

Mathématiques 2012–2013

TD d'Analyse 1

Olivier BENOIS,

Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem,

Avenue de l'Université, BP.12,

F76801 Saint-Étienne-du-Rouvray.

Rédigé avec \LaTeX

par Hicham AMARIR

le 19 mai 2026

Table des matières

Fiche n°1 – Les nombres réels (première partie)	3
Corrigé de la fiche n°1 – Les nombres réels (première partie)	7
Fiche n°1 – Les nombres réels (deuxième partie)	34
Fiche n°2 – Les fonctions usuelles	36
Fiche n°3 – Suites numériques	38

Mémento :

- ⊛ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, ensemble des entiers naturels.
- ⊛ $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, ensemble des entiers relatifs.
- ⊛ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$, ensemble des nombres rationnels.
- ⊛ $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels.

Exercice 1.

Dans la suite, n et p désignent des entiers naturels non nuls. $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ et b_0, \dots, b_n, \dots sont des nombres réels.

- ① Expliciter :

$$\sum_{i=0}^{10} a_i, \sum_{j=2}^6 a_{j+1}, \sum_{k=3}^5 a_{k-1}, \prod_{i=0}^6 a_i, \prod_{k=1}^8 a_k$$

- ② Écrire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes :

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$$

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$n^2 + (n+1)^2 + \dots + (2n)^2$$

- ③ Déterminer les réels suivants, sachant que pour tout i , $a_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{10} a_i \quad \sum_{i=0}^{27} a_i \quad \sum_{i=1}^n a_i \quad \sum_{i=0}^n a_i \quad \sum_{i=p}^n a_i \quad \prod_{i=1}^n a_i \quad \prod_{i=0}^n a_i$$

- ④ Simplifier

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2 \quad \sum_{i=0}^n n \quad \sum_{i=1}^{n+1} n^2 \quad \prod_{i=1}^n n \quad \prod_{i=0}^{n+1} 3 \quad \prod_{i=1}^p 3 \quad \prod_{i=0}^n (2p^2) \quad \prod_{i=2}^n 4 \quad \prod_{i=4}^n (2p)$$

- ⑤ Donner une expression de chacune des sommes suivantes en fonction de n :

$$\sum_{i=1}^n i \quad \sum_{i=0}^n i^2 \quad \sum_{i=1}^n 2^i$$

- ⑥ Donner une expression de chacun des produits suivants en fonction de n :

$$\prod_{i=1}^n a_i \text{ puis de } \prod_{i=1}^n (a_i a_{i+1}) \text{ quand pour tout } i, a_i = i$$

$$\prod_{i=1}^n a_i \text{ quand pour tout } i, a_i = 2^i,$$

- ⑦ Vérifier que

$$\prod_{k=1}^n (6k-3) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

Pour une démonstration directe de cette formule, on pourra décomposer $(2n)!$ en deux produits : celui des termes pairs et celui des termes impairs.

⑧ Simplifier les expressions suivantes :

$$S = \sum_{i=3}^{n+1} a_{i-2} - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i+1}$$

$$T = \sum_{i=1}^n a_{i-1} + 2 \sum_{i=1}^n a_i - 3 \sum_{i=0}^{n-2} a_{i+1}$$

$$U = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$$V = 2 \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{i+1} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k-1} - \sum_{j=0}^{n+1} \sqrt{j}$$

$$W = \prod_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

Exercice 2.

① Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

(a) $4x^2 - 3x + 1 = 0$

(b) $-3x^2 - 2x + 1 = 0$

(c) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

(d) $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$

(e) $12x^4 + x^2 - 6 = 0$

② Résoudre dans \mathbb{R} chacune des inéquations suivantes :

(a) $2x^2 - 3x + 1 < 0$

(b) $2x^2 - 13x - 7 < 0$

(c) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

(d) $-2x^2 + 3x - 7 < 0$

(e) $15x^3 - 37x^2 + 10x + 8 \geq 0$

Exercice 3.

① On suppose que $x \in]-1, 3[$.

En déduire un encadrement de chaque fonction :

$$f_1(x) = 2x - 1 \quad f_2(x) = -3x + 4 \quad f_3(x) = x^2 \quad f_4(x) = (2x + 1)^2 - 3 \quad f_5(x) = x^3 \quad f_6(x) = \frac{1}{x + 2}$$

② Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $0 \leq -5x + 3 \leq 5$.

En déduire un encadrement de x .

③ On suppose que $x \in]-3, 2[$.

Si possible, majorer/minorer

$$g_1(x) = x^2 + 3 \quad g_2(x) = \frac{2x}{x + 4} \quad g_3(x) = \frac{-x + 1}{x - 3} \quad g_4(x) = \frac{x}{x - 1}$$

Exercice 4.

Démontrer les inégalités suivantes.

