Mathématiques 2012–2013

Cours d'Algèbre 2 : Algèbre linéaire

Adel BLOUZA

Bureau n^{o} M.1.19

adel.blouza@univ-rouen.fr

Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem

Avenue de l'Université, BP.12,

F76801 Saint-Étienne-du-Rouvray.

Rédigé avec LaTeX

par Hicham AMARIR

le 13 mai 2026

Table des matières

1 Systèmes linéaires **4**

1.1 Généralités sur les systèmes linéaires . . . 4

1.1.1 Systèmes équivalents et opérations élémentaires . . . 6

1.2 Notations matricielles . . . 6

1.3 Systèmes échelonnés . . . 7

1.4 Méthode du pivot de Gauss . . . 9

2 Vecteurs dans $\mathbb{R}^m$ **12**

2.1 Définition . . . 12

2.1.1 Interprétation géométrique dans le plan et dans l'espace . . . 13

2.2 Structure algébrique de $(\mathbb{R}^m, +, \times)$ . . . 14

2.3 Combinaisons linéaires . . . 15

2.4 Espace engendré par une famille de vecteurs . . . 16

2.5 Famille génératrice . . . 17

2.6 Produit matrice–vecteur . . . 18

2.7 Application aux systèmes linéaires . . . 20

2.8 Indépendance linéaire . . . 21

2.9 Bases de $\mathbb{R}^m$ . . . 23

2.10 Coordonnées dans une base . . . 24

3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^m$ **26**

3.1 Définition et premiers exemples . . . 26

3.2 Somme de sous-espaces vectoriels . . . 27

3.3 Bases, composantes, dimensions . . . 28

3.4 Changement de base . . . 31

4 Applications linéaires **32**

4.1 Définition et exemples . . . 32

4.2 Isomorphismes . . . 34

4.3 Noyau et image . . . 35

4.4 Rang d'une application linéaire . . . 36

4.5 Matrice d'une application linéaire dans des bases . . . 37

4.6 Théorème du rang . . . 39

5 Algèbre matricielle **41**

5.1 Notations et types de matrices . . . 41

5.2 Opérations linéaires sur les matrices . . . 43

5.3 Transposée d'une matrice . . . 45

5.4 Produit matriciel . . . 45

5.5 Cas $m = n$: matrices inversibles . . . 49
5.5.1 Puissances d'une matrice . . . 49
5.5.2 Matrices inversibles . . . 49
5.6 Lien avec les systèmes linéaires . . . 51
5.7 Lien avec les applications linéaires . . . 52
5.8 Changement de bases . . . 53
5.8.1 Changement de bases pour les composantes . . . 53
5.8.2 Changement de bases pour une application linéaire . . . 53
5.9 Inversion par l'algorithme de Gauss-Jordan . . . 54
5.10 Inverse et transposée . . . 57

6 Déterminants **58**
6.1 Définition et premières propriétés . . . 58
6.2 Quelques propriétés . . . 59
6.3 Déterminants et matrices inversibles . . . 60
6.4 Cofacteurs et développements du déterminant . . . 61
6.4.1 Matrice des cofacteurs et inverse . . . 62
6.4.2 Formule de Cramer . . . 63

7 Réduction des matrices **64**
7.1 Valeurs propres et vecteurs propres . . . 64
7.1.1 Définition . . . 64
7.1.2 Polynôme caractéristique . . . 65
7.1.3 Sous-espace propre . . . 65
7.2 Diagonalisation . . . 66
7.2.1 Définition et condition . . . 66
7.2.2 Méthode de diagonalisation . . . 67
7.2.3 Puissances d'une matrice diagonalisable . . . 68

Chapitre 1

Systèmes linéaires

1.1 Généralités sur les systèmes linéaires

Définition 1.1 : (*Équation linéaire*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1.

Une ***équation linéaire*** à n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Exemple :

Les équations suivantes sont des équations linéaires :

$$2x_1 - 5x_2 = 3, \qquad \frac{1}{2}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 0, \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

En revanche, $x_1^2 + x_2 = 0$ et $\sin x_1 + x_2 = 1$ ne sont pas des équations linéaires.

Définition 1.2 : (*Système linéaire*)

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Un ***système linéaire*** de m équations à n inconnues est une liste de m équations linéaires.

Il se présente sous la forme générale

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

où les a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ sont des nombres réels donnés appelés ***coefficients du système***,

et les b_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont des nombres réels donnés qui forment le ***second membre du système***.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 8, \\ x_1 - 4x_3 = -7, \end{cases}$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

Ses coefficients sont $a_{11} = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = \frac{2}{3}$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -4$ et le second membre est formé par $b_1 = 8$, $b_2 = -7$.

Définition 1.3 : (*Solution d'un système*)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (S) un système linéaire à n inconnues.

Une ***solution*** de (S) est un n-uplet $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, ..., s_n pour x_n dans (S), on obtient une égalité.

Résoudre (S), c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Définition 1.4 : (*Système compatible*)

Un système est dit ***compatible*** s'il admet au moins une solution.

Un système est dit ***incompatible*** s'il n'admet aucune solution.

Autrement dit, pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

- Soit il n'y a aucune solution : le système est **incompatible**.
- Soit il y a une solution unique : le système est **compatible**.
- Soit il y a une infinité de solutions : le système est également **compatible**.

Définition 1.5 : (*Système homogène*)

Un système linéaire (S) est dit ***homogène*** si son second membre est nul, c'est-à-dire si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Propriété 1.6 : (*Solution triviale d'un système homogène*)

Un système homogène est toujours compatible. En effet, il admet toujours la ***solution triviale***

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \qquad (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \text{ est solution.}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases} \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ est solution.}$$

1.1.1 Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Définition 1.7 : (*Systèmes équivalents*)

Deux systèmes sont dits ***équivalents*** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Propriété 1.8 : (*Opérations élémentaires*)

Les trois opérations élémentaires suivantes transforment un système en un système équivalent :

i) Échange de deux équations ($L_i \leftrightarrow L_j$).

ii) Multiplication d'une équation par un scalaire non nul ($L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$).

iii) Ajout à une équation d'un multiple d'une autre équation ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

1.2 Notations matricielles

Définition 1.9 : (*Matrice d'un système*)

La matrice du système linéaire est le tableau rectangulaire

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Elle a m lignes et n colonnes : c'est une matrice $m \times n$.

Exemple :

Pour le système

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 = 1, \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

la matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.10 : (*Matrice augmentée*)

À un système (S), on associe la ***matrice augmentée***

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

C'est une matrice $m \times (n+1)$ qui contient toute l'information du système.

Exemple :

Pour le système

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 = 1, \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases}$$

la matrice augmentée est

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

qui est une matrice 2×7.

1.3 Systèmes échelonnés

Définition 1.11 : (*Matrice échelonnée*)

Une matrice est dite ***échelonnée*** si, et seulement si elle possède les deux propriétés suivantes :

a) Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en-dessous sont également nulles.

$$\forall i \in [\![1, m-1]\!],\ \forall j \in [\![i+1, m]\!], \quad \big(\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_{ik} = 0\big) \implies \big(\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_{jk} = 0\big).$$

b) Dans chaque ligne non nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

$$\forall i \in [\![2, m]\!], \quad \big(\exists \ell \in [\![1, n]\!],\ a_{i\ell} \neq 0\big) \implies \big(\min\{k \in [\![1, n]\!] \mid a_{ik} \neq 0\} > \min\{k \in [\![1, n]\!] \mid a_{i-1,k} \neq 0\}\big).$$

Définition 1.12 : (*Matrice échelonnée réduite*)

Une matrice est dite ***échelonnée réduite*** si, en plus des deux propriétés précédentes, elle satisfait :

i) Le premier coefficient non nul d'une ligne (le ***pivot***) vaut 1.

ii) Chaque pivot est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée (pivots 2 et 4).

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite.

Définition 1.13 : (*Position de pivot*)

Soit B une matrice échelonnée réduite.

Les ***positions de pivot*** de B sont les emplacements (couple (ligne, colonne)) des coefficients valant 1.

Définition 1.14 : (*Variables essentielles et libres*)

Les inconnues correspondant à une colonne contenant un pivot sont appelées ***variables essentielles*** ou ***variables liées***.

Les autres sont appelées ***variables libres***.

Théorème 1.15 : (*Alternative pour un système échelonné*)

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$, on a l'alternative suivante :

a) Soit il n'y a ***aucune solution*** si la matrice augmentée possède une ligne de la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{array}\right), \qquad \text{avec } b \neq 0$$

b) Soit il y a une ***solution unique*** s'il n'y a pas de ligne de cette forme ni de variables libres.

c) Soit il y a une ***infinité de solutions*** s'il n'y a pas de ligne de la forme (a) mais qu'il existe des variables libres.

Dans le cas compatible, on obtient une description paramétrique des solutions en exprimant les variables essentielles en fonction du second membre et des variables libres.

Exemple :

Le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

a pour matrice augmentée

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Elle est échelonnée, sans ligne de la forme $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$ avec $b \neq 0$, donc le système est compatible.

Les pivots sont en colonnes 1 et 3 : donc x_1 et x_3 sont variables essentielles et donc x_2 est libre.

Par remontée, $x_3 = 1$ puis $x_1 = 4 - 2x_2 - 3 = 1 - 2x_2$: une infinité de solutions paramétrées par $x_2 \in \mathbb{R}$.

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.4 Méthode du pivot de Gauss

Définition 1.16 : (*Opérations élémentaires sur les lignes*)

Les opérations élémentaires sur les équations deviennent des opérations sur les lignes de la matrice augmentée. Les trois opérations suivantes ne modifient pas l'ensemble des solutions :

① $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.

② $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$: multiplication d'une ligne par un scalaire non nul.

③ $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne.

Remarque :

En effectuant une opération élémentaire, on ne mélange JAMAIS les colonnes.

La stratégie de l'algorithme de Gauss consiste à utiliser des substitutions de lignes pour placer des zéros là où il faut de façon à créer une forme échelonnée.

Soit A une matrice $m \times n$ quelconque :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Étape 1 : Choix du pivot

On commence par inspecter la première colonne de A.

- ⊛ Si elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas, à l'issue de cette étape la matrice A reste inchangée :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- ⊛ Si elle contient au moins un terme non nul, on choisit un tel terme que l'on appelle le ***pivot***.
  - ⊛ Si c'est le terme a_{11}, on passe directement à l'étape 2.
  - ⊛ Si c'est le terme a_{i1} avec $i \neq 1$, on échange les lignes 1 et i, puis on passe à l'étape 2.

Étape 2 : Élimination

À l'issue de l'étape 1, la matrice A est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix},$$

avec $a'_{11} \neq 0$.

On **ne touche plus** à la ligne 1 et on se sert du pivot a'_{11} pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i = 2, \dots, m$.

Pour cela, on remplace chaque ligne i ($i \geq 2$) par

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} L_1.$$

Au terme de l'étape 2, on obtient une matrice de la forme

$$A'' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } a''_{ij} = a'_{ij} - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} a'_{1j}.$$

Étape 3 : Boucle

La première colonne de la matrice obtenue est maintenant celle d'une matrice échelonnée.

On conserve cette première colonne ainsi que la première ligne, et on boucle en appliquant l'étape 1 à la sous-matrice de taille $(m-1) \times (n-1)$

$$\begin{pmatrix} a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on obtient une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} \text{avec } a^{(3)}_{ij} = a''_{ij} - \dfrac{a''_{i2}}{a''_{22}} a''_{2j} \\ \text{pour } i = 3, \dots, m \text{ et } j = 2, \dots, n \end{array}$$

On répète ce processus jusqu'à obtenir une matrice échelonnée.

