$.

- ③ Soit $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire bijective.

On sait que h bijective $\iff h$ injective et h surjective.

$$n = \dim \text{Im } h + \dim \text{Ker } h$$

Comme h est injective, $\dim \text{Ker } h = 0$.

Comme h est surjective, $\dim \text{Im } h = m$.

Donc $n = m$.

Conclusion : \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

Donc il n'existe **pas** d'application linéaire bijective de \mathbb{R}^{25} dans \mathbb{R}^{40} (car $25 \neq 40$).

Exercice 7.

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- ① Déterminer le noyau et l'image de f . Quel est le rang de f ?
- ② Montrer que $f^2 = 3f$.

Correction de l'exercice 7.

- ① **Détermination de $\text{Ker } f$, $\text{rg } f$ et $\text{Im } f$:**

$$\text{Rang de } f = \dim \text{Im } f.$$

$$3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

0	3
1	2
2	1
3	0

$$\text{Ker } f = \{0\} \iff f \text{ injective} \iff f(e_1) = f(e_2) \text{ avec } e_1 \neq e_2.$$

$$\text{Im } f = \{0\} \iff f(x) = 0 \forall x.$$

$$\dim \text{Ker } f \geq 2.$$

Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_3 - e_2$ sont deux vecteurs indépendants qui se trouvent dans le noyau, donc $\dim \text{Ker } f \geq 2 \Rightarrow \dim \text{Ker } f = 2$.

On a $f \neq 0$ donc $\text{Im } f \neq \{0\}$, i.e. $\dim \text{Im } f \geq 1$.

D'autre part, $e_1 - e_2$ et $e_3 - e_2 \in \text{Ker } f$ et $\{e_1 - e_2, e_3 - e_2\}$ est une famille libre, donc $\dim \text{Ker } f \geq 2$.

En vertu du théorème du rang :

$$\dim \text{Ker } f = 2, \quad \dim \text{Im } f = 1$$

De plus :

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \{e_1 - e_2, e_3 - e_2\}$$

$$\text{Im } f = \text{Vect} \{e_1 + e_2 + e_3\}$$

$$= \text{Vect} \{(1, 1, 1)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$$

- ② **Montrer que $f^2 = 3f$.**

1ère méthode :

$$f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

$$\stackrel{f \text{ linéaire}}{=} xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$

$$= (x + y + z)(e_1 + e_2 + e_3)$$

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

Calculons $f \circ f$:

$$\begin{aligned} f \circ f(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) \\ &= f(x + y + z, x + y + z, x + y + z) \\ &= f\left(\underbrace{x + y + z}_a, \underbrace{x + y + z}_b, \underbrace{x + y + z}_c\right) \\ &= (a + b + c, a + b + c, a + b + c) \\ &= 3(x + y + z, x + y + z, x + y + z) \\ &= 3f(x, y, z) \end{aligned}$$

2ème méthode :

$$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Remarque importante :

Soient $f, g: E \rightarrow F$ linéaires.

\mathcal{B} une base de E .

Si $f(u) = g(u) \forall u \in \mathcal{B}$, alors $f(x) = g(x) \forall x \in E$.

Appliquons ceci :

$$f \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$e_1 \mapsto 3(e_1 + e_2 + e_3)$$

$$e_2 \mapsto 3(e_1 + e_2 + e_3)$$

$$e_3 \mapsto 3(e_1 + e_2 + e_3)$$

$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$e_1 \mapsto 3f(e_1)$$

$$e_2 \mapsto 3f(e_2)$$

$$e_3 \mapsto 3f(e_3)$$

Donc $f \circ f = 3f$.

Exercice 8.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (5x - 6y, 3x - 4y).$$

- ① Vérifier que f est une application linéaire.
- ② Justifier que $\mathcal{B} = ((1, 1), (2, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 puis donner la matrice de f dans cette base.

Correction de l'exercice 8.

① Vérifions que f est linéaire :

⊙ Vérification de l'homogénéité : Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (5\lambda x - 6\lambda y, 3\lambda x - 4\lambda y) \\ &= \lambda(5x - 6y, 3x - 4y) \\ &= \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

⊙ Vérification de l'additivité : Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f((x, y) + \lambda(x', y')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= (5(x + \lambda x') - 6(y + \lambda y'), 3(x + \lambda x') - 4(y + \lambda y')) \\ &= (5x - 6y + \lambda(5x' - 6y'), 3x - 4y + \lambda(3x' - 4y')) \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y') \end{aligned}$$

Conclusion : f est une application linéaire.

Propriété :

Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe des constantes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

② Justification que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^2 :

Posons $u = (1, 1)$ et $v = (2, 1)$.

Pour vérifier que $\{u, v\}$ est une base, il suffit de vérifier que la famille est libre.

On forme la matrice des vecteurs colonnes et on l'échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

La matrice possède 2 pivots, donc la famille est libre.

Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^2 .

Matrice de f dans la base \mathcal{B} :

On cherche les images des vecteurs de \mathcal{B} exprimées dans \mathcal{B} .

$$f(u) = f(1, 1) = (-1, -1)$$

On décompose $f(u)$ dans \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} f(u) &= \alpha u + \beta v \\ (-1, -1) &= \alpha(1, 1) + \beta(2, 1) \\ &= -1(1, 1) + 0(2, 1) \end{aligned}$$

Donc $\alpha = -1$ et $\beta = 0$.

$$f(v) = f(2, 1) = (4, 2)$$

On décompose $f(v)$ dans \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha' u + \beta' v \\ (4, 2) &= \alpha' (1, 1) + \beta' (2, 1) \\ &= 0(1, 1) + 2(2, 1) \end{aligned}$$

Donc $\alpha' = 0$ et $\beta' = 2$.

La matrice de f dans la base \mathcal{B} est :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de f dans la base canonique \mathcal{C} :

Soit $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

$$f(u) = (-1, -1) = -1(1, 0) + (-1)(0, 1)$$

$$f(v) = (4, 2) = 4(1, 0) + 2(0, 1)$$

La matrice de f dans la base canonique \mathcal{C} est :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère A comme la matrice d'une application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ exprimée dans les bases canoniques (e_1, e_2, e_3) .

- ① Trouver une base du noyau de A (de f).
- ② Trouver une base de l'image de A (de f).

Correction de l'exercice 9.

D'après la matrice A , les images des vecteurs de la base canonique sont les colonnes de A :

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2 + 3e_3$$

$$f(e_2) = 7e_1 + 2e_2 + 5e_3$$

$$f(e_3) = e_1 + e_3$$

Théorème du rang :

$$3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

On a $\dim \text{Im } f = \text{rg } f = \text{rg } A$.

Pour obtenir le rang de A , on utilise la méthode de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2L_3-3L_1 \\ 2L_2+L_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3+L_2} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 7 & 1 \\ 0 & \boxed{11} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

- * $\dim \text{Im } f = 2$.
- * La famille $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\text{Im } f$.
- * $\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$.

Recherche d'une base du noyau :

Il reste à trouver un vecteur non nul appartenant au noyau ; il formera une base du noyau.