- ① $\forall (a, b) \in \mathbb{R}, \quad 2ab \leq a^2 + b^2.$
- ② $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b).$
- ③ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$
- ④ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad 4 \leq (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$
- ⑤ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$
- ⑥ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad 4ab \leq (a + b)^2.$
- ⑦ $\forall a \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$

Exercice 5.

Démontrer les inégalités suivantes.

- ① $\forall x \in]-\infty, 1[, \quad \frac{1}{1-x} > 1 + x.$
- ② $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sin x \leq x.$
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$
- ④ $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$

Exercice 6.

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes et dire, de la proposition ou de sa négation, laquelle est vraie.

- ① $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^2 - 1 > 0.$
- ② $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x = 0.$
- ③ $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 0.$
- ④ $\forall x \in]0, 1[, \quad \frac{1}{x} > x.$

Exercice 7.

Compléter les propositions suivantes par l'un des symboles \Rightarrow ou \Leftrightarrow de manière à ce qu'elles soient vraies.

- ① $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (0 < x < 1 \quad \dots \quad x^3 < x^2).$
- ② $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(0 < x < 1 \quad \dots \quad \frac{1}{x} > 1 \right).$
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (0 < x < 1 \quad \dots \quad x \geq x^2).$
- ④ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (0 < x < 1 \quad \dots \quad x - 1 < 0).$
- ⑤ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (0 < x < 1 \quad \dots \quad x^2 < 1).$

Exercice 8.

Soit n un entier naturel non nul et x_1, \dots, x_n des réels appartenant à $[0, 1]$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

Retrouver l'inégalité de l'exercice 4.(7).

Exercice 9.

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ des réels.

On considère le polynôme

$$P(X) = \sum_{i=0}^n (Xa_i + b_i)^2.$$

- ① Montrer que $P(X)$ peut se mettre sous la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, où a, b, c sont des réels à déterminer en fonction de $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$.
- ② Calculer le discriminant.
- ③ En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \times b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}.$$

- ④ En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\sum_{k=0}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}.$$

Exercice 10.

Soient $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ des réels, et soient $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$ des réels.

L'objectif de l'exercice est de démontrer l'inégalité de Tchebychev :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

- ① Montrer que $a_i b_i + a_j b_j \geq a_i b_j + a_j b_i$ pour tout couple (i, j) .
- ② Démontrer l'inégalité de Tchebychev.

Exercice 11.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n , et y_1, y_2, \dots, y_n des réels avec $y_i > 0$ pour tout i . On note $m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- ① Montrer que

$$m \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq M.$$

- ② En déduire que

$$\min_i \left(\frac{x_i}{y_i} \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq \max_i \left(\frac{x_i}{y_i} \right).$$

Exercice 1.

Dans la suite, n et p désignent des entiers naturels non nuls. $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ et b_0, \dots, b_n, \dots sont des nombres réels.

① Expliciter :

$$\sum_{i=0}^{10} a_i, \sum_{j=2}^6 a_{j+1}, \sum_{k=3}^5 a_{k-1}, \prod_{i=0}^6 a_i, \prod_{k=1}^8 a_k$$

② Écrire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes :

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$$

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$n^2 + (n+1)^2 + \dots + (2n)^2$$

③ Déterminer les réels suivants, sachant que pour tout $i, a_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{10} a_i \quad \sum_{i=0}^{27} a_i \quad \sum_{i=1}^n a_i \quad \sum_{i=0}^n a_i \quad \sum_{i=p}^n a_i \quad \prod_{i=1}^n a_i \quad \prod_{i=0}^n a_i$$

④ Simplifier

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2 \quad \sum_{i=0}^n n \quad \sum_{i=1}^{n+1} n^2 \quad \prod_{i=1}^n n \quad \prod_{i=0}^{n+1} 3 \quad \prod_{i=1}^p 3 \quad \prod_{i=0}^n (2p^2) \quad \prod_{i=2}^n 4 \quad \prod_{i=4}^n (2p)$$

⑤ Donner une expression de chacune des sommes suivantes en fonction de n :

$$\sum_{i=1}^n i \quad \sum_{i=0}^n i^2 \quad \sum_{i=1}^n 2^i$$

⑥ Donner une expression de chacun des produits suivants en fonction de n :

$$\prod_{i=1}^n a_i \text{ puis de } \prod_{i=1}^n (a_i a_{i+1}) \text{ quand pour tout } i, a_i = i$$

$$\prod_{i=1}^n a_i \text{ quand pour tout } i, a_i = 2^i,$$

⑦ Vérifier que

$$\prod_{k=1}^n (6k-3) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

Pour une démonstration directe de cette formule, on pourra décomposer $(2n)!$ en deux produits : celui des termes pairs et celui des termes impairs.