Exemple :

Appliquons l'algorithme de Gauss à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Étape 1 : La première colonne de A est $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le pivot choisi est $a_{21} = 2$. On échange L_1 et L_2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Étape 2 : On élimine sous le pivot : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{2}L_1 = L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{2}L_1 = L_4 - L_1$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Étape 3 : On boucle sur la sous-matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

Étape 1 (bis) : Le pivot est $a_{22} = 1$ (déjà en place).

Étape 2 (bis) : On élimine sous le pivot : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{1}L_2 = L_3 - 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{1}L_2 = L_4 - 3L_2$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Étape 3 (bis) : On boucle sur la sous-matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Étape 1 (ter) : Le pivot est $a_{33} = 1$ (déjà en place).

Étape 2 (ter) : On élimine sous le pivot : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{1}L_3 = L_4 - L_3$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est échelonnée.

Chapitre 2

Vecteurs dans $\mathbb{R}^m$

2.1 Définition

Définition 2.1 : (*Vecteur dans* $\mathbb{R}^m$)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

On appelle ***vecteur*** de $\mathbb{R}^m$ tout élément de $\mathbb{R}^m$ c'est-à-dire toute matrice-colonne à m lignes.

On note les vecteurs par $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Par souci de gain de place, on utilise parfois la notation d'un m-uplet de scalaires

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Cette notation **NE doit PAS** être confondue avec la notation $(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m)$ qui désigne une matrice à 1 ligne et m colonnes.

Définition 2.2 : (*Addition vectorielle*)

On définit sur $\mathbb{R}^m$ l'addition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Définition 2.3 : (*Multiplication par un scalaire*)

On définit sur $\mathbb{R}^m$ la multiplication de $\overrightarrow{u}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

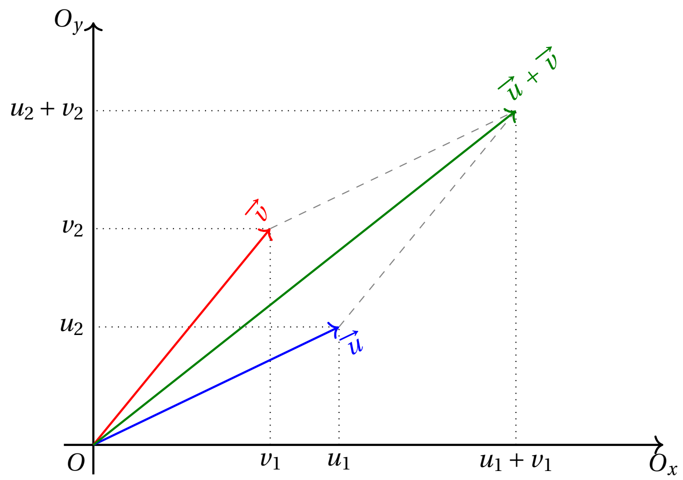
Ces deux opérations sont définies ligne par ligne.

2.1.1 Interprétation géométrique dans le plan et dans l'espace

Remarque :

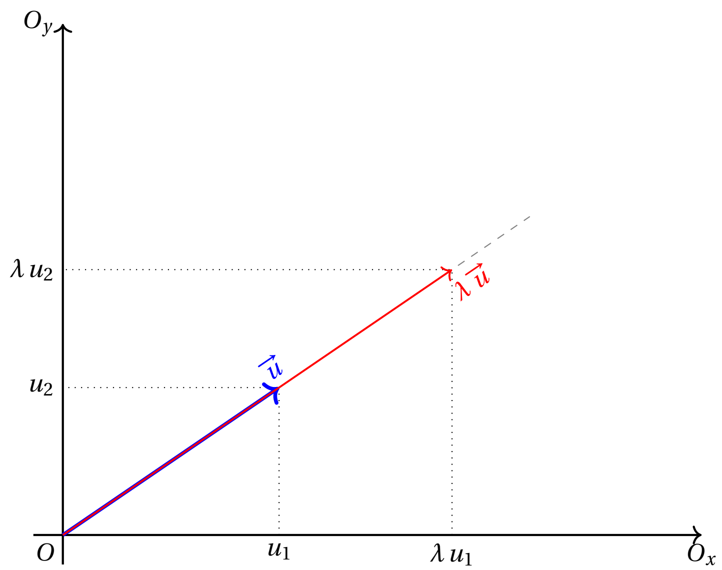
L'addition de deux vecteurs se traduit par la **règle du parallélogramme**.

La somme de deux vecteurs est représentée par la diagonale du parallélogramme ayant ces deux vecteurs comme côtés.



Remarque :

Par le théorème de Thalès, l'ensemble des multiples scalaires d'un vecteur est la droite qui supporte le segment représentant le vecteur. Cette droite passe naturellement par l'origine O.



2.2 Structure algébrique de $(\mathbb{R}^m, +, \times)$

Grâce aux opérations d'addition et de multiplication, l'ensemble $\mathbb{R}^m$ acquiert une structure algébrique, c'est-à-dire des règles de calcul sur les vecteurs.

Définition 2.4 : (*Vecteur nul*)

Le vecteur

$$\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

est appelé le ***vecteur nul*** de $\mathbb{R}^m$.

Propriété 2.5 : (*Propriétés de l'addition et de la multiplication par un scalaire*)

Pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ dans $\mathbb{R}^m$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

i) **Commutativité de l'addition :** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

ii) **Associativité de l'addition :** $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

iii) **Élément neutre pour l'addition :** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^m} = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^m} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

iv) **Tout élément admet un opposé :** $\overrightarrow{u} + (-1)\,\overrightarrow{u} = (-1)\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^m}$.

v) **Distributivité par rapport à l'addition vectorielle :** $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.

vi) **Distributivité par rapport à l'addition scalaire :** $(\lambda + \mu)\,\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

vii) **Associativité externe :** $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\,\overrightarrow{u}$.

viii) **Élément neutre externe :** $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Remarque :

Par les propriétés i) à iv) on voit que $(\mathbb{R}^m, +)$ est un **groupe commutatif**.

Définition 2.6 : (*Espace vectoriel*)

Les propriétés algébriques (i) à (viii) précédentes confèrent à $(\mathbb{R}^m, +, \times)$ ce que l'on appelle une ***structure d'espace vectoriel*** sur $\mathbb{R}$. On dit alors que $(\mathbb{R}^m, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$***-espace vectoriel***.

Les éléments de $\mathbb{R}^m$ sont appelés les ***vecteurs*** de cet espace vectoriel et les réels sont appelés les ***scalaires***.

Remarque :

On peut maintenant mener toutes sortes de calculs avec l'addition et la multiplication par un scalaire en appliquant les règles usuelles.

Ainsi

$$(\lambda + \mu)(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Attention à ne pas additionner des scalaires et des vecteurs et à ne pas multiplier deux vecteurs entre eux.

Propriété 2.7 : (*Propriétés du produit par zéro*)

Pour tout $\overrightarrow{u}$ dans $\mathbb{R}^m$ et λ dans $\mathbb{R}$,

$$0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^m}, \qquad \text{et} \qquad \lambda\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^m} = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

2.3 Combinaisons linéaires

À partir des deux opérations de base appliquées un nombre fini de fois et en utilisant les propriétés i) à viii), on aboutit à la notion fondamentale.

Définition 2.8 : (*Combinaison linéaire*)

Soient $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\right)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une famille de n scalaires.

Le vecteur

$$\overrightarrow{w} = \lambda_1\overrightarrow{u}_1 + \lambda_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u}_n$$

s'appelle une ***combinaison linéaire*** de la famille $\left(\overrightarrow{u}_i\right)_{i=1,\ldots,n}$ dont les coefficients sont les $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$.

Lien avec les systèmes linéaires :

La notion de combinaison linéaire est intimement liée à celle de système linéaire. En effet, considérons un système linéaire de m équations à n inconnues

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dont la matrice est $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et le second membre $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Notons $\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \ldots, \overrightarrow{c}_n$ les colonnes de A, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \left(j = 1, \ldots, n\right).$$

Le système (S) peut alors se réécrire sous forme vectorielle. En effet, en regroupant les équations composante par composante, on obtient

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ce qui, en factorisant par les inconnues, devient

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$x_1 \vec{c}_1 + x_2 \vec{c}_2 + \cdots + x_n \vec{c}_n = \vec{b}.$$

Ainsi, le membre de gauche n'est autre qu'une combinaison linéaire des colonnes de A dont les coefficients sont les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Par conséquent, **résoudre le système linéaire** (S) **revient à trouver une combinaison linéaire des colonnes de** A **qui soit égale au second membre** $\vec{b}$. Autrement dit, le système est compatible (admet au moins une solution) si et seulement si $\vec{b}$ appartient à l'espace engendré par les colonnes de A :

$$(S) \text{ est compatible } \iff \vec{b} \in \operatorname{Vect}\left(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\right).$$

Cette interprétation fondamentale sera reprise et approfondie dans les sections suivantes.

2.4 Espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 2.9 : (*Espace engendré (Span)*)

Soit $\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\right)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de la famille est appelé ***espace engendré*** par cette famille

$$\operatorname{Vect}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\right) = \left\{\vec{w} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; (\lambda_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Par convention, on posera $\operatorname{Vect}(\varnothing) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Remarque :

i) $\operatorname{Vect}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\right)$ est toujours un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$: $\operatorname{Vect}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\right) \subset \mathbb{R}^m$.

ii) $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + \cdots + 0\vec{u}_n \in \operatorname{Vect}\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right)$.

iii) Le système $\left(\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \ldots \; \vec{a}_n \; \vec{b}\right)$ est compatible si et seulement si $\vec{b} \in \operatorname{Vect}\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right)$.

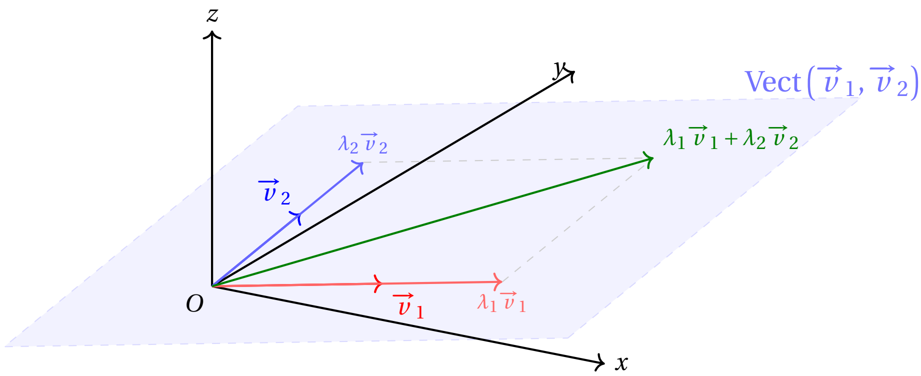
iv) $\forall j \in [\![1, n]\!], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \vec{u}_j \in \operatorname{Vect}\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right)$.

v) $\operatorname{Vect}\left(\vec{0}\right) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Interprétation géométrique

Géométriquement, l'espace engendré par une famille de vecteurs correspond à un sous-espace passant par l'origine (droite, plan, etc.).