On effectue les opérations élémentaires sur les vecteurs colonnes (représentés ici en lignes pour trouver la combinaison linéaire nulle) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2L_3-L_1 \\ 2L_2-7L_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{11L'_3-L'_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La relation de dépendance linéaire trouvée est :

$$11(2f(e_3) - f(e_1)) - (2f(e_2) - 7f(e_1)) = 0$$

$$11(2f(e_3) - f(e_1)) - 2f(e_2) + 7f(e_1) = 0$$

$$-4f(e_1) - 2f(e_2) + 22f(e_3) = 0$$

Par linéarité :

$$f \left(\underbrace{-4e_1 - 2e_2 + 22e_3}_{\in \text{Ker } f} \right) = 0$$

Conclusion : $\{(-4, -2, 22)\}$ est une base de $\text{Ker } f$.

Exercice 10.

On note respectivement $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .

On considère l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- ① Donner explicitement $f(x, y, z)$.
- ② Déterminer $\text{Ker } f$ puis $\text{Im } f$. En déduire $\text{rg}(f)$.
- ③ On pose $v'_1 = v_2 + v_3$, $v'_2 = v_3 + v_1$ et $v'_3 = v_1 + v_2$.
 - ⓐ Vérifier que $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - ⓑ Calculer la matrice de f dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{C} .

Correction de l'exercice 10.

- ① **Calcul de $f(x, y, z)$:**

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ 3x + 2y - 3z \end{pmatrix}$$

Donc $f(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + 2y - 3z)$.

- ② **Détermination de $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ et $\text{rg } f$:**

L'image est engendrée par les images des vecteurs de la base \mathcal{B} :

$$\text{Im } f = \text{Vect} \{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$$

avec

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Comme $\{f(v_1), f(v_2)\}$ est une famille libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires), on a $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

On en déduit que $\dim \text{Ker } f = 1$ (d'après le théorème du rang : $3 = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = 2 + \dim \text{Ker } f$).

Méthode 1 : Résoudre $\alpha f(v_1) + \beta f(v_2) + \gamma f(v_3) = (0, 0)$.

Méthode 2 : Résoudre $f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$.

Méthode 3 : Recherche de dépendance linéaire par échelonnement des colonnes (transposées) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2L_3 - L_1 \\ 2L_2 + L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{7L'_3 + 9L'_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La relation trouvée est :

$$7(2f(v_3) - f(v_1)) + 9(2f(v_2) + f(v_1)) = 0$$

$$14f(v_3) - 7f(v_1) + 18f(v_2) + 9f(v_1) = 0$$

$$2f(v_1) + 18f(v_2) + 14f(v_3) = 0$$

D'après le scan :

$$f(2v_1 + 18v_2 + 14v_3) = 0$$

Donc $(2, 18, 14)$ engendre le noyau de f .

$$\text{Ker } f = \{(2x, 18x, 14x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

③ Changement de base :

On pose $v'_1 = v_2 + v_3$, $v'_2 = v_3 + v_1$, $v'_3 = v_1 + v_2$.

a) Vérification que \mathcal{B}' est une base :

On forme la matrice de passage (les coordonnées de v'_i dans \mathcal{B} sont les colonnes) :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Échelonnons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice a 3 pivots, donc \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .

b) Calcul de $M(f, \mathcal{B}', \mathcal{C})$:

On calcule les images des nouveaux vecteurs de base :

$$f(v'_1) = f(v_2 + v_3) = f(v_2) + f(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(v'_2) = f(v_3 + v_1) = f(v_3) + f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(v'_3) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{C} est formée par ces vecteurs colonnes :

$$M(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit u un endomorphisme de E (application linéaire de E dans E).

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- ① $\text{Ker } u = \text{Im } u$
- ② $u \circ u = 0$ et $\dim \text{Ker } u = \dim \text{Im } u$.

Correction de l'exercice 11.

Preuve de l'équivalence (1) \iff (2) :

Sens (1) \Rightarrow (2) :

Il est clair que les dimensions de $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ vont être égales (puisque les espaces sont égaux).

Il reste à prouver $u \circ u = 0$, c'est-à-dire $u(u(x)) = 0_E$ pour tout $x \in E$.

Soit $x \in E$. On a $u(x) \in \text{Im } u$.

Or, par hypothèse (1), $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ (car $\text{Im } u = \text{Ker } u$).

Donc $u(x) \in \text{Ker } u$, c'est-à-dire $u(u(x)) = 0_E$.

Remarque : On a utilisé uniquement l'inclusion $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

Sens (2) \Rightarrow (1) :

Comme $\dim \text{Ker } u = \dim \text{Im } u$, pour montrer que $\text{Im } u = \text{Ker } u$, il faut et il suffit de montrer que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ ou $\text{Ker } u \subset \text{Im } u$.

Or, l'hypothèse $u \circ u = 0_E$ implique que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

Remarque : $u \circ u = 0 \iff \text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

Puisque nous avons l'inclusion $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ et l'égalité des dimensions, on en déduit l'égalité des espaces : $\text{Im } u = \text{Ker } u$.

Application / Contre-exemple :

Cherchons un endomorphisme $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Ker } u = \text{Im } u$.

D'après l'équivalence démontrée, cela impliquerait :

$$\dim \text{Ker } u = \dim \text{Im } u = \frac{\dim \mathbb{R}^3}{2} = \frac{3}{2}$$

Comme la dimension doit être un entier, c'est impossible.

Conclusion : Il n'y en a pas! (Un tel endomorphisme n'existe pas en dimension impaire).

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u \circ u \circ u = 0 \quad \text{et} \quad u \circ u \neq 0.$$

Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), u(u(x_0)))$ soit une base de E .

Correction de l'exercice 12.

Exemple :

Soit $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$(x, y, z) \longmapsto (y, z, 0)$$

On a la chaîne d'applications suivante :

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{u} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{u} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{u} \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (y, z, 0) \longmapsto (z, 0, 0) \longmapsto (0, 0, 0)$$

Ici, $u^3 = 0$ mais $u^2 \neq 0$.

Démonstration générale :

Comme $\dim E = 3$, il suffit de trouver $x_0 \in E$ tel que la famille $\{x_0, u(x_0), u(u(x_0))\}$ soit libre.

Comme $u \circ u \neq 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $u(u(x_0)) \neq 0_E$.

Est-ce que la famille $\{x_0, u(x_0), u(u(x_0))\}$ est libre?

Pour cela, soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \lambda_2 u(u(x_0)) = 0_E$$

et vérifions que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

On applique u à l'équation :

$$u(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \lambda_2 u(u(x_0))) = u(0_E) = 0_E$$

$$\lambda_0 u(x_0) + \lambda_1 u(u(x_0)) + \lambda_2 \underbrace{u(u(u(x_0)))}_{=0_E} = 0_E$$

$$\lambda_0 u(x_0) + \lambda_1 u(u(x_0)) = 0_E$$

Encore une fois, on applique u :

$$u(\lambda_0 u(x_0) + \lambda_1 u(u(x_0))) = 0_E$$

$$\lambda_0 u(u(x_0)) + \lambda_1 \underbrace{u(u(u(x_0)))}_{=0_E} = 0_E$$

$$\lambda_0 u(u(x_0)) = 0_E$$

Comme $u(u(x_0)) \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_0 = 0$.