⑧ Simplifier les expressions suivantes :

$$S = \sum_{i=3}^{n+1} a_{i-2} - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i+1}$$

$$T = \sum_{i=1}^n a_{i-1} + 2 \sum_{i=1}^n a_i - 3 \sum_{i=0}^{n-2} a_{i+1}$$

$$U = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$$V = 2 \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{i+1} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k-1} - \sum_{j=0}^{n+1} \sqrt{j}$$

$$W = \prod_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

Correction de l'exercice 1.

① Expliciter les sommes et produits :

$$\sum_{i=0}^{10} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$\sum_{j=2}^6 a_{j+1} = a_{2+1} + a_{3+1} + a_{4+1} + a_{5+1} + a_{6+1}$$

$$= a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

$$\sum_{k=3}^5 a_{k-1} = a_{3-1} + a_{4-1} + a_{5-1}$$

$$= a_2 + a_3 + a_4$$

$$\prod_{i=0}^6 a_i = a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6$$

$$\prod_{k=1}^8 a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 \times a_7 \times a_8$$

② Écrire à l'aide du symbole Σ :

- ⊙ $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$: les indices vont de n (premier terme) à 1 (dernier terme).

On peut réécrire dans l'ordre croissant :

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k$$

- ⊙ $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$: on observe que dans chaque terme, la somme des indices de a et b vaut n .

Si l'indice de a est k (de 0 à n), alors l'indice de b est $n - k$.

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

- ⊙ $n^2 + (n+1)^2 + \dots + (2n)^2$: le premier terme correspond à $k=0$ (car $n+0=n$), le dernier à $k=n$ (car $n+n=2n$).

Chaque terme est de la forme $(n+k)^2$.

$$n^2 + (n+1)^2 + \dots + (2n)^2 = \sum_{k=0}^n (n+k)^2$$

③ Si $\forall i, a_i = 1$ alors :

Quand tous les termes valent 1, la somme $\sum_{i=m}^p 1$ vaut le nombre de termes, c'est-à-dire $p - m + 1$.

Le produit $\prod_{i=m}^p 1$ vaut toujours 1.

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 10$$

$$\sum_{i=0}^{27} a_i = \sum_{i=0}^{27} 1$$

$$= 27 - 0 + 1$$

$$= 28$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n 1$$

$$= n - 1 + 1$$

$$= n$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i &= \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=p}^n a_i &= \sum_{i=p}^n 1 & \prod_{i=1}^n a_i &= \prod_{i=1}^n 1 & \prod_{i=0}^n a_i &= \prod_{i=0}^n 1 \\ &= n - 0 + 1 & &= n - p + 1 & &= 1 & &= 1 \\ &= n + 1 & & & & & & \end{aligned}$$

④ Simplifier :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} 2 &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} 1 & \sum_{i=0}^n n &= n \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=1}^{n+1} n^2 &= n^2 \sum_{i=1}^{n+1} 1 \\ &= 2(n-1-1+1) & &= n(n-0+1) & &= n^2((n+1)-1+1) \\ &= 2(n-1) & &= n(n+1) & &= n^2(n+1) \\ \prod_{i=1}^n n &= n^n & \prod_{i=0}^{n+1} 3 &= 3^{n+2} & \prod_{i=1}^p 3 &= 3^p \\ \prod_{i=0}^n (2p^2) &= (2p^2)^{n+1} & \prod_{i=2}^n 4 &= 4^{n-1} & \prod_{i=4}^n (2p) &= (2p)^{n-3} \end{aligned}$$

⑤ Expressions en fonction de n :

Calcul de $\sum_{i=1}^n i$:

Méthode historique : Cette astuce est attribuée à Carl Friedrich Gauß qui, à l'âge de 7 ans, aurait résolu instantanément la somme des entiers, demandé en classe par son professeur, de 1 à 100 en remarquant la symétrie suivante.

On écrit cette somme dans les deux sens et on additionne terme à terme les deux égalités :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ \sum_{i=1}^n i &= n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2 \sum_{i=1}^n i &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ fois le terme } (n+1)} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n i &= n(n+1) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Méthode alternative (manipulation algébrique des sommes) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= \frac{2}{2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n (n+1-j) \right) \quad (\text{on compte à l'envers, de } n \text{ jusqu'à } 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i+n+1-i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n+1) \\ &= \frac{1}{2} \times n \times (n+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

Calcul de $\sum_{i=0}^n i^2$:

On utilise l'identité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, valable pour tout $k \in \mathbb{N}$. On somme cette égalité pour k allant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^n [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

Le membre de gauche est une somme télescopique. En développant les premiers et derniers termes, on voit les simplifications :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n [(k+1)^3 - k^3] &= (1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \dots + (n^3 - (n-1)^3) + ((n+1)^3 - n^3) \\ &= \cancel{1^3} - 0^3 + \cancel{2^3} - \cancel{1^3} + \cancel{3^3} - \cancel{2^3} + \dots + \cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3} + (n+1)^3 - \cancel{n^3} \\ &= (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3 \end{aligned}$$

Le membre de droite se décompose :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1) &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \end{aligned}$$

On égalise les deux membres :

$$(n+1)^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

On isole $3 \sum_{k=0}^n k^2$:

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=0}^n k^2 &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= (n+1) \left((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1 \right) \\ &= (n+1) \left(n^2 + 2n + 1 - \frac{3n}{2} - 1 \right) \\ &= (n+1) \left(n^2 + \frac{n}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

Finalement, en divisant par 3 chaque membre on obtient :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Méthode alternative (par télescopage avec $(k-1)^3$) :

Pour $\sum_{i=0}^n i^2$, il existe plusieurs astuces.