- **Deux vecteurs non colinéaires.** Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires. L'ensemble $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est le **plan** passant par l'origine O et contenant ces deux vecteurs. En effet, lorsque les coefficients λ_1 et λ_2 parcourent $\mathbb{R}$, la combinaison $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$ parcourt tout le plan engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$:



- **Un seul vecteur (ou deux vecteurs colinéaires).** Si l'on a $\vec{v}_2 \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1)$, c'est-à-dire $\vec{v}_2 = \mu\vec{v}_1$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1)$ est la **droite** passant par O et dirigée par $\vec{v}_1$.
- **Trois vecteurs non coplanaires.** Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ non coplanaires engendrent tout l'espace : $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathbb{R}^3$.

2.5 Famille génératrice

Définition 2.10 : (*Famille génératrice*)

On dit qu'une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de $\mathbb{R}^m$ est ***génératrice*** (ou ***engendre*** $\mathbb{R}^m$) si

$$\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = \mathbb{R}^m.$$

En d'autres termes, si une famille est génératrice, alors tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

2.6 Produit matrice–vecteur

Définition 2.11 : (*Produit matrice–vecteur*)

Soit A une matrice $m \times n$, de colonnes $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, et soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Le ***produit*** de A par $\vec{x}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n.$$

Remarque :

a) Le produit $A\vec{x}$ n'est donc que la **combinaison linéaire** des vecteurs-colonnes de A dont les coefficients sont les lignes de $\vec{x}$.

b) Le produit matrice-vecteur n'est défini que si $\vec{x}$ a le même nombre de lignes que le nombre de colonnes de A.

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Alors

$$A\vec{x} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Propriété 2.12 : (*Matrice identité*)

La matrice $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est telle que $I_n \vec{x} = \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. On l'appelle ***matrice identité*** $n \times n$.

Théorème 2.13 : (*Linéarité du produit matrice–vecteur*)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un scalaire. On a

i) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$,

ii) $A(\lambda\vec{u}) = \lambda(A\vec{u})$.

Remarque :

Le signe + dans le membre de gauche de i) désigne l'addition dans $\mathbb{R}^n$,

Le signe + dans le membre de droite de i) désigne l'addition dans $\mathbb{R}^m$.

Ce sont donc deux opérations différentes car elles agissent sur des ensembles différents.

Preuve :

Vérifions ces deux propriétés à l'aide de la définition du produit matrice–vecteur. Notons $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ les colonnes de A.

Propriété i). Par définition du produit matrice–vecteur,

$$\begin{aligned}
A\left(\vec{u}+\vec{v}\right) &= (u_1+v_1)\,\vec{a}_1 + (u_2+v_2)\,\vec{a}_2 + \cdots + (u_n+v_n)\,\vec{a}_n \\
&= \left(u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + \cdots + u_n\vec{a}_n\right) + \left(v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + \cdots + v_n\vec{a}_n\right) \\
&= A\vec{u} + A\vec{v}.
\end{aligned}$$

Propriété ii). De même,

$$\begin{aligned}
A\left(\lambda\vec{u}\right) &= (\lambda u_1)\,\vec{a}_1 + (\lambda u_2)\,\vec{a}_2 + \cdots + (\lambda u_n)\,\vec{a}_n \\
&= \lambda\left(u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + \cdots + u_n\vec{a}_n\right) \\
&= \lambda\left(A\vec{u}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 2.14 : (*Généralisation*)

Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Alors

$$A\left(\lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n\right) = \lambda_1 A\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n A\vec{u}_n.$$

Remarque :

Le produit matrice-vecteur transforme donc toute combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$ en la combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^m$ avec les mêmes coefficients.

La i-ème ligne d'un produit matrice-vecteur est donnée par

$$\left(A\vec{x}\right)_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

2.7 Application aux systèmes linéaires

On va interpréter les systèmes linéaires à l'aide de produits matrice-vecteur.

Exemple :

Considérons le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ -5x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Il est équivalent à l'équation vectorielle suivante :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Forme sous laquelle on reconnaît un produit matrice-vecteur :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, on réécrit le système sous la forme concise :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

A est la matrice du système et $\vec{b}$ le second membre, écrit sous forme vectorielle.

Propriété 2.15 : (*Écriture matricielle d'un système*)

Tout système linéaire de m équations à n inconnues dont la matrice est A et le second membre $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ s'écrit de façon équivalente :

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{b},$$

où $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sont les vecteurs-colonnes de A.

Théorème 2.16 : (*Génération et pivot par ligne*)

Soit A une matrice $m \times n$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible.

ii) Les vecteurs-colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$.

iii) La matrice A admet une position de pivot par ligne.

Corollaire 2.17 : (*Caractérisation des familles génératrices*)

Une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ de $\mathbb{R}^m$ est génératrice

si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{pmatrix}$ admet une position de pivot par ligne.

2.8 Indépendance linéaire

Définition 2.18 : (*Famille libre (indépendance linéaire)*)

Une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de $\mathbb{R}^m$ est dite ***linéairement indépendante*** ou ***libre*** si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls : $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Dans le cas contraire on dit que la famille est ***linéairement dépendante*** ou ***liée***.

Par convention, l'ensemble vide est une famille libre.

Théorème 2.19 : (*Indépendance et pivot par colonne*)

Soit $A = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \end{pmatrix}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) La famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre.

ii) Le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale.

iii) La matrice A admet une position de pivot par colonne.

Remarque :

Le seul point non trivial consiste à remarquer que le système homogène admet une solution unique si et seulement s'il n'y a pas de variable libre, c'est-à-dire si la matrice admet une position de pivot dans chacune de ses colonnes.

Exemple :

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est liée car $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Propriété 2.20 : (*Liberté d'une famille à un ou deux vecteurs*)

i) La famille $(\vec{v})$ est libre si $\vec{v} \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$.

La famille $(\vec{v})$ est liée si $\vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$.

ii) La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre si et seulement si $\vec{v}_1$ n'est pas un multiple de $\vec{v}_2$ (et réciproquement).

Preuve :

i) **Cas 1 : $\vec{v} \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$.**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$.

Puisque $\vec{v} \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, on a nécessairement $\lambda = 0$.

Ainsi la seule combinaison linéaire de $(\vec{v})$ qui donne le vecteur nul est la combinaison triviale ($\lambda = 0$).

Donc la famille $(\vec{v})$ est **libre**.

Cas 2 : $\vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$. On a :

$$1 \times \vec{0}_{\mathbb{R}^m} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m},$$

ce qui est une combinaison linéaire nulle avec un coefficient non nul ($1 \neq 0$).

Il s'agit donc d'une combinaison linéaire non triviale.

Par conséquent, la famille $\left(\vec{v}\right)$ est **liée**.

ii) Montrons l'équivalence.

($\Rightarrow$) Supposons que la famille $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$ est libre.

Par l'absurde, supposons que $\vec{v}_1$ est un multiple de $\vec{v}_2$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2$.

Alors on peut écrire :

$$1 \times \vec{v}_1 - \lambda \times \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^m},$$

ce qui est une combinaison linéaire nulle non triviale (le coefficient 1 est non nul).

Cela contredit l'hypothèse de liberté.

Donc $\vec{v}_1$ n'est pas un multiple de $\vec{v}_2$. Par symétrie, $\vec{v}_2$ n'est pas non plus un multiple de $\vec{v}_1$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\vec{v}_1$ n'est pas un multiple de $\vec{v}_2$ (et réciproquement).

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

Raisonnons par l'absurde : supposons $\lambda_1 \neq 0$. Alors on peut isoler $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2,$$

ce qui signifie que $\vec{v}_1$ est un multiple de $\vec{v}_2$, contrairement à l'hypothèse. Donc $\lambda_1 = 0$.

L'équation devient alors $\lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$. Si $\vec{v}_2 \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, alors $\lambda_2 = 0$. Si $\vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$, alors $\vec{v}_2$ est un multiple de $\vec{v}_1$ (avec $\lambda = 0$), ce qui est aussi exclu par l'hypothèse. On a donc $\lambda_2 = 0$.

Ainsi la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale : la famille $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$ est **libre**.

Théorème 2.21 : (*Caractérisation des familles liées*)

Une famille $F = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right)$ de $n \geq 2$ vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est liée si et seulement si un au moins des vecteurs de F est combinaison linéaire des autres.

Théorème 2.22 : ($n > m$ *implique dépendance*)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Si $n > m$ alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est automatiquement liée.

Remarque :

Dans ce cas, inutile de se lancer dans des calculs de méthode de Gauss.

ATTENTION : par contre si $n < m$, on ne peut rien dire a priori. La famille peut être libre ou liée, seul le calcul peut le dire.

Théorème 2.23 : (*Taille maximale d'une famille libre*)

Toute famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ a au plus m éléments.

Preuve :

Ce théorème est la **contraposée** du théorème 2.22.

Rappelons ce théorème :

Si $n > m$ alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est liée.

Sa contraposée s'écrit :

Si une famille de $\mathbb{R}^m$ n'est pas liée (i.e. est libre) alors $n \not> m$ (i.e. $n \leq m$).

Autrement dit, si une famille est libre, elle ne peut pas avoir plus de m vecteurs, sans quoi elle serait liée d'après le théorème précédent. On a donc bien :

« Toute famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ a au plus m éléments. »

Propriété 2.24 : (*Cas triviaux de dépendance*)

Si une famille contient le vecteur nul, alors elle est liée.

Si une famille contient deux vecteurs égaux, alors elle est liée.

2.9 Bases de $\mathbb{R}^m$

Définition 2.25 : (*Base*)

Une ***base*** de $\mathbb{R}^m$ est une famille à la fois libre et génératrice.

Exemple :

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (base canonique).

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (base canonique).

Théorème 2.26 : (*Propriétés des bases*)

i) Toute base de $\mathbb{R}^m$ admet exactement m éléments.

ii) Toute famille libre de m éléments est une base de $\mathbb{R}^m$.

iii) Toute famille génératrice de m éléments est une base de $\mathbb{R}^m$.

Preuve :

i) Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une base de $\mathbb{R}^m$.

- $\mathcal{B}$ est libre. Par le théorème 2.23, toute famille libre de $\mathbb{R}^m$ a au plus m éléments. Donc $n \leqslant m$.
- $\mathcal{B}$ est génératrice. Notons $A = (\vec{v}_1 \ \cdots \ \vec{v}_n)$ la matrice $m \times n$. Puisque $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^m$, la matrice A admet une position de pivot par ligne (corollaire 2.17). Donc $n \geqslant m$.

Conclusion : $n = m$.

ii) Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ une famille libre de $\mathbb{R}^m$ à m éléments. Par le théorème 2.19, la matrice $A = (\vec{v}_1 \ \cdots \ \vec{v}_m)$ admet une position de pivot par colonne. Puisque A est carrée $m \times m$, elle admet aussi une position de pivot par ligne.

Donc A est échelonnée avec m pivots, ce qui implique que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution pour tout $\vec{b}$. Ainsi $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^m$, donc $\mathcal{B}$ est une base.

iii) Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$ à m éléments. Par le corollaire 2.17, la matrice $A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_m \end{pmatrix}$ admet une position de pivot par ligne. Puisque A est carrée $m \times m$, elle admet aussi une position de pivot par colonne. Donc par le théorème 2.19, $\mathcal{B}$ est libre. Par conséquent $\mathcal{B}$ est une base.

Définition 2.27 : (*Dimension*)

La ***dimension*** de $\mathbb{R}^m$ est le nombre d'éléments de toute base de $\mathbb{R}^m$:

$$\dim \mathbb{R}^m = m.$$

Exemple :

$\dim \mathbb{R} = 1, \quad \dim \mathbb{R}^2 = 2, \quad \dim \mathbb{R}^3 = 3.$

Remarque :

Cette notion algébrique de dimension coïncide avec la notion géométrique de dimension pour $m = 1, 2, 3$.