En reportant $\lambda_0 = 0$ dans l'équation précédente ($\lambda_0 u(x_0) + \lambda_1 u(u(x_0)) = 0_E$), on obtient :

$$\lambda_1 u(u(x_0)) = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Enfin, en reportant dans l'équation initiale :

$$\lambda_2 u(u(x_0)) = 0_E \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

Conclusion : La famille est libre et, comme elle contient 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une **base de E** .

Exercice 13.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ l'application définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

- ① Montrer que f est linéaire.
- ② Montrer que $\text{Ker } f = \{(x, -x) : x \in E_1 \cap E_2\}$.
- ③ Montrer que $\text{Ker } f$ et $E_1 \cap E_2$ sont isomorphes.
- ④ Montrer que f a pour image $E_1 + E_2$.
- ⑤ Dédurre de ce qui précède la formule

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Correction de l'exercice 13.

Le but est de montrer la formule :

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

où E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace E .

Soit $f: E_1 \times E_2 \rightarrow E$ définie par $(x, y) \mapsto x + y$.

① **f est linéaire :**

Montrons que $f((x, y) + \lambda(x', y')) = f(x, y) + \lambda f(x', y')$.

$$\begin{aligned} f((x + \lambda x', y + \lambda y')) &= (x + \lambda x') + (y + \lambda y') \\ &= (x + y) + \lambda(x' + y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y') \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

② **Calcul du noyau :**

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(x, y) \in E_1 \times E_2 \mid x + y = 0\} \\ &= \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\} \end{aligned}$$

③ **Isomorphisme :**

$\text{Ker } f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

Considérons l'application φ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\} & \longrightarrow & E_1 \cap E_2 \\ (x, -x) & \longmapsto & x \end{array}$$

φ est un isomorphisme.

④ **Image de f :**

$$\text{Im } f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E_1 \times E_2\}$$

Exercice 14.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} . Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications linéaires.

Montrer que

$$\dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f).$$

Correction de l'exercice 14.

Théorème du rang : Soit $h: H \rightarrow K$ une application linéaire.

$$\dim H = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h \quad (= \dim \text{Ker } h + \text{rg}(h))$$

On applique le théorème du rang à l'application linéaire $h: \text{Im } f \rightarrow G$ définie par $x \mapsto g(x)$.

Calcul du noyau de h :

$$\begin{aligned} \text{Ker } h &= \{x \in \text{Im } f \mid g(x) = 0\} \\ &= \text{Im } f \cap \text{Ker } g \end{aligned}$$

Calcul de l'image de h :

$$\begin{aligned} \text{Im } h &= \{h(x) \mid x \in \text{Im } f\} \\ &= \{h(x) \mid x = f(y), y \in E\} \\ &= \{h(f(y)) \mid y \in E\} \\ &= \{g(f(y)) \mid y \in E\} \\ &= \{(g \circ f)(y) \mid y \in E\} = \text{Im}(g \circ f) \end{aligned}$$

Application du théorème :

En appliquant le théorème du rang à l'application $h: \text{Im } f \rightarrow G$, on a :

$$\dim(\text{Im } f) = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h$$

En remplaçant par les termes calculés ci-dessus :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g) + \text{rg}(g \circ f)$$

D'où l'on déduit la formule demandée :

$$\dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f)$$

Exercice 15.

Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n > 0$. Soit $f: E \rightarrow E$ l'application définie par

$$f(P)(X) = P(X) - P(X-1).$$

- ① Montrer que f est linéaire.
- ② Montrer que $\text{Im } f$ est inclus dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.
- ③ Montrer que $\text{Ker } f$ est l'ensemble des polynômes constants. En déduire $\text{Im } f$.
- ④ On pose $P_0(X) = 1$, et pour tout $0 < k \leq n$

$$P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X+1)\dots(X+k-1).$$

Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de E .

- ⑤ Pour tout $k \leq n$, écrire $f(P_k)$ dans la base \mathcal{B} .

Correction de l'exercice 15.

$E = \mathbb{R}_n[X]$ espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On considère l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & f(P) \end{array}$$

où $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$.

$$f(P)(X) = P(X) - P(X-1)$$

Exemples :

Si $P(X) = X^2$:

$$\begin{aligned} f(P)(X) &= X^2 - (X-1)^2 \\ &= X^2 - X^2 + 2X - 1 \\ &= 2X - 1 \end{aligned}$$

Si $P(X) = X$:

$$f(P)(X) = X - (X-1) = 1$$

Si $P(X) = 1$:

$$f(P)(X) = 1 - 1 = 0$$

Donc si $P(X) = \lambda$ (constante), $f(P)(X) = 0$.

① Vérifions que f est linéaire :

Soient P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On veut montrer que $f(P + \lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q)$.

Posons $R = P + \lambda Q$. Alors $R(X) = R(X) \forall x$.

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q)(X) &= (P + \lambda Q)(X) - (P + \lambda Q)(X-1) \\ &= P(X) + \lambda Q(X) - [P(X-1) + \lambda Q(X-1)] \\ &= P(X) - P(X-1) + \lambda [Q(X) - Q(X-1)] \\ &= f(P)(X) + \lambda f(Q)(X) \end{aligned}$$

Donc $f(P + \lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q)$.

\Rightarrow L'application est linéaire.

② Montrons que $\text{Im } f \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

Le terme $a_n X^n - a_n (X-1)^n$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ car :

$$\begin{aligned} a_n X^n - a_n (X-1)^n &= a_n X^n - [a_n X^n + Q(X)] \\ &= -Q(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

Donc $f(P)(X)$ est la somme de polynômes appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $f(P)(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

③ **Noyau de f :**

$\text{Ker } f =$ l'ensemble des polynômes constants $= \mathbb{R}$.

On sait que $\mathbb{R} \subset \text{Ker } f$.

Vérifions l'inclusion $\text{Ker } f \subset \mathbb{R}$ (si $f(P) = 0$, alors P est un polynôme constant).

$P \in \text{Ker } f$ signifie :

$$\begin{aligned} P(X) - P(X-1) &= 0 \quad \forall X \\ \Leftrightarrow P(X) &= P(X-1) \end{aligned}$$

Théorème 1 : Tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe.

Théorème 2 : Un polynôme de degré n non nul admet au plus n racines.

Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de P .

$$0 = P(r) = P(r-1) = P(r-2) = P(r-3) = \dots = P(r-n) = P(r-(n+1)) = \dots$$

Donc P admet une infinité de racines, ce qui est absurde. Donc P est constant.

Conclusion : $\text{Ker } f = \mathbb{R}$.

En appliquant le théorème du rang :

$$n+1 = 1 + \dim \text{Im } f \Rightarrow \dim \text{Im } f = n$$

Comme $\text{Im } f \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, donc $\boxed{\text{Im } f = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

④ **Base \mathcal{B} :**

On pose :

$$\begin{aligned} P_0(X) &= 1 \\ P_k(X) &= \frac{1}{k!} X(X+1)\dots(X+k-1) \end{aligned}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} P_1 &= X \\ P_2 &= \frac{1}{2} X(X+1) \\ P_3 &= \frac{1}{6} X(X+1)(X+2) \\ &\vdots \\ P_n &= \frac{1}{n!} X(X+1)\dots(X+n-1) \end{aligned}$$

Calculons $f(P_k)$:

$$\begin{aligned} f(P_0)(X) &= 0 \\ f(P_k)(X) &= \frac{1}{k!} X(X+1)\dots(X+k-1) - \frac{1}{k!} (X-1)X\dots(X+k-2) \\ &= \frac{1}{k!} X(X+1)\dots(X+k-2)[(X+k-1) - (X-1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!} X(X+1)\dots(X+k-2)[k] \\
&= \frac{1}{(k-1)!} X(X+1)\dots(X+k-2) = P_{k-1}(X)
\end{aligned}$$

Montrons que (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$:

On a $\deg P_0 = 0, \deg P_1 = 1, \dots, \deg P_n = n$.