L'une d'elles consiste à utiliser le télescopage et le résultat précédent $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

On part de l'identité :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^3 \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^3 \end{aligned}$$

En développant $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^{n+1} (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 - 3 \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=1}^{n+1} 1\end{aligned}$$

On décompose $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^n k^3$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^n k^3 - 3 \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + 3 \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1)$$

Les termes $\sum_{k=1}^n k^3$ se simplifient de chaque membre :

$$0 = (n+1)^3 - 3 \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + 3 \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1)$$

On isole $3 \sum_{k=1}^{n+1} k^2$:

$$\begin{aligned}3 \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^3 + 3 \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) \\ &= (n+1) \left((n+1)^2 + \frac{3(n+2)}{2} - 1 \right) \\ &= (n+1) \left(n^2 + 2n + 1 + \frac{3n+6-2}{2} \right) \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 4n + 2 + 3n + 4}{2} \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, en divisant par 3 chaque membre de l'égalité, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

En remplaçant $n+1$ par n , on retrouve :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Calcul de $\sum_{i=1}^n 2^i$:

$$\sum_{i=1}^n 2^i = 2 + 2^2 + \dots + 2^n$$

On multiplie la somme par 2 :

$$\begin{aligned}2 \sum_{i=1}^n 2^i &= \sum_{i=1}^n 2^{i+1} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} 2^k \quad (\text{changement d'indice } k = i + 1)\end{aligned}$$

On soustrait membre à membre :

$$2 \sum_{i=1}^n 2^i - \sum_{i=1}^n 2^i = \sum_{k=2}^{n+1} 2^k - \sum_{i=1}^n 2^i$$

$$\begin{aligned}
\iff \sum_{i=1}^n 2^i &= \sum_{k=2}^n 2^k + 2^{n+1} - 2^1 - \sum_{i=2}^n 2^i \\
&= \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{i=1}^n 2^i + 2^{n+1} - 2^1 \\
&= +2^{n+1} - 2 \\
&= 2^{n+1} - 2
\end{aligned}$$

(Tous les termes intermédiaires se simplifient.) D'où $\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2$.

Méthode alternative (suite géométrique) :

Pour $\sum_{i=1}^n 2^i$, on peut aussi utiliser la formule de la somme d'une suite géométrique.

La suite $(2^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$. Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n 2^i &= -2^0 + \sum_{i=0}^n 2^i \\
&= -1 + \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\
&= -1 + \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} \\
&= -1 + 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+1} - 2
\end{aligned}$$

⑥ Produits en fonction de n :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n a_i &= \prod_{i=1}^n i \\
&= n!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n (a_i a_{i+1}) &= \prod_{i=1}^n i(i+1) \\
&= \prod_{i=1}^n i \times \prod_{i=1}^n (i+1) \\
&= n!(n+1)!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n a_i &= \prod_{i=1}^n 2^i \\
&= 2^{\sum_{i=1}^n i} \\
&= 2^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

⑦ Vérification :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^n (6k-3) &= \prod_{k=1}^n 3(2k-1) \\
&= \prod_{k=1}^n 3 \times \prod_{k=1}^n (2k-1) \\
&= 3^n \prod_{k=1}^n (2k-1)
\end{aligned}$$

Or, on a la décomposition :

$$\begin{aligned}
(2n)! &= \prod_{k=1}^{2n} k \\
&= \left(\prod_{k=1}^n 2k \right) \times \left(\prod_{k=1}^n (2k-1) \right) \\
&= 2^n n! \times \prod_{k=1}^n (2k-1)
\end{aligned}$$

En divisant chaque membre par $2^n n!$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

En reprenant le calcul et en remplaçant $\prod_{k=1}^n (2k-1)$ par $\frac{(2n)!}{2^n n!}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (6k-3) &= 3^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \\ &= 3^n \times \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} \end{aligned}$$

Méthode alternative (en partant du résultat) :

On peut aussi vérifier l'égalité en développant le membre de droite :

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} &= \prod_{k=1}^n \frac{3}{2} \times \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k} \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{3}{2} \times \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \times \prod_{k=1}^n 2k \times \prod_{k=1}^n (2k-1) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{k} \times 2k \times (2k-1) \right) \\ &= \prod_{k=1}^n (3 \times (2k-1)) \\ &= \prod_{k=1}^n (6k-3) \end{aligned}$$