En effet, $\mathbb{R}$ est représenté par la droite, $\mathbb{R}^2$ par le plan et $\mathbb{R}^3$ par l'espace tridimensionnel. La géométrie élémentaire s'arrête là, mais pas l'algèbre linéaire.

On considère sans difficulté des espaces de dimension 5, 10 ou 100, etc.

2.10 Coordonnées dans une base

Théorème 2.28 : (*Décomposition dans une base*)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ une base de $\mathbb{R}^m$. Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, il existe un unique m-uplet de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ tel que

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Définition 2.29 : (*Coordonnées (composantes)*)

Le m-uplet $(\vec{x})_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ s'appelle les ***composantes*** (ou ***coordonnées***) de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On les range en colonne :

$$(\vec{x})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Attention : en général $(\vec{x})_{\mathcal{B}} \neq \vec{x}$, sauf si $\mathcal{B}$ est la base canonique. Les composantes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$ nous donnent une **nouvelle représentation** du vecteur $\vec{x}$.

Théorème 2.30 : (*Linéarité des composantes*)

Les composantes dans la base $\mathcal{B}$ ont des propriétés de linéarité :

$$\left(\vec{x}+\vec{y}\right)_{\mathcal{B}}=\left(\vec{x}\right)_{\mathcal{B}}+\left(\vec{y}\right)_{\mathcal{B}},\qquad \left(\lambda\vec{x}\right)_{\mathcal{B}}=\lambda\left(\vec{x}\right)_{\mathcal{B}}.$$

Remarque :

Comment calcule-t-on les composantes d'un vecteur $\vec{x}$ dans une base $\mathcal{B}$?

On commence par écrire la définition

$$\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\cdots+\lambda_m\vec{v}_m=\vec{x},$$

puis on reconnaît au premier membre un produit matrice-vecteur

$$P_{\mathcal{B}}\left(\vec{x}\right)_{\mathcal{B}}=\vec{x},$$

où $P_{\mathcal{B}}=\left(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \cdots\ \vec{v}_m\right)$ s'appelle la ***matrice de passage*** (voir définition 3.23).

Pour calculer $\left(\vec{x}\right)_{\mathcal{B}}$, il suffit donc de résoudre ce système linéaire $m\times m$ dont le second membre est $\vec{x}$.

Chapitre 3

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^m$

3.1 Définition et premiers exemples

Définition 3.1 : (*Sous-espace vectoriel*)

Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$. On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** (s.e.v.) de $\mathbb{R}^m$ si et seulement si

① $\boxed{F \textbf{ est non vide}}$: $F \neq \varnothing$, en particulier $\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^m} \in F$.

② $\boxed{F \textbf{ est stable par addition}}$: $\forall \overrightarrow{u} \in F,\ \forall \overrightarrow{v} \in F, \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$.

③ $\boxed{F \textbf{ est stable par multiplication}}$: $\forall \overrightarrow{u} \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \overrightarrow{u} \in F$.

Remarque :

① Un s.e.v. n'est jamais vide puisqu'il contient toujours au moins le vecteur nul.

② Si $\overrightarrow{u} \in F$, alors $-\overrightarrow{u} = (-1)\,\overrightarrow{u} \in F$ par iii).

③ Un s.e.v. F muni des deux opérations satisfait les huit propriétés algébriques : c'est donc également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

① Pour tout m, $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $\mathbb{R}^m$ sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

② L'ensemble $F = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}\right\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 3.2 : (Vect *est un sous-espace*)

Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ alors $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

Propriété 3.3 : (*Intersection de sous-espaces*)

Si F_1 et F_2 sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ alors $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

Remarque :

En général $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

L'opération qui remplace la réunion pour les s.e.v. est plus sophistiquée !

3.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 3.4 : (*Somme de sous-espaces vectoriels*)

Soient $F_1, \dots, F_k$ des s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

L'ensemble

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \exists x_i \in F_i,\ i = 1, \dots, k,\ \text{tels que } x = x_1 + \dots + x_k\right\},$$

est un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ appelé ***somme*** des $(F_i)_{i=1,\dots,k}$ et noté

$$F = F_1 + \dots + F_k = \sum_{i=1}^{k} F_i.$$

Propriété 3.5 : (*Plus petit s.e.v contenant la réunion*)

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} F_i$ est le plus petit s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ qui contient $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} F_i$.

Définition 3.6 : (*Somme directe*)

Soit $F = \sum_{i=1}^{k} F_i$.

Si pour tout $x \in F$ la décomposition en somme d'éléments de F_i est unique, alors on dit que la ***somme est directe*** et l'on note

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k.$$

Propriété 3.7 : (*Caractérisation de la somme directe*)

$F = \sum_{i=1}^{k} F_i$ est une somme directe si et seulement si

$$\forall x_i \in F_i, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, k]\!], \quad x_i = 0.$$

Deux s.e.v. en somme directe

Propriété 3.8 : (*Deux s.e.v. en somme directe*)

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Longleftrightarrow \quad F = F_1 + F_2 \ \text{ et } \ F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

Remarque :

Attention, cette proposition est fausse à partir de trois s.e.v.

On peut avoir $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ sans que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ ne soit directe.

Définition 3.9 : (*Sous-espaces supplémentaires*)

Si $F = F_1 \oplus F_2$, on dit que F_1 et F_2 sont des s.e.v. ***supplémentaires***.

3.3 Bases, composantes, dimensions

La notion de base s'étend aux s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

Définition 3.10 : (*Base d'un sous-espace vectoriel*)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

Une famille $(v_1, \dots, v_k)$ de F est une ***base*** de F si elle est à la fois libre et génératrice de F, c'est-à-dire $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.

Théorème 3.11 : (*de la base extraite*)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ engendré par une famille finie de vecteurs V.

Alors il existe un sous-ensemble de V qui est une base de F.

Preuve :

Notons $V = (v_1, \dots, v_k)$ une famille génératrice de F. On procède par *algorithme d'extraction* :

① Posons $E = V$.

② Pour chaque vecteur v_i de E, si v_i est combinaison linéaire des autres vecteurs de E, on retire v_i de E.

③ On répète l'étape 2 jusqu'à ce qu'aucun vecteur de E ne soit combinaison linéaire des autres.

Par construction, la famille E obtenue est libre (aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres).

De plus, E engendre toujours F car on n'a retiré que des vecteurs redondants, c'est-à-dire qui étaient déjà dans l'espace engendré par les autres.

Donc E est une base de F contenue dans V.

Théorème 3.12 : (*de la base incomplète*)

Si F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et V une famille libre de vecteurs de F, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de F qui contient V.

Preuve :

Posons $V = \left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\right)$ une famille libre de vecteurs de F, avec $k \leqslant m$.

① Si V est génératrice de F alors V est la base cherchée.

② Sinon, puisque V n'engendre pas F, il existe au moins un vecteur $\vec{v} \in F$ qui n'appartient pas à $\text{Vect}\left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\right)$. On ajoute un tel vecteur $\vec{v}$ à la famille V.

③ On réitère jusqu'à obtenir une base de F.

Corollaire 3.13 : (*Existence d'une base*)

Tout s.e.v. admet une base.

Preuve :

$\varnothing$ est une famille libre de F, donc par le théorème de la base incomplète il existe une base de F.

Théorème 3.14 : (*Composantes dans une base*)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ une base de F.

Pour tout $x \in F$, il existe un unique k-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tel que

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

Le k-uplet $(x)_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ s'appelle les ***composantes*** de x dans $\mathcal{B}$, notées

$$(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

De plus, pour tous $x, y \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left(x+y\right)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{B}} + \left(y\right)_{\mathcal{B}}, \qquad (\lambda x)_{\mathcal{B}} = \lambda\,(x)_{\mathcal{B}}.$$

Remarque :

Le théorème précédent permet de ramener l'étude d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ à celle de $\mathbb{R}^k$ pour $k \leq m$.

Il n'y a plus aucune raison de confondre $x \in \mathbb{R}^m$ et $(x)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^k$ puisque ces deux vecteurs n'habitent pas dans le même espace !

Corollaire 3.15 : (*Propriétés des composantes*)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{B}$ une base de F de cardinal k.

Pour toute famille $(x_1, \ldots, x_\ell)$ de vecteurs de F (avec $\ell \in \mathbb{N}^*$ quelconque), on a les propriétés suivantes :

① $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_\ell x_\ell)_{\mathcal{B}} = \lambda_1\,(x_1)_{\mathcal{B}} + \cdots + \lambda_\ell\,(x_\ell)_{\mathcal{B}}$.

② Une famille $(x_1, \ldots, x_\ell)$ de F est libre si et seulement si $\left((x_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (x_\ell)_{\mathcal{B}}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^k$.

③ Les familles $(x_1, \ldots, x_\ell)$ de F et $\left((x_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (x_\ell)_{\mathcal{B}}\right)$ de $\mathbb{R}^k$ ont exactement les mêmes relations de dépendance linéaire.

Théorème 3.16 : (*Dimension d'un sous-espace*)

Toutes les bases d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ ont le même nombre d'éléments.

Définition 3.17 : (*Dimension d'un sous-espace vectoriel*)

La ***dimension*** d'un s.e.v. F de $\mathbb{R}^m$ est le nombre d'éléments de chacune de ses bases :

$$\dim F = \operatorname{card} \mathcal{B}, \text{ pour toute base } B \text{ de } F.$$

Théorème 3.18 : (*Propriétés de la dimension*)

Soit F un s.e.v. de dimension k. Alors

⊛ toute famille libre de F a au plus k éléments,

⊛ une famille libre de F de k éléments est une base de F,

⊛ toute famille génératrice de F a au moins k éléments,

⊛ une famille génératrice de F de k éléments est une base de F.

Remarque :

Quand on connaît la dimension d'un s.e.v., pour montrer qu'une famille donnée est une base, il suffit de vérifier qu'elle a le bon nombre d'éléments et soit qu'elle est libre, soit qu'elle est génératrice.

Théorème 3.19 : (*Dimension et inclusion*)

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

$$F_1 \subset F_2 \quad \Longrightarrow \quad \dim F_1 \leqslant \dim F_2 \leqslant m.$$

De plus,

$$F_1 \subset F_2 \text{ et } \dim F_1 = \dim F_2 \quad \Longleftrightarrow \quad F_1 = F_2$$

Preuve :

Inégalités.

⊛ Une base de F_2 est une famille libre de $\mathbb{R}^m$, donc elle a au plus m éléments (théorème 2.23).

Ainsi $\dim F_2 \leqslant m$.

⊛ Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F_1 (de cardinal $\dim F_1$).

Puisque $F_1 \subset F_2$, la famille $\mathcal{B}_1$ est libre dans F_2.

Par le théorème 3.19, toute famille libre de F_2 a au plus $\dim F_2$ éléments.

Donc $\dim F_1 \leqslant \dim F_2$.

Conclusion : $\dim F_1 \leqslant \dim F_2 \leqslant m$.

Équivalence. Montrons les deux sens.

($\Leftarrow$) Si $F_1 = F_2$, alors clairement $\dim F_1 = \dim F_2$.

($\Rightarrow$) Supposons $\dim F_1 = \dim F_2 = k$.

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F_1 (k éléments).