Comme la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n+1$, il suffit de montrer que \mathcal{B} est libre.

Lemme : Soient Q_1, \dots, Q_n des polynômes non nuls de degré 2 à 2 distincts. Alors la famille (Q_1, \dots, Q_n) est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

La seule chose à savoir : si $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, alors $P = 0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$.

On suppose que $\deg Q_1 < \deg Q_2 < \dots < \deg Q_n$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \dots + \lambda_n Q_n = 0$ et montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

On a $\lambda_1 (a_1 X^{k_1} + R_1) + \lambda_2 (a_2 X^{k_2} + R_2) + \dots + \lambda_n (a_n X^{k_n} + R_n) = 0$.

En vertu du degré maximal, on a en particulier $\lambda_n a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$, donc $\lambda_n = 0$.

En poursuivant ce raisonnement, on montre que $\lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$.

Donc la famille est libre.

⑤ **Matrice de f dans la base (P_0, P_1, \dots, P_n) :**

$$\begin{pmatrix}
f(P_0) & f(P_1) & \dots & f(P_n) \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

On a :

$$f(P_0) = 0 = 0P_0 + 0P_1 + \dots + 0P_n$$

$$f(P_1) = P_0$$

$$f(P_2) = P_1$$

\vdots

$$f(P_k) = P_{k-1}$$

MATRICES

Exercice 1.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 5 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_5)$, une base de E .

- ① Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image de f et son noyau. Donner une base de $\text{Im } f$ et de $\text{Ker } f$.

Exercice 2.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, et soit f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$.

- ① Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f \circ f(x_0))$ soit une base de E .
 ② Déterminer la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base \mathcal{B} .
 ③ Déterminer les endomorphismes g qui commutent avec f .

Exercice 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 est

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- ① Déterminer les dimensions de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$. Donner une base pour chacun de ces sous-espaces.
 ② Montrer que \mathbb{R}^3 est somme directe de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.
 ③ On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les matrices A et B ne sont pas semblables (on dit que deux matrices carrées d'ordre n , U et V sont semblables s'il existe une matrice carrée d'ordre n inversible P telle que $U = P^{-1}VP$).

Exercice 4.

Soit n un entier non nul. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On considère les sous ensembles \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n des matrices symétriques et antisymétriques.

- ① Montrer que \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer leurs dimensions.
- ② Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de \mathcal{A}_n et de \mathcal{S}_n .

Exercice 5.

- ① Vérifier directement, en utilisant la définition de la multiplication matricielle, que $(AB)^t = (B^t)(A^t)$ (quand ces produits ont un sens).
- ② Soit A une matrice $m \times n$ (m lignes et n colonnes). Montrer que $(A^t A)$ et $(A A^t)$ sont des matrices carrées symétriques.

Exercice 6.

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer les matrices inverses des matrices inversibles

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ① Montrer que A est inversible si et seulement si A^t est inversible, et que dans ce cas $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- ② Montrer que si A est nilpotente d'ordre p , alors $I_n - A$ est inversible et que l'on a

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}.$$

Retrouver la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

On pose $E = \mathbb{R}^3$. Soient les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$.

- ① Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E .
- ② Trouver la matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} à la base \mathcal{B} .
- ③ Calculer P^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan. Exprimer dans la base \mathcal{C} l'élément x de E dont les composantes dans la base \mathcal{B} sont $(1, 1, 1)$ et retrouver ainsi l'écriture canonique de x (c'est-à-dire sous la forme d'un triplet).
- ④ Soit f l'application linéaire de E dans E ayant pour matrice dans la base \mathcal{C}

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

DÉTERMINANTS

Exercice 9.

Soit la matrice $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

- ① Calculer $\det(M_3)$. Quel est le rang de M_3 ?
- ② Soient $n \geq 3$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si $a_{i,j+1} = a_{i,j} + r$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j < n$, alors $\det(M) = 0$. Quel est le rang de M ?

Exercice 10.

- ① Soit $x \in \mathbb{R}$.

Calculer le déterminant d'une matrice dont tous les éléments valent 1 sauf éventuellement ceux de la diagonale qui valent $x + 1$.

- ② Soit A une matrice carrée orthogonale, c'est-à-dire $A^t A = I_n$. Montrer que $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 11.

Déterminer le rang des matrices complexes $\begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & a \\ 2a & 2a & 1 \\ 2a+1 & 3a & 2a+1 \end{pmatrix}$ en discutant suivant les valeurs de

a pour la deuxième.

Exercice 12.

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer sa matrice inverse.

Exercice 13.

Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 14.

Les nombres a , b et c étant racines de l'équation $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$, montrer que

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \alpha^3 \gamma$$

et

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\beta^2.$$

Exercice 15.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer par récurrence que $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

SYSTÈMES**Exercice 16.**

① Dans quel cas le système

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = \alpha \\ x + y + mz = \beta \end{cases}$$

est-il de Cramer?

② Résoudre le système dans le cas de Cramer.

Exercice 17.

On considère le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases}$$

① Montrer que ce système est de Cramer si et seulement si n est impair (voir Exercice 13).

② Discuter des solutions de ce système.

MATRICES

Exercice 1.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 5 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_5)$, une base de E .

- ① Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image de f et son noyau. Donner une base de $\text{Im } f$ et de $\text{Ker } f$.

Correction de l'exercice 1.

- ① On a $\dim E = 5$ et (e_1, \dots, e_5) base de E .

Soit $f: E \rightarrow E$ telle que :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 = f(e_3) \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{matrix}$$

On cherche $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ en fonction des éléments de \mathcal{B} .

On a :

- ⊗ $\{e_1, e_2\} \subset \text{Ker } f \Rightarrow \dim \text{Ker } f \geq 2$
- ⊗ $\{e_2, e_3, e_4\} \subset \text{Im } f \Rightarrow \dim \text{Im } f \geq 3$
- ⊗ $e_2 = f(e_3), e_3 = f(e_4), e_4 = f(e_5) \in \text{Im } f$

D'après le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker } f = 2 \quad \text{et} \quad \dim \text{Im } f = 3$$

Conclusion :

- ⊗ $\text{Ker } f$ a pour base $\{e_1, e_2\}$
- ⊗ $\text{Im } f$ a pour base $\{e_2, e_3, e_4\}$

Exercice 2.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, et soit f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$.

- ① Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f \circ f(x_0))$ soit une base de E .
- ② Déterminer la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base \mathcal{B} .
- ③ Déterminer les endomorphismes g qui commutent avec f .

Correction de l'exercice 2.

- ① Voir l'exercice 12 de la Fiche 4.
- ② Déterminons la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$:

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car $f(f(f(x_0))) = 0$.