⑧ Simplifications :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=3}^{n+1} a_{i-2} - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i+1} \\ &= \sum_{i=3-2}^{n+1-2} a_{i-2+2} - \sum_{i=1+1}^{n-2+1} a_{i+1-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=2}^{n-1} a_i \\ &= a_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i - \sum_{i=2}^{n-1} a_i \\ &= a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n a_{i-1} + 2 \sum_{i=1}^n a_i - 3 \sum_{i=0}^{n-2} a_{i+1} \\ &= \sum_{i=1-1}^{n-1} a_{i-1+1} + 2 \sum_{i=1}^n a_i - 3 \sum_{i=0+1}^{n-2+1} a_{i+1-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i + 2 \sum_{i=1}^n a_i - 3 \sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i + 2a_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i - 3 \sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ &= a_0 + 2a_n + (1+2-3) \sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ &= a_0 + 2a_n \end{aligned}$$

Donc $f_2(x) \in]-5, 7[$.

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{k=1+1}^{n+1} \frac{1}{k+1-1} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= 2 \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{i+1} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k-1} - \sum_{j=0}^{n+1} \sqrt{j} \\
&= 2 \sum_{i=2+1}^{n-1+1} \sqrt{i+1-1} - \sum_{k=1-1}^{n-1} \sqrt{k-1+1} - \sum_{j=0}^{n+1} \sqrt{j} \\
&= 2 \sum_{i=3}^n \sqrt{i} - \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{i} - \sum_{i=0}^{n+1} \sqrt{i} \\
&= 2\sqrt{n} + 2 \sum_{i=3}^{n-1} \sqrt{i} - \sqrt{0} - \sqrt{1} - \sqrt{2} - \sum_{i=3}^{n-1} \sqrt{i} \\
&\quad - \sqrt{0} - \sqrt{1} - \sqrt{2} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sum_{i=3}^{n-1} \sqrt{i} \\
&= \sqrt{n} - \sqrt{n+1} - 2\sqrt{0} - 2\sqrt{1} - 2\sqrt{2} + (2-1-1) \sum_{i=3}^{n-1} \sqrt{i} \\
&= \sqrt{n} - \sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W &= \prod_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} \\
&= \prod_{i=1}^n a_{i+1} \times \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\
&= \prod_{i=2}^{n+1} a_i \times \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\
&= a_{n+1} \times \prod_{i=2}^n a_i \times \frac{1}{a_1} \times \prod_{i=2}^n \frac{1}{a_i} \\
&= a_{n+1} \times \frac{1}{a_1} \times \prod_{i=2}^n \frac{a_i}{a_i} \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_1} \times 1^{n-1} \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_1}
\end{aligned}$$

Exercice 2.

① Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

- (a) $4x^2 - 3x + 1 = 0$
- (b) $-3x^2 - 2x + 1 = 0$
- (c) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
- (d) $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$
- (e) $12x^4 + x^2 - 6 = 0$

② Résoudre dans \mathbb{R} chacune des inéquations suivantes :

- (a) $2x^2 - 3x + 1 < 0$
- (b) $2x^2 - 13x - 7 < 0$
- (c) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
- (d) $-2x^2 + 3x - 7 < 0$
- (e) $15x^3 - 37x^2 + 10x + 8 \geq 0$

Correction de l'exercice 2.

① Équations :

① **Équation :** $4x^2 - 3x + 1 = 0$

Le discriminant Δ de $4x^2 - 3x + 1$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times 4 \times 1 \\ &= 9 - 16 \\ &= -7\end{aligned}$$

Donc $\Delta < 0$, on en déduit que $4x^2 - 3x + 1$ ne possède pas de racine.

Donc l'équation $4x^2 - 3x + 1 = 0$ n'a pas de solution et donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

② **Équation :** $-3x^2 - 2x + 1 = 0$

Le discriminant Δ de $-3x^2 - 2x + 1$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times (-3) \times 1 \\ &= 4 + 12 \\ &= 16\end{aligned}$$

Donc $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times (-3)} & x_2 &= \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times (-3)} \\ &= \frac{2 - 4}{-6} & &= \frac{2 + 4}{-6} \\ &= \frac{-2}{-6} & &= \frac{6}{-6} \\ &= \frac{1}{3} & &= -1\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -1, \frac{1}{3} \right\}$$

③ **Équation :** $2x^2 + 7x + 3 = 0$

Le discriminant Δ de $2x^2 + 7x + 3$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 7^2 - 4 \times 2 \times 3 \\ &= 49 - 24 \\ &= 25\end{aligned}$$

Donc $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-7 - \sqrt{25}}{2 \times 2} & x_2 &= \frac{-7 + \sqrt{25}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-7 - 5}{4} & &= \frac{-7 + 5}{4} \\ &= \frac{-12}{4} & &= \frac{-2}{4} \\ &= -3 & &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -3, -\frac{1}{2} \right\}$$

④ **Équation :** $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$

On remarque que $x = 1$ est racine évidente car $2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 8 \times 1 + 3 = 0$.