Comme $F_1 \subset F_2$, $\mathcal{B}_1$ est une famille libre de F_2 comptant $k = \dim F_2$ éléments.

D'après le théorème 3.19, une famille libre de F_2 ayant $\dim F_2$ éléments est une base de F_2.

Donc $\mathcal{B}_1$ est aussi une base de F_2, ce qui implique $F_2 = \operatorname{Vect} \mathcal{B}_1 = F_1$.

Ainsi $F_1 = F_2$.

Théorème 3.20 : (*Partition d'une base*)

Soit B une base de $\mathbb{R}^m$ et soient B_1, B_2 des parties telles que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \varnothing$. Alors

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{Vect} \mathcal{B}_1 \oplus \operatorname{Vect} \mathcal{B}_2.$$

Réciproquement, si $\mathbb{R}^m = F_1 \oplus F_2$ et $\mathcal{B}_i$ est une base de F_i ($i = 1, 2$), alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^m$.

Définition 3.21 : (*Dimension et somme directe*)

Si $\mathbb{R}^m = F_1 \oplus F_2$, alors $m = \dim F_1 + \dim F_2$.

Propriété 3.22 : (*Formule de Grassmann*)

De façon plus générale,

$$\dim(F_1+F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)\,.$$

Remarque :

Tout ce que l'on a vu dans ces deux chapitres reste vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. On a alors affaire à des espaces vectoriels complexes, des s.e.v. de $\mathbb{C}^m$, etc.

3.4 Changement de base

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ de dimension k et soient $\mathcal{B} = (u_1,\dots,u_k)$ et $\mathcal{B}' = (v_1,\dots,v_k)$ deux bases de F.

Définition 3.23 : (*Matrice de passage*)

On appelle ***matrice de passage*** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \big((v_1)_{\mathcal{B}}\ (v_2)_{\mathcal{B}}\ \cdots\ (v_k)_{\mathcal{B}}\big).$$

C'est une matrice $k \times k$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 3.24 : (*Changement de base pour les composantes*)

Pour tout $x \in F$, on a

$$(x)_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,(x)_{\mathcal{B}'}\,.$$

Chapitre 4

Applications linéaires

Dans tout ce qui suit, E_i désigne un s.e.v. de $\mathbb{R}^{m_i}$ de dimension n_i.

4.1 Définition et exemples

Définition 4.1 : (*Application linéaire*)

On dit qu'une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est une ***application linéaire*** si et seulement si

i) Pour tous $x, y \in E_1$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

ii) Pour tout $x \in E_1$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

L'ensemble de toutes les applications linéaires de E_1 dans E_2 est noté $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Si $E_1 = E_2 = E$, on le note plus simplement $\mathcal{L}(E)$.

Propriété 4.2 : (*Image du vecteur nul*)

Toute application linéaire $f : E_1 \to E_2$ satisfait $f(0_{E_1}) =_{E_2}$.

Preuve :

Par linéarité,

$$f(0_{E_1}) = f(0_{E_1} + 0_{E_1}) = f(0_{E_1}) + f(0_{E_1})$$

En ajoutant $-f(0_{E_1})$ à chaque membre, on obtient :

$$\begin{aligned} & f(0_{E_1}) - f(0_{E_1}) = f(0_{E_1}) + f(0_{E_1}) - f(0_{E_1}) \\ \Longleftrightarrow \quad & 0_{E_2} = f(0_{E_1}) \end{aligned}$$

Exemple :

⊛ L'application nulle

$$f : \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

est linéaire car

$$\begin{aligned} f(x+y) &= 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= 0 \\ &= \lambda \times 0 \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

⊛ L'identité

$$\begin{aligned} \mathrm{id}\colon \quad E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

est linéaire car

$$\begin{aligned} \mathrm{id}(x+y) &= x+y \\ &= \mathrm{id}(x)+\mathrm{id}(y), \\ \mathrm{id}(\lambda x) &= \lambda x \\ &= \lambda\,\mathrm{id}(x). \end{aligned}$$

⊛ L'homothétie h_λ

$$\begin{aligned} h_\lambda\colon \quad E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

est linéaire car

$$\begin{aligned} h_\lambda(x+y) &= \lambda(x+y) \\ &= \lambda x+\lambda y \\ &= h_\lambda(x)+h_\lambda(y), \\ h_\lambda(\mu x) &= \lambda(\mu x) \\ &= \mu(\lambda x) \\ &= \mu\, h_\lambda(x). \end{aligned}$$

⊛ Si A est une matrice $m\times n$, alors $f(x)=Ax$

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

est linéaire car

$$\begin{aligned} f(x+y) &= A(x+y) \\ &= Ax+Ay \\ &= f(x)+f(y), \\ f(\lambda x) &= A(\lambda x) \\ &= \lambda Ax \\ &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

⊛ Si $\dim E_1 = k$ et $\mathcal{B}$ est une base de E_1, alors

$$\begin{aligned} f\colon \quad E_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto (x)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

est linéaire car

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)_{\mathcal{B}} \\ &= (x)_{\mathcal{B}}+(y)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x)+f(y),\\
f(\lambda x) &= (\lambda x)_{\mathcal{B}}\\
&= \lambda(x)_{\mathcal{B}}\\
&= \lambda f(x).
\end{aligned}
$$

⊛ La projection p

$$
\begin{array}{rccc}
p: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\
 & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y)
\end{array}
$$

est linéaire car

$$
\begin{aligned}
p\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) &= p(x+x',y+y',z+z')\\
&= (x+x',y+y')\\
&= (x,y)+(x',y')\\
&= p(x,y,z)+p(x',y',z'),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p\big(\lambda(x,y,z)\big) &= p(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\\
&= (\lambda x,\lambda y)\\
&= \lambda(x,y)\\
&= \lambda\, p(x,y,z).
\end{aligned}
$$

4.2 Isomorphismes

Définition 4.3 : (*Isomorphisme*)

Si f est une application linéaire bijective de E_1 dans E_2, on dit que c'est un ***isomorphisme*** entre E_1 et E_2.

S'il existe un isomorphisme entre E_1 et E_2, on note $E_1 \simeq E_2$, ce qui se lit « E_1 est isomorphe à E_2 ».

Propriété 4.4 : (*Isomorphisme réciproque*)

Si f est un isomorphisme entre E_1 et E_2, alors l'application réciproque f^{-1} est également linéaire de E_2 dans E_1, et c'est donc aussi un isomorphisme.

4.3 Noyau et image

Définition 4.5 : (*Noyau*)

Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire.

On appelle ***noyau*** de f l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = \left\{x \in E_1 \mid f(x) = 0\right\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Définition 4.6 : (*Image*)

Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire.

On appelle ***image*** de f l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \left\{y \in E_2 \mid \exists x \in E_1,\ y = f(x)\right\} = f(E_1).$$

Propriété 4.7 : (*Noyau et image sont des sous-espaces*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

- Le noyau $\operatorname{Ker} f$ est un s.e.v. de E_1.
- L'image $\operatorname{Im} f$ est un s.e.v. de E_2.

Preuve :

Montrons que $\operatorname{Ker} f$ est un s.e.v. de E_1.

- $f\left(0_{E_1}\right) =_{E_2}$ donc $_{E_1} \in \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{Ker} f$ est non vide.
- Si $u, v \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0$$

  donc $u + v \in \operatorname{Ker} f$.
- Si $u \in \operatorname{Ker} f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda \times 0 = 0$$

  donc $\lambda u \in \operatorname{Ker} f$.

Montrons que $\operatorname{Im} f$ est un s.e.v. de E_2.

- $f\left(0_{E_1}\right) =_{E_2}$ donc $_{E_2} \in \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Im} f$ est non vide.
- Si $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$, il existe $x_1, x_2 \in E_1$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, alors

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

  donc $y_1 + y_2 \in \operatorname{Im} f$.
- Si $y \in \operatorname{Im} f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $x \in E_1$ tel que $y = f(x)$, alors

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$$

  donc $\lambda y \in \operatorname{Im} f$.

Théorème 4.8 : (*Injectivité et surjectivité*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

- f est **injective** si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
- f est **surjective** si et seulement si $\operatorname{Im} f = E_2$.

Preuve :

Injectivité.

- ($\Rightarrow$) Supposons f injective. Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0 = f\left(0_{E_1}\right)$, donc $x = 0_{E_1}$ par injectivité. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0_{E_1}\}$.
- ($\Leftarrow$) Supposons $\operatorname{Ker} f = \{0_{E_1}\}$. Si $f(x) = f(y)$, alors $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, donc $x - y \in \operatorname{Ker} f$, d'où $x - y = 0_{E_1}$, soit $x = y$. Donc f est injective.

Surjectivité.

- ($\Rightarrow$) Si f est surjective, alors par définition $\operatorname{Im} f = E_2$.
- ($\Leftarrow$) Si $\operatorname{Im} f = E_2$, alors pour tout $y \in E_2$ il existe $x \in E_1$ tel que $y = f(x)$, donc f est surjective.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+y, y-z)$.

$\operatorname{Ker} f = \left\{(x,y,z) \mid x+y = 0 \text{ et } y - z = 0\right\} = \{(-t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, donc $\operatorname{Ker} f \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, donc f n'est pas injective.

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ car pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(a-b, b, 0) = (a,b)$; donc f est surjective.

4.4 Rang d'une application linéaire

Définition 4.9 : (*Rang*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

On appelle ***rang*** de f le nombre défini par

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Propriété 4.10 : (*Image d'une base*)

Si $\left(v_1, \ldots, v_{m_1}\right)$ est une base de E_1, alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(v_1), \ldots, f\left(v_{m_1}\right)\right) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg} f \leqslant \dim E_1.$$

Propriété 4.11 : (*Propriétés du rang*)

- $\operatorname{rg} f \leqslant \min(\dim E_1, \dim E_2)$.
- f est **surjective** si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E_2$.
- f est **injective** si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E_1$.

Corollaire 4.12 : (*Isomorphisme et dimension*)

Deux s.e.v. E_1 et E_2 sont isomorphes si et seulement si $\dim E_1 = \dim E_2$.

Remarque :

Il s'agit d'une nouvelle méthode pour calculer la dimension d'un s.e.v. : il suffit de montrer qu'il est isomorphe à un autre s.e.v. de dimension déjà connue.

Corollaire 4.13 : (*Image d'une base par isomorphisme*)

Si f est un isomorphisme de E_1 dans E_2, alors

① l'image de toute base de E_1 est une base de E_2 ;

② l'image de toute famille libre de E_1 est une famille libre de E_2 ;

③ l'image de toute famille génératrice de E_1 est une famille génératrice de E_2.

Remarque :

Il s'agit d'une nouvelle méthode pour construire une base d'un s.e.v. : il suffit de prendre l'image directe ou réciproque par un isomorphisme d'une base déjà connue d'un autre s.e.v.

4.5 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Théorème 4.14 : (*Matrice d'une application linéaire*)

Soient E_1, E_2 deux s.e.v. avec $\dim E_1 = n$ et $\dim E_2 = m$.

Soient $\mathcal{B}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2.

Pour toute application linéaire $f : E_1 \to E_2$, il existe une unique matrice A de taille $m \times n$ telle que

$$\big(f(x)\big)_{\mathcal{B}_2} = A\,(x)_{\mathcal{B}_1}.$$

La matrice A est la ***matrice de*** f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Preuve :

$\boxed{\textit{Existence.}}$ Soit $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$.

Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, le vecteur $f(v_j) \in E_2$ se décompose dans $\mathcal{B}_2$ de manière unique :

$$\big(f(v_j)\big)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Définissons A comme la matrice $m \times n$ dont la j-ième colonne est $(f(v_j))_{\mathcal{B}_2}$. Pour tout $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in E_1$, on a

$$\big(f(x)\big)_{\mathcal{B}_2} = \sum_{j=1}^{n} x_j \big(f(v_j)\big)_{\mathcal{B}_2} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\,(x)_{\mathcal{B}_1}.$$

Donc une telle matrice A existe.

$\boxed{\textit{Unicité.}}$ Si A et A' sont deux matrices vérifiant la condition, alors pour tout $x \in E_1$ on a

$$\left(A - A'\right)(x)_{\mathcal{B}_1} = 0.$$

En prenant $x = v_j$, on obtient

$$\left(A - A'\right) e_j = 0$$

où e_j est le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Donc la j-ième colonne de $A - A'$ est nulle.

Ainsi

$$A = A',$$

d'où l'unicité.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = \left(x + 2y, 3x - y, -x + y\right)$.

Munissons $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leurs bases canoniques.

On calcule d'abord les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,3,-1), \qquad f(e_2) = f(0,1) = (2,-1,1).$$

La matrice A de f dans les bases canoniques est la matrice 3×2 dont les colonnes sont les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour un vecteur $x = \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$, on vérifie bien la relation du théorème :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x - y \\ -x + y \end{pmatrix} = \left(f\left(x, y\right)\right)_{\mathcal{C}}.$$

Propriété 4.15 : (*Injectivité, surjectivité et matrice*)

Soient E_1, E_2 deux s.e.v., $\mathcal{B}_1$ une base de E_1, $\mathcal{B}_2$ une base de E_2, $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et A sa matrice dans ces bases. Alors

- f est **injective** si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes, si et seulement si A a une position de pivot par colonne.
- f est **surjective** si et seulement si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$, si et seulement si A a une position de pivot par ligne.

Propriété 4.16 : (*Dimension du noyau par la matrice*)

Soient E_1, E_2 deux s.e.v., $\mathcal{B}_1$ une base de E_1, $\mathcal{B}_2$ une base de E_2, $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et A sa matrice dans ces bases.

Si k est le nombre de variables libres (colonnes non-pivots) de A alors :

$$\dim \operatorname{Ker} f = k.$$

Propriété 4.17 : (*Base de l'image et rang par la matrice*)

Soient E_1, E_2 deux s.e.v., $\mathcal{B}_1$ une base de E_1, $\mathcal{B}_2$ une base de E_2, $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et A sa matrice dans ces bases.

- Les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ correspondant aux colonnes de pivots de A forment une base de $\operatorname{Im} f$.
- Soit ℓ le nombre de variables liées (essentielles) de A (c'est-à-dire le nombre de pivots). Alors

$$\operatorname{rg} f = \ell$$

Exemple :

Reprenons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

La matrice A est déjà échelonnée : les pivots sont aux colonnes 1 et 2.

- f est surjective ($\operatorname{rg} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$) mais pas injective ($\operatorname{Ker} f \neq \{\vec{0}\}$).
- A a 1 colonne non-pivot (colonne 3) $\Rightarrow k = 1$, donc $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.
- A a 2 pivots (colonnes 1 et 2) $\Rightarrow \ell = 2$, donc $\operatorname{rg} f = 2$.
- Les colonnes 1 et 2 sont les colonnes pivots $\Rightarrow \big(f(1,0,0), f(0,1,0)\big) = \big((1,0),(1,1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

4.6 Théorème du rang

Théorème 4.18 : (*Théorème du rang*)

Si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, alors

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E_1.$$

Preuve :

Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ une base de $\operatorname{Ker} f$ (où $k = \dim \operatorname{Ker} f$).

Complétons-la en une base $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ de E_1 (où $n = \dim E_1$).

Montrons que $\big(f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

i) **Famille génératrice :** Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in E_1$ tel que $y = f(x)$. Écrivons $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Alors

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(v_i),$$

car $f(v_i) = 0$ pour $i \leqslant k$.

Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\big)$.

ii) **Famille libre :** Supposons $\sum_{i=k+1}^n \beta_i f(v_i) = 0$.

Alors $f\big(\sum_{i=k+1}^n \beta_i v_i\big) = 0$,

donc $\sum_{i=k+1}^n \beta_i v_i \in \operatorname{Ker} f$.

Or tout élément de $\operatorname{Ker} f$ s'écrit $\sum_{i=1}^k \gamma_i v_i$.

Par unicité des coordonnées dans la base de E_1, on obtient $\beta_i = 0$ pour tout $i = k+1, \ldots, n$.

Ainsi $\dim \operatorname{Im} f = n - k$, c'est-à-dire $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E_1$.

Remarque :

Dans le théorème du rang, c'est la dimension de l'espace de départ E_1 qui compte.

La dimension de l'espace d'arrivée E_2 n'a aucune importance.

Chapitre 5

Algèbre matricielle

5.1 Notations et types de matrices

Définition 5.1 : (*Matrice $m \times n$*)

On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 2 & 7 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 0 & 6 & -5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 1 & -3 & 2 & 8 & -2 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

est une matrice de taille 4×9 avec des coefficients réels, donc $A \in \mathcal{M}_{4\times 9}(\mathbb{R})$.

Définition 5.2 : (*Matrice carrée*)

Lorsque $m = n$, on parle de ***matrice carrée*** et on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans une matrice carrée $A = \left(a_{ij}\right)$ de taille $n \times n$, les coefficients a_{ii} pour $i = 1, \dots, n$ forment la ***diagonale***.

Exemple :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée de taille 5×5, donc $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

Sa diagonale est $(2, 1, 2, 3, 5)$.

Dans une matrice carrée générique $A = (a_{ij})$ de taille $m \times m$, la diagonale est mise en évidence :

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \boxed{a_{mm}} \end{pmatrix} \qquad \text{diagonale : } \boxed{a_{11}}, \boxed{a_{22}}, \dots, \boxed{a_{mm}}.$$

Définition 5.3 : (*Matrice diagonale*)

Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ est appelée ***matrice diagonale***.

Exemple :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale 5×5.

Attention : une matrice diagonale est **toujours une matrice carrée**.

En général, une matrice diagonale s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Définition 5.4 : (*Matrice triangulaire supérieure*)

Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$ est appelée ***matrice triangulaire supérieure***.

Exemple :

$$T_s = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire supérieure 5×5.

Attention : une matrice triangulaire supérieure est **toujours une matrice carrée**.

En général, une matrice triangulaire supérieure s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Les matrices échelonnées sont triangulaires supérieures.

Définition 5.5 : (*Matrice triangulaire inférieure*)

Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$ est appelée ***matrice triangulaire inférieure***.

Exemple :

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire inférieure 5×5.

Attention : une matrice triangulaire inférieure est **toujours une matrice carrée**.

En général, une matrice triangulaire inférieure s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

5.2 Opérations linéaires sur les matrices

Définition 5.6 : (*Addition matricielle*)

On définit sur $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'***addition*** : pour tous $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, la matrice $A + B$ est donnée par

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n.$$

Définition 5.7 : (*Multiplication par un scalaire*)

On définit sur $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ la ***multiplication par un scalaire*** : pour tout $A = (a_{ij})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice λA est donnée par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n.$$

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 5.8 : (*$\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel*)

L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.9 : (*Matrice nulle*)

L'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

On l'appelle la ***matrice nulle*** et on la note ${}_{\mathcal{M}_{mn}}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on la note simplement 0 (à ne pas confondre avec le $0 \in \mathbb{R}$).

Propriété 5.10 : (*Dimension de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$*)

La dimension de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est mn.

En particulier, $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$.

Preuve :

La famille des matrices E_{kl} ($k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$) définies par

$$(E_{kl})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

forme une base de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, appelée **base canonique**.

Par exemple, dans $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette base contient mn matrices, donc $\dim \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) = mn$.

5.3 Transposée d'une matrice

Définition 5.11 : (*Matrice transposée*)

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, on définit sa ***matrice transposée*** $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ par

$$\left(A^T\right)_{ji} = a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La transposition échange le rôle des lignes et des colonnes.

Propriété 5.12 : (*Caractère isomorphe de la transposition*)

L'application $A \mapsto A^T$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$.

Propriété 5.13 : (*Involution de la transposition*)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, on a $\left(A^T\right)^T = A$.

5.4 Produit matriciel

Définition 5.14 : (*Produit de matrices*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Notons $b_1, b_2, \ldots, b_p \in \mathbb{R}^n$ les p colonnes de B.

On définit le ***produit*** AB comme la matrice $m \times p$ dont les colonnes sont

$$AB = \begin{pmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B :

$$A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$$

En particulier, le produit matriciel **n'est pas commutatif** en général :

dans la grande majorité des cas, BA n'est même pas défini ;

et même lorsque AB et BA sont tous deux définis, on a $AB \neq BA$ la plupart du temps.

Exemple :

① Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculons AB à l'aide de la définition :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-1) \times (-2) \\ 0 \times 1 + 3 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$Ab_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 + (-1) \times 5 \\ 0 \times 4 + 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$AB = (Ab_1 \;\; Ab_2) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi caculer par la même méthode BA et on trouve $BA = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -4 & 17 \end{pmatrix}$.

On remarque alors que $AB \neq BA$, ce qui illustre la non-commutativité.

② Soient $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les 5 colonnes de B sont

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Calculons chaque Ab_j :

$$Ab_1 = 2 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0-2 \\ 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Ab_2 = -1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+3+0 \\ 0+12+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$Ab_3 = 0 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-8 \\ 0+4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$Ab_4 = 3 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2-2 \\ 0-8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$Ab_5 = 1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-3) \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0+6 \\ 0+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$AB = (Ab_1 \;\; Ab_2 \;\; Ab_3 \;\; Ab_4 \;\; Ab_5) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & 5 & 9 \\ 1 & 12 & 8 & -7 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R}).$$

Propriété 5.15 : (*Action sur un vecteur*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$(AB)\,x = A\,(Bx)\,.$$

Preuve :

Notons $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}^n$ les colonnes de B.

Par définition du produit matriciel, $AB = \begin{pmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_p \end{pmatrix}$.

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\begin{aligned}(AB)\,x &= \begin{pmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= x_1\,(Ab_1) + \cdots + x_p\,(Ab_p) \\ &= A\left(x_1 b_1 + \cdots + x_p b_p\right) = A\,(Bx)\,.\end{aligned}$$

Théorème 5.16 : (*Propriétés algébriques du produit matriciel*)

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$. En supposant les produits définis, on a :

i) **Distributivité :** $(A + A')\,B = AB + A'B$ et $A\left(B + B'\right) = AB + AB'$.

ii) **Homogénéité :** $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B = A\,(\lambda B)$.

iii) **Associativité :** $(AB)\,C = A\,(BC)$.

iv) **Éléments neutres :** $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), \quad I_m A = A I_n = A$.

Propriété 5.17 : (*Coefficient général du produit*)

Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B = \left(b_{jk}\right) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Alors

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},$$

pour $i = 1, \dots, m$ et $k = 1, \dots, p$.

Remarque :

Le produit matriciel n'est pas commutatif, il y a plusieurs cas possible :

- AB peut être défini mais pas BA,
- AB et BA peuvent être définis mais de tailles différentes,
- AB et BA peuvent être définis et de même taille, mais en général $AB \neq BA$.