Exercice 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 est

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- ① Déterminer les dimensions de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$. Donner une base pour chacun de ces sous-espaces.
- ② Montrer que \mathbb{R}^3 est somme directe de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.

Correction de l'exercice 3.

- ① $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ (f application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3).

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Trouvons $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ en fonction des éléments de \mathcal{B} .

On a $f(e_1) = f(e_2) \Leftrightarrow f(e_1) - f(e_2) = 0 \Leftrightarrow f(e_1 - e_2) = 0$.

Donc $\{e_1 - e_2, e_1 + e_3\} \subset \text{Ker } f$.

De plus, $f(e_1) + f(e_3) = 0 \Leftrightarrow f(e_1 + e_3) = 0$.

Et $\{e_1 - 2e_2 - 3e_3\} \subset \text{Im } f$.

D'après le théorème du rang :

$$\left. \begin{array}{l} \dim \text{Ker } f \geq 2 \\ \dim \text{Im } f \geq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{th. du rang} \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} \dim \text{Ker } f = 2 \\ \dim \text{Im } f = 1 \end{array}$$

Conclusion :

- ⊗ Ker f a pour base $\{e_1 - e_2, e_1 + e_3\}$
- ⊗ Im f a pour base $\{e_1 - 2e_2 - 3e_3\}$

② Montrons que $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Définition :

- ⊗ $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$
- ⊗ $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f + \text{Ker } f \Leftrightarrow 3 = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f$

Il suffit de vérifier que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$.

Pour cela, il suffit de vérifier que la famille $\{e_1 - e_2, e_1 + e_3, e_1 - 2e_2 - 3e_3\}$ est libre.

Pour cela, il suffit d'examiner la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-L_2-L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

La famille est libre.

⇒ Donc la somme est bien directe.

Exercice 4.

Soit n un entier non nul. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On considère les sous ensembles \mathcal{S}_n des matrices symétriques et \mathcal{A}_n des matrices antisymétriques.

① Montrer que \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer leurs dimensions.

② Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de \mathcal{A}_n et de \mathcal{S}_n .

Correction de l'exercice 4.

① \mathcal{S}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- ⊗ La matrice nulle 0_n vérifie $0_n^t = 0_n$, donc $0_n \in \mathcal{S}_n$.
- ⊗ Soient $A, B \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (A + \lambda B)^t &= A^t + \lambda B^t && \text{(linéarité de la transposition)} \\ &= A + \lambda B && \text{(car } A, B \in \mathcal{S}_n) \end{aligned}$$

Donc $A + \lambda B \in \mathcal{S}_n$.

Ainsi \mathcal{S}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

\mathcal{A}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- ⊗ La matrice nulle vérifie $0_n^t = 0_n = -0_n$, donc $0_n \in \mathcal{A}_n$.
- ⊗ Soient $A, B \in \mathcal{A}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (A + \lambda B)^t &= A^t + \lambda B^t && \text{(linéarité de la transposition)} \\ &= -A - \lambda B && \text{(car } A, B \in \mathcal{A}_n) \\ &= -(A + \lambda B) \end{aligned}$$

Donc $A + \lambda B \in \mathcal{A}_n$.

Ainsi \mathcal{A}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dimensions : Le cours dit que $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ car une matrice $n \times n$ a n^2 entrées toutes indépendantes.

Pour \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n , des contraintes relient les entrées entre elles. La dimension est le nombre d'entrées que l'on peut choisir librement.

Dimension de \mathcal{S}_n : La condition $A^t = A$ signifie $a_{ij} = a_{ji}$. Regardons avec $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}.$$

Les cases encadrées sont les choix libres. Les autres sont imposées par symétrie. On compte :

⊙ Diagonale : $a_{11}, a_{22}, a_{33} \rightarrow n = 3$ choix libres.

⊙ Au-dessus de la diagonale : $a_{12}, a_{13}, a_{23} \rightarrow 2 + 1 = 3$ choix libres.

$$\text{Total : } 3 + 3 = 6 = \frac{3 \times 4}{2}.$$

En général, au-dessus de la diagonale il y a $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ cases. Donc :

$$\dim \mathcal{S}_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Dimension de \mathcal{A}_n : La condition $A^t = -A$ impose deux choses : $a_{ii} = 0$ (diagonale nulle) et $a_{ji} = -a_{ij}$. Avec $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ -a_{12} & 0 & \boxed{a_{23}} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

La diagonale est forcée à 0. Seules les cases au-dessus de la diagonale sont libres : $a_{12}, a_{13}, a_{23} \rightarrow 3 = \frac{3 \times 2}{2}$ choix libres.

En général :

$$\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}}.$$

② **Somme :** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On écrit :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^t)}_{S \in \mathcal{S}_n} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^t)}_{A \in \mathcal{A}_n}$$

Vérifions que $S \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{A}_n$:

$$S^t = \left(\frac{M + M^t}{2} \right)^t = \frac{M^t + M}{2} = S$$

$$A^t = \left(\frac{M - M^t}{2} \right)^t = \frac{M^t - M}{2} = -\frac{M - M^t}{2} = -A$$

Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$.

Somme directe : On vérifie que les dimensions s'additionnent :

$$\dim \mathcal{S}_n + \dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} \\
&= \frac{2n^2}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Puisque la somme est égale à l'espace entier et que les dimensions s'additionnent, la somme est directe :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$$

Exercice 5.

- ① Vérifier directement, en utilisant la définition de la multiplication matricielle, que $(AB)^t = (B^t)(A^t)$ (quand ces produits ont un sens).
- ② Soit A une matrice $m \times n$ (m lignes et n colonnes).
Montrer que $(A^t A)$ et (AA^t) sont des matrices carrées symétriques.

Correction de l'exercice 5.

- ① Soient $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Le produit AB est une matrice $m \times p$.

Notons $C = AB$.

Par définition de la transposée, le coefficient d'indice (j, i) de C^t est égal au coefficient d'indice (i, j) de C :

$$(C^t)_{ji} = C_{ij}.$$

Par définition du produit matriciel, le coefficient (i, j) de AB est :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Calculons maintenant le coefficient (j, i) du produit $B^t A^t$. Notons $D = B^t A^t$.

$$D_{ji} = \sum_{k=1}^n (B^t)_{jk} (A^t)_{ki}.$$

Or, par définition de la transposée, $(B^t)_{jk} = b_{kj}$ et $(A^t)_{ki} = a_{ik}$. Donc :

$$D_{ji} = \sum_{k=1}^n b_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

On constate que pour tous indices i, j :

$$((AB)^t)_{ji} = (B^t A^t)_{ji}.$$

Donc $(AB)^t = B^t A^t$.

- ② Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

Pour $A^t A$: C'est une matrice carrée de taille $n \times n$. Calculons sa transposée en utilisant la propriété démontrée ci-dessus :

$$\begin{aligned}
(A^t A)^t &= A^t (A^t)^t \\
&= A^t A.
\end{aligned}$$

Puisque $(A^t A)^t = A^t A$, la matrice $A^t A$ est **symétrique**.

Pour AA^t : C'est une matrice carrée de taille $m \times m$. De même :

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t$$

$$= AA^t.$$

Puisque $(AA^t)^t = AA^t$, la matrice AA^t est **symétrique**.

Exercice 6.

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer les matrices inverses des matrices inversibles

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 6.