Donc on factorise par $(x - 1)$. On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

En développant le membre de droite puis en identifiant les coefficients de chaque puissance de x , on obtient :

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient le système suivant qu'on résout par équivalence :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = 3 \\ c - b = -8 \\ -c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 + a \\ c = -8 + b \\ c = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 + 2 \\ c = -8 + b \\ c = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -8 + 5 \\ c = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -3 \\ c = -3 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x - 1)(2x^2 + 5x - 3)$$

Réolvons $2x^2 + 5x - 3 = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) \\ &= 25 + 24 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Comme $\Delta = 49 > 0$, le trinôme $2x^2 + 5x - 3$ admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} & x_2 &= \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-5 - 7}{4} & &= \frac{-5 + 7}{4} \\ &= \frac{-12}{4} & &= \frac{2}{4} \\ &= -3 & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -3, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

(Rappel : 1 est une racine évidente trouvée au début.)

③ **Équation :** $12x^4 + x^2 - 6 = 0$

On pose $X = x^2$. Comme $x \in \mathbb{R}$, on a $X \geq 0$.

L'équation devient une équation du second degré en X :

$$12X^2 + X - 6 = 0$$

Le discriminant Δ de $12X^2 + X - 6$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4 \times 12 \times (-6) \\ &= 1 + 288 \\ &= 289 = 17^2 \end{aligned}$$

Comme $\Delta = 289 > 0$, l'équation admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-1 - 17}{2 \times 12} & X_2 &= \frac{-1 + 17}{2 \times 12} \\ &= \frac{-18}{24} & &= \frac{16}{24} \\ &= -\frac{3}{4} & &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On a $X_1 = -\frac{3}{4} < 0$, donc cette racine est rejetée car $X \geq 0$.

On retient $X_2 = \frac{2}{3} > 0$, ce qui donne $x^2 = \frac{2}{3}$, soit :

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

② Inéquations :

① **Inéquation :** $2x^2 - 3x + 1 < 0$

Le discriminant Δ de $2x^2 - 3x + 1$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 \\ &= 9 - 8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} & x_2 &= \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} \\ &= \frac{3 - 1}{4} & &= \frac{3 + 1}{4} \\ &= \frac{2}{4} & &= \frac{4}{4} \\ &= \frac{1}{2} & &= 1 \end{aligned}$$

Le coefficient dominant $a = 2 > 0$, donc le polynôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

On cherche $2x^2 - 3x + 1 < 0$, donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est l'ensemble des nombres entre les racines :

$$\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$$

Méthode alternative (tableau de signes par factorisation) :

On factorise le polynôme à l'aide de ses racines $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$:

$$2x^2 - 3x + 1 < 0 \iff 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) < 0$$

On étudie le signe de chaque facteur dans un tableau :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2\left(x - \frac{1}{2}\right)$		-	0	+	
$x - 1$		-	0	+	
$2x^2 - 3x + 1$	+	0	-	0	+

On lit que le produit est strictement négatif sur $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$, ce qui confirme le résultat précédent.

$$\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$$

ⓑ **Inéquation :** $2x^2 - 13x - 7 < 0$

Le discriminant Δ de $2x^2 - 13x - 7$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-13)^2 - 4 \times 2 \times (-7) \\ &= 169 + 56 \\ &= 225 = 15^2 \end{aligned}$$

Donc $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-13) - \sqrt{225}}{2 \times 2} & x_2 &= \frac{-(-13) + \sqrt{225}}{2 \times 2} \\ &= \frac{13 - 15}{4} & &= \frac{13 + 15}{4} \\ &= \frac{-2}{4} & &= \frac{28}{4} \\ &= -\frac{1}{2} & &= 7 \end{aligned}$$

Le coefficient dominant $a = 2 > 0$, donc le polynôme est négatif entre les racines.

Donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{1}{2}, 7 \right[$$

Méthode alternative (tableau de signes par factorisation) :

On factorise le polynôme à l'aide de ses racines $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 7$:

$$2x^2 - 13x - 7 < 0 \iff 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 7) < 0$$

On étudie le signe de chaque facteur dans un tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	7	$+\infty$
$2(x + \frac{1}{2})$		- 0	+	
$x - 7$		-	0	+
$2x^2 - 13x - 7$		+ 0	- 0	+

On lit que le produit est strictement négatif sur $]-\frac{1}{2}, 7[$, ce qui confirme le résultat précédent.

© **Inéquation** : $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Le discriminant Δ de $x^2 - 3x + 2$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 9 - 8 \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} & x_2 &= \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} \\ &= \frac{3 - 1}{2} & &= \frac{3 + 1}{2} \\ &= \frac{2}{2} & &= \frac{4}{2} \\ &= 1 & &= 2\end{aligned}$$

Le coefficient dominant $a = 1 > 0$, donc le polynôme est positif à l'extérieur des racines.