La multiplication des matrices n'étant pas commutative, on a en général

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &\neq A^2 + 2AB + B^2\end{aligned}$$

Propriété 5.18 : (*Transposée d'un produit*)

Si le produit AB est défini, alors le produit $B^T A^T$ est défini. De plus, on a :

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Remarque :

Règle pratique du calcul du produit matriciel :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \begin{pmatrix} \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = B \end{array} \\
A = & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \times & \times \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ \text{ligne } i \end{array} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = AB \\ (AB)_{ik} \end{array}
\end{array}$$

Le coefficient $(AB)_{ik}$ s'obtient en multipliant terme à terme la ligne i de A par la colonne k de B et en additionnant :

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

Deux erreurs grossières à éviter :

① Si $AB = AC$, on ne peut pas simplifier par A pour en déduire $B = C$. C'est faux en général.

② Si $AB = 0$, on ne peut pas en déduire que $A = 0$ ou $B = 0$. C'est faux en général.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais ni A ni B ne sont nulles.

5.5 Cas $m = n$: matrices inversibles

5.5.1 Puissances d'une matrice

Définition 5.19 : (*Puissances d'une matrice*)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$A^0 = I_n, \qquad A^{p+1} = A^p A = A A^p \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.5.2 Matrices inversibles

Définition 5.20 : (*Matrice inversible*)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***inversible*** s'il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AA' = A'A = I_n.$$

On note $A' = A^{-1}$.

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculons AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3+5\times(-1)+1\times 0 & 2\times 2+5\times(-1)+1\times 1 & 2\times(-7)+5\times 3+1\times(-1) \\ 1\times 3+3\times(-1)+2\times 0 & 1\times 2+3\times(-1)+2\times 1 & 1\times(-7)+3\times 3+2\times(-1) \\ 1\times 3+3\times(-1)+1\times 0 & 1\times 2+3\times(-1)+1\times 1 & 1\times(-7)+3\times 3+1\times(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Calculons BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2+2\times 1+(-7)\times 1 & 3\times 5+2\times 3+(-7)\times 3 & 3\times 1+2\times 2+(-7)\times 1 \\ (-1)\times 2+(-1)\times 1+3\times 1 & (-1)\times 5+(-1)\times 3+3\times 3 & (-1)\times 1+(-1)\times 2+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times 1+(-1)\times 1 & 0\times 5+1\times 3+(-1)\times 3 & 0\times 1+1\times 2+(-1)\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Donc $AB = BA = I_3$, ce qui prouve que A est inversible et que

$$A^{-1} = B.$$

Théorème 5.21 : (*Inverse d'un produit*)

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Définition 5.22 : (*Noyau d'une matrice*)

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\right\}$$

le noyau de l'application linéaire $x \mapsto Ax$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.23 : (*Rang d'une matrice*)

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(x \mapsto Ax)$$

le rang de l'application linéaire $x \mapsto Ax$. C'est aussi la dimension de l'espace engendré par ses colonnes, et c'est le nombre de pivots obtenus après réduction de A par la méthode de Gauss.

Propriété 5.24 : (*Caractérisation par le rang*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{rg}(A) = n, \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \end{aligned}$$

5.6 Lien avec les systèmes linéaires

Théorème 5.25 : (*Système linéaire et matrice inversible*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Le système $Ax = b$ admet une solution unique si et seulement si A est inversible.

Dans ce cas,

$$x = A^{-1}b.$$

Preuve :

$\boxed{\textit{Supposons } A \textit{ inversible.}}$ Alors A^{-1} existe. Multiplions $Ax = b$ à gauche par A^{-1} :

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\iff \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &\iff \quad \left(A^{-1}A\right)x = A^{-1}b \\ &\iff \quad x = A^{-1}b \end{aligned}$$

Le système admet donc une unique solution, donnée par $x = A^{-1}b$.

$\boxed{\textit{Réciproquement,}}$ supposons que $Ax = b$ admette une unique solution, notée x_0. Montrons que A est inversible.

D'après la propriété 5.24, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}(A)$, c'est-à-dire $Ay = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors

$$\begin{aligned} A\left(x_0 + y\right) &= Ax_0 + Ay \\ &= b + 0_{\mathbb{R}^n} \\ &= b \end{aligned}$$

donc $x_0 + y$ est aussi solution du système.

Par unicité de la solution, $x_0 + y = x_0$, d'où

$$\begin{aligned} x_0 + y = x_0 \quad &\iff \quad x_0 + y - x_0 = x_0 - x_0 \\ &\iff \quad y = 0_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ce qui prouve que A est inversible.

5.7 Lien avec les applications linéaires

Dans toute cette section, E_1, E_2 et E_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.26 : (*Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(E_1, E_2)$*)

L'ensemble $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ des applications linéaires de E_1 dans E_2 peut être muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire qui en font un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

$$\forall f \in \mathcal{L}(E_1, E_2),\ \forall g \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \quad \left(f+g\right)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(E_1, E_2),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left(\lambda f\right)(x) = \lambda f(x).$$

Théorème 5.27 : (*Matrice d'une somme, d'un produit et d'une composition*)

Soient E_1, E_2, E_3 munis de bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ respectivement.

① Soient $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $g \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si A et B sont les matrices de f et g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors la matrice de $f+g$ dans ces mêmes bases est $A+B$, et la matrice de λf est λA.

② Soient $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $g \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$.

Si f a pour matrice A dans $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, et g a pour matrice B dans $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$, alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ est BA.

Remarque :

La multiplication des matrices n'est que la traduction, dans des bases, de la composition des applications linéaires.

Exemple :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = \left(x+y, x, y\right)$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(u, v, w) = (u+v, v-w)$.

Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, les matrices de f et g sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculons $g \circ f$ directement :

$$g \circ f\left(x, y\right) = g\left(x+y, x, y\right) = \left(2x+y, x-y\right).$$

La matrice de $g \circ f$ dans la base canonique est donc $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculons le produit BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien la matrice de $g \circ f$, illustrant que le produit matriciel correspond à la composition des applications linéaires.

Propriété 5.28 : (*Inverse et application linéaire inversible*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1)$ et A sa matrice dans une base $\mathcal{B}_1$ de E_1.

Alors f est inversible si et seulement si A est inversible.

Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}_1$ est A^{-1}.

5.8 Changement de bases

5.8.1 Changement de bases pour les composantes

On a déjà vu le changement de bases pour les composantes d'un vecteur dans un même sous-espace vectoriel de dimension n (définition 3.23) :

$$(x)_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,(x)_{\mathcal{B}'}\,.$$

Propriété 5.29 : (*Inverse d'une matrice de passage*)

La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et

$$\left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

5.8.2 Changement de bases pour une application linéaire

Considérons maintenant le même problème pour une application linéaire et sa matrice dans plusieurs choix de bases.

Théorème 5.30 : (*Formule de changement de bases*)

Soit E_1 un s.e.v. muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$, et soit E_2 un s.e.v. muni de deux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Si A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, et A' sa matrice dans les bases $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$, alors

$$A' = P_{\mathcal{B}'_2\to\mathcal{B}_2}\, A\, P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}'_1}.$$

Corollaire 5.31 : (*Changement de bases pour un endomorphisme*)

Dans le cas particulier où $E_1 = E_2$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'_2$, si l'on pose $P = P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}'_1}$, la formule de changement de base devient

$$A' = P^{-1}AP.$$

5.9 Inversion par l'algorithme de Gauss-Jordan

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On cherche à déterminer $A^{-1} = \left(b_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que

$$AA^{-1} = I_n$$

Ceci revient à résoudre n systèmes linéaires de la forme

$$Ab_j = e_j$$

avec $j = 1, \dots, n$, où e_j est le j-ième vecteur de la base canonique.

On considère pour chaque j la matrice augmentée $\left(A \mid e_j\right)$:

$$\left(A \mid e_j\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right)$$

(où le 1 se trouve à la j-ième ligne de la dernière colonne).

Les n premières colonnes de ces matrices augmentées étant les mêmes pour tout j, on peut considérer une unique matrice augmentée :

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Définition 5.32 : (*Algorithme de Gauss-Jordan*)

On effectue des opérations élémentaires sur la matrice augmentée $(A \mid I_n)$ jusqu'à obtenir I_n dans le bloc de gauche :

$$(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{opérations élémentaires}} \left(I_n \mid A^{-1}\right).$$

Le bloc de droite est alors A^{-1}.

S'il est impossible d'obtenir I_n dans le bloc de gauche, A n'est pas inversible (on dit qu'elle est ***singulière***).

Exemple :

Inversons $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -2 & -6 \\ -1 & -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ par Gauss-Jordan.

On forme la matrice augmentée $(A \mid I_4)$ et on applique l'algorithme.

Étape 1 : on élimine sous le pivot (-3) dans la première colonne.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow (-3)L_3 - (-3)L_1 \\ L_4 \leftarrow (-3)L_4 - (-1)L_1}]{L_2 \leftarrow (-3)L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -11 & -8 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 18 & 21 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 17 & -14 & 7 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Étape 2 : on élimine sous le pivot (-10) dans la deuxième colonne.

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow(-10)L_4-17L_2]{L_3\leftarrow(-10)L_3-30L_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -11 & -8 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & -10 & -10 & -30 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -109 & -22 & -8 & -17 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Étape 3 : on élimine sous le pivot (-50) dans la troisième colonne.

$$\xrightarrow{L_4\leftarrow(-50)L_4-(-109)L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -11 & -8 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & -10 & -10 & -30 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 69 & 242 & 109 & -50 \end{array}\right)$$

Étape 4 : on normalise chaque pivot à 1.

$$\xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow-\frac{1}{10}L_2 \\ L_3\leftarrow-\frac{1}{50}L_3 \\ L_4\leftarrow-L_4}]{L_1\leftarrow-\frac{1}{3}L_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -69 & -242 & -109 & 50 \end{array}\right)$$

Étape 5 : on annule les coefficients au-dessus du pivot de la quatrième colonne.

$$\xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2-\frac{4}{5}L_4 \\ L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{5}L_4}]{L_1\leftarrow L_1+\frac{1}{3}L_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{70}{3} & -\frac{242}{3} & -\frac{109}{3} & \frac{50}{3} \\ 0 & 1 & \frac{11}{10} & 0 & \frac{277}{5} & \frac{1939}{10} & \frac{436}{5} & -40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 & 49 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -69 & -242 & -109 & 50 \end{array}\right)$$

Étape 6 : on annule au-dessus du pivot de la troisième colonne.

$$\xrightarrow[L_1\leftarrow L_1+\frac{4}{3}L_3]{L_2\leftarrow L_2-\frac{11}{10}L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{46}{3} & -7 & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 & 140 & 63 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 & 49 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -69 & -242 & -109 & 50 \end{array}\right)$$

Étape 7 : on annule au-dessus du pivot de la deuxième colonne.

$$\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+\frac{5}{3}L_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 62 & 218 & 98 & -45 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 & 140 & 63 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 & 49 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -69 & -242 & -109 & 50 \end{array}\right)$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 62 & 218 & 98 & -45 \\ 40 & 140 & 63 & -29 \\ 14 & 49 & 22 & -10 \\ -69 & -242 & -109 & 50 \end{pmatrix}$.

Soit $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ (on a $L_4 = L_1 + L_2 + L_3$). On applique Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{élimination}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -11 & -8 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & -10 & -10 & -30 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 & -50 \end{array}\right).$$

La quatrième ligne du bloc de gauche est nulle : il est impossible d'obtenir I_4.

Donc B n'est pas inversible (elle est singulière).