Rappel : Une matrice A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_d$.

Dans ce cas B est unique; elle est appelée l'inverse de A et notée A^{-1} .

1) Pour la première matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

On forme la matrice augmentée $(A|I_3)$ et on applique les opérations élémentaires :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $AA^{-1} = I_3$.

2) Pour la deuxième matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{2L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}]{\quad} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Pour la troisième matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

On remarque que $L_1 = L_2 + L_3$ (car $1 = 1 + 0$, $0 = 1 + (-1)$, $1 = 0 + 1$).

Donc la matrice n'est pas libre (les lignes sont liées).

Donc C n'est pas inversible.

Exercice 7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ① Montrer que A est inversible si et seulement si A^t est inversible, et que dans ce cas $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- ② Montrer que si A est nilpotente d'ordre p , alors $I_n - A$ est inversible et que l'on a

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}.$$

Retrouver la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7.

- ① **Preuve :**

A est inversible \iff Il existe B telle que $AB = BA = I_n$.

\iff En transposant : il existe B telle que $(AB)^t = (BA)^t = I_n^t$.

\iff Il existe B telle que $B^t A^t = A^t B^t = I_n$.

Ce qui signifie que A^t est inversible et que son inverse est $B^t = (A^t)^{-1}$.

- ② **Définition :** A est dite nilpotente d'ordre p si $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

Montrer que si A est nilpotente d'ordre p , alors $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + \dots + A^{p-1}$.

Il suffit de calculer les produits :

$$(I_n - A)(I_n + A + \dots + A^{p-1}) = I_n$$

$$(I_n + A + \dots + A^{p-1})(I_n - A) = I_n$$

Développons le premier produit :

$$\begin{aligned} &= (I_n - A)I_n + (I_n - A)A + \dots + (I_n - A)A^{p-1} \\ &= (I_n - A) + (A - A^2) + (A^2 - A^3) + \dots + (A^{p-1} - A^p) \\ &= I_n - A^p \end{aligned}$$

Comme $A^p = 0$ car A est dite nilpotente, le résultat est I_n .

Application : Retrouver l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche A nilpotente telle que $B = I_n - A$.

$$A = I_n - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $A_1 = -A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $B = I_n + A_1$.

Calculons les puissances de A_1 :

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1^3 = 0.$$

D'après l'exercice, $I_3 - A_1$ est inversible et son inverse est $I_3 + A_1 + A_1^2$.

$$I_3 + A_1 + A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = I_n - A = I_n + A_1$$

Exercice 8.

On pose $E = \mathbb{R}^3$. Soient les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.

- ① Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E .
- ② Trouver la matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} à la base \mathcal{B} .
- ③ Calculer P^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan. Exprimer dans la base \mathcal{C} l'élément x de E dont les composantes dans la base \mathcal{B} sont $(1, 1, 1)$ et retrouver ainsi l'écriture canonique de x (c'est-à-dire sous la forme d'un triplet).
- ④ Soit f l'application linéaire de E dans E ayant pour matrice dans la base \mathcal{C}

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

Correction de l'exercice 8.

Problème général :

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire. $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ où \mathcal{B} base de E , \mathcal{C} base de F . $B = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$ où \mathcal{B}' base de E , \mathcal{C}' base de F .

$P = I_F \circ f \circ I_E$ (Formule de changement de base).

$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathcal{M}(I_F, \mathcal{C}', \mathcal{C}) \times \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') \times \mathcal{M}(I_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

La matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} à la base \mathcal{B} est par définition la matrice de l'application identité $Id_E : E_{\mathcal{B}} \rightarrow E_{\mathcal{C}}$, $x \mapsto x$.

Ses colonnes sont les vecteurs de \mathcal{B} exprimés dans \mathcal{C} :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1(1, 0, 0) \\ v_2(0, 1, 0) \\ v_3(0, 0, 1) \end{matrix}$$

(Les vecteurs à droite sont les vecteurs de la base canonique).

DÉTERMINANTS

Exercice 9.

Soit la matrice $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

- ① Calculer $\det(M_3)$. Quel est le rang de M_3 ?
- ② Soient $n \geq 3$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $M = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si $a_{i,j+1} = a_{i,j} + r$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j < n$, alors $\det(M) = 0$. Quel est le rang de M ?

Correction de l'exercice 9.

- ① Plutôt que de calculer directement le déterminant (par exemple avec la règle de Sarrus), on effectue des opérations élémentaires sur les lignes. Cette méthode est préférable car :

- * Les opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne modifient pas la valeur du déterminant.
- * Elles simplifient la matrice en faisant apparaître des zéros ou des lignes proportionnelles, ce qui rend le calcul immédiat et met en évidence la dépendance linéaire entre les lignes.

On calcule donc $\det(M_3)$ en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne est nulle, donc $\det(M_3) = 0$.

Puisque $\det(M_3) = 0$, la matrice n'est pas inversible, donc $\text{rg}(M_3) < 3$.

De plus, $M_3 \neq 0$, donc $\text{rg}(M_3) \geq 1$. On vérifie qu'il existe un mineur 2×2 non nul :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = 3 - 4 = -1 \neq 0.$$

Donc $\boxed{\text{rg}(M_3) = 2}$.

② La condition $a_{i,j+1} = a_{i,j} + r$ signifie que chaque ligne est une progression arithmétique de raison r . On peut écrire :

$$a_{i,j} = a_{i,1} + (j-1)r \quad \text{pour tout } 1 \leq i, j \leq n.$$

Notons L_1, L_2, \dots, L_n les lignes de M . Pour tout $1 \leq i < n$, la différence entre deux lignes consécutives est :

$$L_{i+1} - L_i = (a_{i+1,1} - a_{i,1} \quad a_{i+1,2} - a_{i,2} \quad \cdots \quad a_{i+1,n} - a_{i,n}).$$

Or pour chaque colonne j :

$$a_{i+1,j} - a_{i,j} = (a_{i+1,1} + (j-1)r) - (a_{i,1} + (j-1)r) = a_{i+1,1} - a_{i,1}.$$

Donc $L_{i+1} - L_i$ est une **ligne constante** :

$$L_{i+1} - L_i = (d_i \quad d_i \quad \cdots \quad d_i), \quad \text{où } d_i = a_{i+1,1} - a_{i,1}.$$

On effectue les opérations élémentaires sur les lignes :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ d_1 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 \\ d_2 & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-1} & d_{n-1} & d_{n-1} & \cdots & d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Puisque $n \geq 3$, il y a au moins deux lignes constantes (les lignes 2 et 3), donc elles sont proportionnelles et :

$$\boxed{\det(M) = 0}.$$

Rang de M : Les opérations ci-dessus montrent que l'espace engendré par les lignes de M est le même que celui engendré par L_1 et la ligne constante $\mathbf{1}^t = (1, 1, \dots, 1)$:

$$\text{Vect}(L_1, L_2, \dots, L_n) = \text{Vect}(L_1, \mathbf{1}^t).$$

Donc $\text{rg}(M) \leq 2$. De plus, $M \neq 0$ (car $r \neq 0$), donc $\text{rg}(M) \geq 1$.