On cherche $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

Méthode alternative (tableau de signes par factorisation) :

On factorise le polynôme à l'aide de ses racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff (x - 1)(x - 2) \geq 0$$

On étudie le signe de chaque facteur dans un tableau :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x - 1$		- 0	+	
$x - 2$		-	0	+
$x^2 - 3x + 2$		+ 0	- 0	+

On lit que le produit est positif ou nul sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$, ce qui confirme le résultat précédent.

$$\mathcal{S} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

④ **Inéquation :** $-2x^2 + 3x - 7 < 0$ Le discriminant Δ de $-2x^2 + 3x - 7$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4 \times (-2) \times (-7) \\ &= 9 - 56 \\ &= -47\end{aligned}$$

Donc $\Delta < 0$, le polynôme n'admet pas de racine réelle.

Le coefficient dominant $a = -2 < 0$, donc le polynôme est toujours négatif sur \mathbb{R} .

Donc l'inéquation $-2x^2 + 3x - 7 < 0$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, et l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

Méthode alternative (tableau de signes) :

Le polynôme $P(x) = -2x^2 + 3x - 7$ a un discriminant $\Delta = -47 < 0$ et un coefficient dominant $a = -2 < 0$.

Donc $P(x)$ est toujours du signe de a , c'est-à-dire strictement négatif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le tableau de signes de $P(x)$ est :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $-2x^2 + 3x - 7$	-	

On lit que $-2x^2 + 3x - 7 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui confirme le résultat précédent.

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

⑤ **Inéquation :** $15x^3 - 37x^2 + 10x + 8 \geq 0$

On teste les valeurs entières simples :

$$\begin{array}{ll} P(1) = 15 \times 1^3 - 37 \times 1^2 + 10 \times 1 + 8 & P(2) = 15 \times 2^3 - 37 \times 2^2 + 10 \times 2 + 8 \\ = 15 - 37 + 10 + 8 & = 120 - 148 + 20 + 8 \\ = -4 \neq 0 & = 0 \end{array}$$

Donc $x = 2$ est une racine évidente. On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}15x^3 - 37x^2 + 10x + 8 &= (x - 2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient le système suivant qu'on résout par équivalence :

$$\begin{cases} a = 15 \\ b - 2a = -37 \\ c - 2b = 10 \\ -2c = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 15 \\ b = -37 + 2a \\ c = 10 + 2b \\ c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 15 \\ b = -37 + 2 \times 15 \\ c = 10 + 2b \\ c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 15 \\ b = -7 \\ c = 10 + 2 \times (-7) \\ c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 15 \\ b = -7 \\ c = -4 \\ c = -4 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$15x^3 - 37x^2 + 10x + 8 = (x-2)(15x^2 - 7x - 4)$$

Réolvons $15x^2 - 7x - 4 = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-7)^2 - 4 \times 15 \times (-4) \\ &= 49 + 240 \\ &= 289 = 17^2 \end{aligned}$$

Comme $\Delta = 289 > 0$, le trinôme $15x^2 - 7x - 4$ admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-7) - \sqrt{289}}{2 \times 15} & x_2 &= \frac{-(-7) + \sqrt{289}}{2 \times 15} \\ &= \frac{7 - 17}{30} & &= \frac{7 + 17}{30} \\ &= \frac{-10}{30} & &= \frac{24}{30} \\ &= -\frac{1}{3} & &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

On en déduit la factorisation complète du polynôme :

$$15x^3 - 37x^2 + 10x + 8 = 15 \left(x + \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{4}{5}\right) (x-2)$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$	2	$+\infty$		
$15\left(x + \frac{1}{3}\right)$	-	0		+			
$x - \frac{4}{5}$		-	0	+			
$x - 2$			-	0	+		
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right] \cup [2, +\infty[$$

Exercice 3.

- ① On suppose que $x \in]-1, 3[$.

En déduire un encadrement de chaque fonction :

$$f_1(x) = 2x - 1 \quad f_2(x) = -3x + 4 \quad f_3(x) = x^2 \quad f_4(x) = (2x + 1)^2 - 3 \quad f_5(x) = x^3 \quad f_6(x) = \frac{1}{x + 2}$$

- ② Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $0 \leq -5x + 3 \leq 5$.

En déduire un encadrement de x .

- ③ On suppose que $x \in]-3, 2[$.

Si possible, majorer et minorer les fonctions suivantes :

$$g_1(x) = x^2 + 3 \quad g_2(x) = \frac{2x}{x + 4} \quad g_3(x) = \frac{-x + 1}{x - 3} \quad g_4(x) = \frac{x}{x - 1}$$

Correction de l'exercice 3.**Remarque :**

Deux règles fondamentales pour manipuler les inégalités :

- ⊛ Multiplier ou diviser chaque membre par une quantité négative change le sens de l'inégalité.
- ⊛ Appliquer une fonction à chaque membre change le sens de l'inégalité dans les intervalles où la fonction est décroissante.