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On applique Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_3]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

La troisième et la quatrième lignes du bloc de gauche sont nulles : il est impossible d'obtenir I_4.

Donc C n'est pas inversible (elle est singulière).

Théorème 5.33 : (*Caractérisation des matrices inversibles*)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est inversible.

ii) Le système $AX = 0$ admet uniquement la solution triviale $X = 0$.

iii) Les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants (forment une base de $\mathbb{R}^n$).

iv) A est de rang n (plein rang).

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Les colonnes sont proportionnelles : $C_2 = 2C_1$, donc $\operatorname{rg}(A) = 1 < 2$. Donc A n'est pas inversible.

Le système $AX = 0$ admet des solutions non triviales, par exemple $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ car

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.10 Inverse et transposée

Propriété 5.34 : (*Inverse de la transposée*)

Si A est inversible, alors A^T est inversible et

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On vérifie $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Chapitre 6

Déterminants

Ce chapitre ne concerne que les matrices carrées. On travaillera dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.1 Définition et premières propriétés

Le déterminant est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui a de nombreuses propriétés importantes, mais dont l'existence est délicate. Nous allons admettre le théorème suivant.

Théorème 6.1 : (*Existence et unicité du déterminant*)

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, telle que

(i) Cette application soit linéaire par rapport à chaque vecteur-colonne, les autres étant fixés.

(ii) Si une matrice A a deux vecteurs colonnes égaux, alors son déterminant est nul.

(iii) Cette application de la matrice identité I_n vaut 1.

Définition 6.2 : (*Définition du déterminant*)

L'unique application donnée par le théorème 6.1 est appelée ***déterminant*** et on note

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Lorsque A est donnée par ses vecteurs colonnes $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, on utilise aussi la notation

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Une application satisfaisant la propriété (i) du théorème est appelée ***forme multilinéaire***.

Si elle satisfait (ii), on dit qu'elle est ***alternée***.

En résumé : le ***déterminant*** est donc la seule forme multilinéaire alternée dont l'image de I_n est 1.

6.2 Quelques propriétés

Propriété 6.3 : (*Échange de deux colonnes*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A' est la matrice obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A, alors $\det A' = -\det A$.

Propriété 6.4 : (*Opérations sur les colonnes*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A' est obtenue en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det A' = \det A$.

Preuve :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix}$ et soient $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$. On pose

$$A' = \left(a_1 \; \dots \; a_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j a_j \; \dots \; a_n\right).$$

Par linéarité du déterminant par rapport à la i-ème colonne, on obtient

$$\det A' = \det A + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \det\left(a_1 \; \dots \; a_j \; \dots \; a_j \; \dots \; a_n\right).$$

Dans la somme, chaque déterminant contient deux fois le même vecteur a_j (aux colonnes i et j), donc il est nul par la propriété (ii) du théorème 6.1.

Ainsi $\det A' = \det A$.

Corollaire 6.5 : (*Colonne combinaison linéaire*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres, alors $\det A = 0$.

6.3 Déterminants et matrices inversibles

Propriété 6.6 : (*Déterminant d'une matrice triangulaire*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est triangulaire supérieure ou inférieure, alors

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2 \times (-1) \times 5 = -10.$$

Théorème 6.7 : (*Caractérisation d'une matrice inversible par le déterminant*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Théorème 6.8 : (*Déterminant d'un produit*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Corollaire 6.9 : (*Déterminant de l'inverse*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est inversible, alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

Corollaire 6.10 : (*Déterminant de la transposée*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\det\left(A^T\right) = \det A.$$

Remarque :

Tout ce que l'on a dit sur les colonnes est donc vrai pour les lignes.

Définition 6.11 : (*Matrices semblables*)

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites ***semblables*** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$B = P^{-1} AP.$$

Autrement dit, A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes (voir la formule de changement de bases, théorème 5.30).

Corollaire 6.12 : (*Déterminant de matrices semblables*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A et B sont semblables, alors $\det A = \det B$.

Propriété 6.13 : (*Non-linéarité du déterminant*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

① $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général. Pour $A = I_2$, $B = -I_2$: $\det(A+B) = 0$, $\det A + \det B = 2$.

② $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ (et non $\lambda \det A$).

6.4 Cofacteurs et développements du déterminant

Définition 6.14 : (*Mineur et cofacteur*)

Soit A une matrice $n \times n$ et A_{ij} la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.

On appelle ***mineur*** de A relatif à a_{ij} le nombre

$$\Delta_{ij} = \det A_{ij}$$

On appelle ***cofacteur*** de A relatif à a_{ij} le nombre

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}.$$

Théorème 6.15 : (*Développement par rapport à la première ligne*)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\Delta_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j}.$$

Propriété 6.16 : (*Développement par rapport à une ligne ou une colonne*)

Pour toute ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

Pour toute colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

Exemple :

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, développons par la deuxième ligne :

$$\det A = 0\times C_{21} + 1\times C_{22} + 4\times C_{23} = 1\times(-1)^4 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 4\times(-1)^5 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (1-6) + 4\times(-1)\times(-4) = -5+16 = 11.$$

6.4.1 Matrice des cofacteurs et inverse

Définition 6.17 : (*Matrice des cofacteurs*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On introduit la ***matrice des cofacteurs*** de A, notée $\operatorname{cof} A = \left(c_{ij}\right)$,

avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

Il s'agit d'une matrice $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & (-1)^{1+n} \\ - & + & - & \cdots & (-1)^{2+n} \\ + & - & + & \cdots & (-1)^{3+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Noter la disposition en échiquier des signes $(-1)^{i+j}$, commençant par un $+$ au coin supérieur gauche.

Exemple :

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 6.18 : (*Matrice des cofacteurs et inverse*)

Pour toute matrice A,

$$A\,(\operatorname{cof} A)^T = (\operatorname{cof} A)^T\, A = (\det A)\, I_n.$$

En particulier, si A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(\operatorname{cof} A)^T.$$

Remarque :

Sauf pour $n = 2$, ou pour des matrices très particulières, ce n'est pas la bonne façon de calculer l'inverse. On utilise plutôt la méthode de Gauss.

6.4.2 Formule de Cramer

Théorème 6.19 : (*Formule de Cramer*)

Soit A une matrice inversible. L'unique solution du système $Ax = b$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det A},$$

où $A_i(b)$ est la matrice A dans laquelle on a remplacé la i-ème colonne par b.

Remarque :

Ce n'est pas la bonne façon de résoudre un système linéaire, sauf pour $n = 2$, à l'extrême rigueur $n = 3$, ou pour des matrices très particulières.

On utilise plutôt la méthode de Gauss dès que $n \geq 3$.

Chapitre 7

Réduction des matrices

7.1 Valeurs propres et vecteurs propres

7.1.1 Définition

Définition 7.1 : (*Valeur propre, vecteur propre*)

Soit $A \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé ***valeur propre*** de A s'il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

- Un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$ vérifiant $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ est appelé ***vecteur propre*** associé à la valeur propre λ.
- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le ***spectre*** de A, noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Remarque :

Un vecteur propre n'est jamais nul par définition.

En revanche, la valeur propre peut être nulle (cela signifie que A n'est pas inversible).

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

On a $Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$ et $Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3e_2$.

Donc 2 et 3 sont des valeurs propres, avec vecteurs propres e_1 et e_2.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $A\vec{x}$ est obtenu par rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

Aucun vecteur non nul n'est envoyé sur un multiple de lui-même : A n'admet aucune valeur propre réelle.

7.1.2 Polynôme caractéristique

La condition $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ s'écrit $(A - \lambda I_m)\vec{x} = \vec{0}$. Un vecteur propre non nul existe si et seulement si $A - \lambda I_m$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\det(A - \lambda I_m) = 0$.

Définition 7.2 : (*Polynôme caractéristique*)

Pour $A \in M_m(\mathbb{R})$, on appelle ***polynôme caractéristique*** de A le polynôme

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m).$$

C'est un polynôme de degré m en λ.

Propriété 7.3 : (*Valeurs propres et racines du polynôme caractéristique*)

Les valeurs propres de A sont exactement les racines réelles de χ_A.

Exemple :

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$.

Définition 7.4 : (*Multiplicité algébrique*)

Si λ_0 est une valeur propre de A, sa ***multiplicité algébrique*** est l'ordre de λ_0 en tant que racine de χ_A.

7.1.3 Sous-espace propre

Définition 7.5 : (*Sous-espace propre*)

Pour une valeur propre λ de A, l'ensemble

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_m) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; A\vec{x} = \lambda\vec{x}\right\}$$

est appelé le ***sous-espace propre*** associé à λ. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Propriété 7.6 : (*Propriétés des sous-espaces propres*)

① E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$, de dimension $1 \le \dim E_\lambda \le m_\lambda$ où m_λ est la multiplicité algébrique de λ.

② $\dim E_\lambda$ est appelée la ***multiplicité géométrique*** de λ.

③ Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

Exemple :

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 3$: $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Le noyau est $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, donc $E_3 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, de dimension 1.

Pour $\lambda = 1$: $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, donc $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, de dimension 1.

7.2 Diagonalisation

7.2.1 Définition et condition

Définition 7.7 : (*Matrice diagonalisable*)

Une matrice $A \in M_m(\mathbb{R})$ est dite ***diagonalisable*** s'il existe une matrice inversible $P \in M_m(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_m(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

On dit alors que P ***diagonalise*** A, et D est la forme diagonale de A.

Remarque :

Les colonnes de P sont des vecteurs propres de A, et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres correspondantes, dans le même ordre.

Théorème 7.8 : (*Condition de diagonalisabilité*)

Une matrice $A \in M_m(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à m :

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim E_\lambda = m.$$

Cela équivaut à :

1. le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ (toutes ses racines sont réelles) ;
2. pour chaque valeur propre λ, la multiplicité géométrique $\dim E_\lambda$ est égale à la multiplicité algébrique m_λ.

Corollaire 7.9 : (*Diagonalisation et valeurs propres distinctes*)

Si $A \in M_m(\mathbb{R})$ possède m valeurs propres réelles distinctes, alors A est diagonalisable.

7.2.2 Méthode de diagonalisation

Notation 7.10 : (*Algorithme de diagonalisation*)

Pour diagonaliser une matrice $A \in M_m(\mathbb{R})$:

① Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$.

② Déterminer les racines réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de χ_A (ce sont les valeurs propres).

③ Pour chaque λ_i, résoudre $(A - \lambda_i I_m)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ pour obtenir une base de E_{λ_i}.

④ Si $\sum \dim E_{\lambda_i} = m$, A est diagonalisable. Alors :

- ⊛ P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs des bases des E_{λ_i} ;
- ⊛ D est la matrice diagonale portant les valeurs propres λ_i dans l'ordre correspondant.

Exemple :

Diagonalisons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

① $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

② Valeurs propres : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

③ $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $\dim E_1 = 1$ et $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\dim E_3 = 1$.

④ $\dim E_1 + \dim E_3 = 2 = m$, donc A est diagonalisable.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On vérifie $A = PDP^{-1}$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$, donc $\lambda = 1$ est valeur propre double (multiplicité algébrique 2).

$A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\dim E_1 = 1 \neq 2$.

A n'est pas diagonalisable.

7.2.3 Puissances d'une matrice diagonalisable

Propriété 7.11 : (*Puissance d'une matrice diagonalisable*)

Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PD^kP^{-1} = P\operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k\right)P^{-1}.$$

Exemple :

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisée plus haut. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^k & -1+3^k \\ -1+3^k & 1+3^k \end{pmatrix}.$$