* Si les coefficients de la première colonne sont tous égaux ($a_{1,1} = a_{2,1} = \dots = a_{n,1}$), alors L_1 est proportionnelle à

$$\mathbf{1}^t \text{ et } \boxed{\text{rg}(M) = 1}.$$

* Sinon, L_1 et $\mathbf{1}^t$ sont linéairement indépendantes et $\boxed{\text{rg}(M) = 2}$.

Exercice 10.① Soit $x \in \mathbb{R}$.Calculer le déterminant d'une matrice dont tous les éléments valent 1 sauf éventuellement ceux de la diagonale qui valent $x + 1$.② Soit A une matrice carrée orthogonale, c'est-à-dire $A^t A = I_n$.Montrer que $\det(A) = \pm 1$.**Correction de l'exercice 10.**① Soit A_n la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments valent 1 sauf ceux de la diagonale qui valent $x + 1$:

$$A_n = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x+1 \end{pmatrix}.$$

On ajoute toutes les colonnes C_2, \dots, C_n à la première colonne $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$. Chaque ligne somme à $x + n$:

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} x+n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n & x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n & 1 & x+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+n & 1 & 1 & \cdots & x+1 \end{pmatrix}.$$

On factorise la première colonne par $(x + n)$:

$$\det(A_n) = (x+n) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x+1 \end{pmatrix}.$$

On remplace L_i par $L_i - L_1$ pour $i = 2, \dots, n$:

$$\det(A_n) = (x+n) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure. Son déterminant est le produit des éléments diagonaux :

$$\det(A_n) = (x+n) \times 1 \times x^{n-1}.$$

Donc $\boxed{\det(A_n) = x^{n-1}(x+n)}$.② Soit A une matrice orthogonale, c'est-à-dire $A^t A = I_n$. On prend le déterminant des deux membres :

$$\det(A^t A) = \det(I_n).$$

D'une part, $\det(I_n) = 1$. D'autre part, en utilisant les propriétés du déterminant :

$$\begin{aligned}\det(A^t A) &= \det(A^t) \det(A) \\ &= \det(A) \det(A) \\ &= (\det(A))^2.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$(\det(A))^2 = 1.$$

Donc

$$\boxed{\det(A) = \pm 1}.$$

Exercice 11.

Déterminer le rang des matrices complexes $\begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & a \\ 2a & 2a & 1 \\ 2a+1 & 3a & 2a+1 \end{pmatrix}$ en discutant suivant les valeurs de a pour la deuxième.

Correction de l'exercice 11.

Première matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix}.$

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes pour échelonner la matrice :

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - iL_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2i \\ 0 & 2i & 4i & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - iL_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La matrice échelonnée possède 3 pivots non nuls. Donc $\boxed{\text{rg}(A) = 3}$.

Deuxième matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & a \\ 2a & 2a & 1 \\ 2a+1 & 3a & 2a+1 \end{pmatrix}.$

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & a \\ 2a & 2a & 1 \\ 2a+1 & 3a & 2a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2aL_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - (2a+1)L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1-a^2 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 \\ 0 & a & 1-2a^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a}{1-a^2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1-a^2 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 \\ 0 & 0 & 1-2a^2 + \frac{a^3}{1-a^2} \end{pmatrix}.$$

Simplifions le terme en position (4,3) :

$$\begin{aligned} 1-2a^2 + \frac{a^3}{1-a^2} &= \frac{(1-2a^2)(1-a^2) + a^3}{1-a^2} \\ &= \frac{1-3a^2+2a^4+a^3}{1-a^2} \\ &= \frac{2a^4+a^3-3a^2+1}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Le rang de B dépend des valeurs de a qui annulent les pivots. Les pivots sont 1 , $1-a^2$, $1-4a^2$ et le dernier terme.

- ⊛ Si $a \notin \{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ et que le dernier pivot est non nul, alors $\boxed{\text{rg}(B) = 3}$.
- ⊛ Si $a = 1$ ou $a = -1$, le deuxième pivot s'annule. On reprend la matrice avant cette opération :

$$\begin{aligned} a = 1 \implies B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc pour $a = \pm 1$, $\boxed{\text{rg}(B) = 2}$.

- ⊛ Si $a = \frac{1}{2}$, le troisième pivot s'annule. On vérifie le dernier :

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{2}{16} + \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Donc pour $a = \frac{1}{2}$, $\boxed{\text{rg}(B) = 3}$.

- ⊛ Si $a = -\frac{1}{2}$, le troisième pivot s'annule. On vérifie le dernier :

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{2}{16} - \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{8}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Donc pour $a = -\frac{1}{2}$, $\boxed{\text{rg}(B) = 3}$.

En résumé :

- ⊛ Si $a = 1$ ou $a = -1$, $\text{rg}(B) = 2$.
- ⊛ Sinon, $\text{rg}(B) = 3$.

Exercice 12.

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer sa matrice inverse.

Correction de l'exercice 12.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ (nécessaire pour que la matrice soit définie).

1. Inversibilité. Calculons $\det(A)$:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0 \times \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & a \\ \frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix} - a \times \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & a \\ \frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix} + a^2 \times \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \\ &= 0 - a \left(\frac{1}{a} \cdot 0 - a \cdot \frac{1}{a^2} \right) + a^2 \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} - 0 \cdot \frac{1}{a^2} \right) \\ &= -a \left(-\frac{1}{a} \right) + a^2 \left(\frac{1}{a^2} \right) \\ &= 1 + 1 = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc $\det(A) = 2 \neq 0$, ainsi A est inversible (pour tout $a \neq 0$).

2. Calcul de l'inverse. On utilise la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^t$.

Calculons la comatrice $\text{com}(A)$:

$$\begin{aligned} C_{11} &= + \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & a \\ \frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix} = -1, & C_{12} &= - \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & a \\ \frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}, & C_{13} &= + \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}, \\ C_{21} &= - \det \begin{pmatrix} a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} = a, & C_{22} &= + \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ \frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix} = -1, & C_{23} &= - \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a}, \\ C_{31} &= + \det \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^2, & C_{32} &= - \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ \frac{1}{a} & a \end{pmatrix} = a, & C_{33} &= + \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} = -1. \end{aligned}$$

D'où

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & -1 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

La transposée de la comatrice est donc

$$\text{com}(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : On peut vérifier que $A \cdot A^{-1} = I_3$:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3. \end{aligned}$$

Exercice 13.

Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Correction de l'exercice 13.

On développe le déterminant D_n par rapport à la première colonne.

Le premier élément est $a_{1,1} = 1$. Son mineur $M_{1,1}$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne :

$$M_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Donc $M_{1,1} = 1$.

Le dernier élément de la première colonne est $a_{n,1} = 1$. Son mineur $M_{n,1}$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la n -ième ligne et la première colonne :

$$M_{n,1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Donc $M_{n,1} = 1$.

Tous les autres éléments de la première colonne sont nuls. Le développement donne :

$$\begin{aligned} D_n &= a_{1,1} \cdot (-1)^{1+1} M_{1,1} + a_{n,1} \cdot (-1)^{n+1} M_{n,1} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)^{n+1} \cdot 1 \\ &= 1 + (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

On en déduit :

⊙ Si n est pair, $(-1)^{n+1} = -1$, donc $D_n = 0$.

⊙ Si n est impair, $(-1)^{n+1} = 1$, donc $D_n = 2$.

Exercice 14.

Les nombres a , b et c étant racines de l'équation $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$, montrer que

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \alpha^3 \gamma$$

et

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\beta^2.$$

Correction de l'exercice 14.

Puisque a , b et c sont racines de $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$, les relations de Viète donnent :

$$\begin{aligned} a + b + c &= \alpha, \\ ab + bc + ca &= \beta, \\ abc &= \gamma. \end{aligned}$$

On en déduit que $b + c = \alpha - a$, $c + a = \alpha - b$ et $a + b = \alpha - c$.

Premier déterminant : Notons

$$D_1 = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$$

En remplaçant $b + c$, $c + a$ et $a + b$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} (\alpha - a)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (\alpha - b)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (\alpha - c)^2 \end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations élémentaires sur les colonnes : $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} (\alpha - a)^2 - b^2 & b^2 - c^2 & c^2 \\ a^2 - (\alpha - b)^2 & (\alpha - b)^2 - c^2 & c^2 \\ 0 & b^2 - (\alpha - c)^2 & (\alpha - c)^2 \end{vmatrix}.$$

En factorisant les différences de carrés et en utilisant $a + b + c = \alpha$, on obtient après simplifications (développement et

regroupement des termes en fonction de α, β, γ :

$$D_1 = \alpha^3 \gamma.$$

Deuxième déterminant : Notons

$$D_2 = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$$

De même, on remplace $b+c = \alpha - a$, etc. et on effectue des opérations élémentaires. Après développement et utilisation des relations de Viète, on trouve :

$$D_2 = 2\beta^2.$$

Exercice 15.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer par récurrence que $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Correction de l'exercice 15.

On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

Initialisation ($n = 2$) :

$$\alpha(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i).$$

La formule est vraie pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons la formule vraie au rang $n-1$ et montrons-la au rang n .

On effectue des opérations élémentaires sur les colonnes : pour $j = n, n-1, \dots, 2$, on remplace C_j par $C_j - x_1 C_{j-1}$:

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - x_1 C_2 \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

On factorise chaque ligne i ($i = 2, \dots, n$) par $(x_i - x_1)$:

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \right] \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant restant est exactement $\alpha(x_2, x_3, \dots, x_n)$, un déterminant de Vandermonde d'ordre $n - 1$. Par hypothèse de récurrence :

$$\alpha(x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left[\prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \right] \times \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

La formule est démontrée par récurrence.

SYSTÈMES

Exercice 16.

- ① Dans quel cas le système

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = \alpha \\ x + y + mz = \beta \end{cases}$$

est-il de Cramer?

- ② Résoudre le système dans le cas de Cramer.

Correction de l'exercice 16.

- ① Le système est de Cramer si et seulement si le déterminant de la matrice des coefficients est non nul.

Notons A cette matrice :

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Calculons $\det(A)$ en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 \end{vmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure. Son déterminant est le produit des éléments diagonaux :

$$\begin{aligned} \det(A) &= -[1 \times (m-1) \times (2-m-m^2)] \\ &= -(m-1)(2-m-m^2) \\ &= -(m-1)[-(m^2+m-2)] \\ &= (m-1)(m^2+m-2) \\ &= (m-1)(m-1)(m+2) \\ &= (m-1)^2(m+2). \end{aligned}$$

Le système est donc de Cramer si et seulement si $\det(A) \neq 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{m \neq 1 \text{ et } m \neq -2}.$$

② Dans le cas de Cramer, on résout le système.

On peut utiliser la méthode du pivot de Gauss. La matrice augmentée est :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & m & \beta \end{array} \right) &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & \beta \\ 1 & m & 1 & \alpha \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & \beta \\ 0 & m-1 & 1-m & \alpha-\beta \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m\beta \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & \beta \\ 0 & m-1 & 1-m & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m\beta+\alpha-\beta \end{array} \right).$$

On résout par remontée. Notons $D = (m-1)^2(m+2) = -(m-1)(m^2+m-2)$.

$$z = \frac{1+\alpha-\beta(m+1)}{2-m-m^2} = \frac{1+\alpha-\beta(m+1)}{-(m-1)(m+2)},$$

$$y = \frac{\alpha-\beta-(1-m)z}{m-1} = \frac{\alpha-\beta}{m-1} + z,$$

$$x = \beta - y - mz.$$

Après simplification, on obtient :

$$x = \frac{(m+1)-\alpha-m\beta}{(m-1)(m+2)},$$

$$y = \frac{-m\alpha+(m+1)-\beta}{(m-1)(m+2)},$$

$$z = \frac{-\alpha-\beta+(m+1)}{(m-1)(m+2)}.$$

Donc la solution unique est :

$$(x, y, z) = \left(\frac{m+1-\alpha-m\beta}{(m-1)(m+2)}, \frac{m+1-m\alpha-\beta}{(m-1)(m+2)}, \frac{m+1-\alpha-\beta}{(m-1)(m+2)} \right).$$

Exercice 17.

On considère le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases}$$

- ① Montrer que ce système est de Cramer si et seulement si n est impair (voir Exercice 13).
- ② Discuter des solutions de ce système.

Correction de l'exercice 17.

- ① La matrice des coefficients du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît exactement la matrice de l'Exercice 13. Son déterminant est donc :

$$\det(A) = D_n = 1 + (-1)^{n+1}.$$

- ⊗ Si n est impair, $(-1)^{n+1} = 1$, donc $\det(A) = 2 \neq 0$. Le système est de Cramer.
- ⊗ Si n est pair, $(-1)^{n+1} = -1$, donc $\det(A) = 0$. Le système n'est pas de Cramer.

Le système est donc de Cramer si et seulement si n est impair.

- ② **Cas n impair :** Le système admet une solution unique. On la trouve par remontée.

En sommant les équations avec des signes alternés $E_1 - E_2 + E_3 - \dots + E_n$:

$$(x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) - \dots + (x_n + x_1) = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n.$$

Tous les termes s'annulent sauf $2x_1$:

$$2x_1 = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i.$$

Donc $x_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i$.

Puis on remonte : $x_2 = a_1 - x_1$, $x_3 = a_2 - x_2$, etc. En général :

$$x_{k+1} = a_k - x_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, n-1.$$

Cas n pair : Le déterminant est nul, le système n'est pas de Cramer.

On somme les équations avec des signes alternés $E_1 - E_2 + E_3 - \dots - E_n$:

$$(x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) - \dots - (x_n + x_1) = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_n.$$

Le membre de gauche vaut 0 (tous les x_i s'annulent deux par deux). Donc une **condition de compatibilité** est :

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i = 0.$$

- ⊗ Si $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i \neq 0$, le système est **incompatible** (pas de solution).
- ⊗ Si $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i = 0$, le système est compatible. Le rang de la matrice est $n-1$ (on peut vérifier qu'il y a $n-1$ lignes indépendantes), donc il y a une variable libre. Les solutions forment une droite affine de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \quad (\text{paramètre libre}), \\ x_2 &= a_1 - \lambda, \\ x_3 &= a_2 - a_1 + \lambda, \\ x_4 &= a_3 - a_2 + a_1 - \lambda, \\ &\vdots \\ x_k &= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-1-j} a_j + (-1)^{k-1} \lambda. \end{aligned}$$