- ① $x \in]-1, 3[$:

⊛ $f_1(x) = 2x - 1$:

$$\begin{aligned} x \in]-1, 3[&\iff -1 < x < 3 \\ &\iff -2 < 2x < 6 \\ &\iff -3 < 2x - 1 < 5 \\ &\iff -3 < f_1(x) < 5 \end{aligned}$$

Donc $f_1(x) \in]-3, 5[$.

⊛ $f_2(x) = -3x + 4$:

$$\begin{aligned} x \in]-1, 3[&\iff -1 < x < 3 \\ &\iff 3 > -3x > -9 \\ &\iff 7 > -3x + 4 > -5 \\ &\iff -5 < f_2(x) < 7 \end{aligned}$$

Donc $f_2(x) \in]-5, 7[$.

$$\textcircled{*} f_3(x) = x^2 :$$

$$x \in]-1, 3[\iff -1 < x < 3$$

On prépare l'application de la fonction carrée sur ses intervalles de variations monotone :

$$\iff -1 < x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq x < 3$$

On applique la fonction carré : sur $] -1, 0[$ elle est décroissante donc le sens de l'inégalité change, et sur $[0, 3[$ elle est croissante donc le sens est conservé.

$$\iff (-1)^2 > x^2 > 0^2 \quad \text{ou} \quad 0^2 \leq x^2 < 3^2$$

$$\iff 1 > x^2 > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq x^2 < 9$$

$$\iff x^2 \in]0, 1[\cup [0, 9[$$

$$\iff x^2 \in [0, 9[$$

$$\iff 0 \leq x^2 < 9$$

$$\iff 0 \leq f_3(x) < 9$$

Donc $f_3(x) \in [0, 9[$.

$$\textcircled{*} f_4(x) = (2x+1)^2 - 3 :$$

$$x \in]-1, 3[\iff -1 < x < 3$$

$$\iff -2 < 2x < 6$$

$$\iff -1 < 2x+1 < 7$$

On prépare l'application de la fonction carrée sur ses intervalles de variations monotone :

$$\iff -1 < 2x+1 < 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq 2x+1 < 7$$

On applique la fonction carré : sur $] -1, 0[$ elle est décroissante donc le sens de l'inégalité change, et sur $[0, 7[$ elle est croissante donc le sens est conservé.

$$\iff (-1)^2 > (2x+1)^2 > 0^2 \quad \text{ou} \quad 0^2 \leq (2x+1)^2 < 7^2$$

$$\iff 0 < (2x+1)^2 < 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq (2x+1)^2 < 49$$

$$\iff (2x+1)^2 \in]0, 1[\cup [0, 49[$$

$$\iff (2x+1)^2 \in [0, 49[$$

$$\iff 0 \leq (2x+1)^2 < 49$$

$$\iff -3 \leq (2x+1)^2 - 3 < 46$$

$$\iff -3 \leq f_4(x) < 46$$

Donc $f_4(x) \in [-3, 46[$.

$$\textcircled{*} f_5(x) = x^3 :$$

$$x \in]-1, 3[\iff -1 < x < 3$$

$$\iff (-1)^3 < x^3 < 3^3$$

$$\iff -1 < x^3 < 27$$

$$\Leftrightarrow -1 < f_5(x) < 27$$

Donc $f_5(x) \in]-1, 27[$.

$$\textcircled{*} f_6(x) = \frac{1}{x+2} :$$

$$x \in]-1, 3[\Leftrightarrow -1 < x < 3$$

$$\Leftrightarrow 1 < x+2 < 5$$

On applique la fonction inverse qui est décroissante sur $]1, 5[$, donc le sens de l'inégalité change :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{x+2} > \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{x+2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} < f_6(x) < 1$$

Donc $f_6(x) \in]\frac{1}{5}, 1[$.

② Résolution de $0 \leq -5x + 3 \leq 5$:

$$0 \leq -5x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq -5x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{-5} \geq x \geq \frac{2}{-5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} \geq x \geq -\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$$

Donc $x \in [-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$.

③ $x \in]-3, 2[$:

$$\textcircled{*} g_1(x) = x^2 + 3 :$$

$$x \in]-3, 2[\Leftrightarrow -3 < x < 2$$

On sépare en deux intervalles où la fonction carrée est monotone :

$$\Leftrightarrow -3 < x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq x < 2$$

Sur $] -3, 0[$ la fonction carrée est décroissante donc le sens de l'inégalité change,

et sur $[0, 2[$ elle est croissante donc le sens est conservé.

$$\Leftrightarrow 9 > x^2 > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq x^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 \in]0, 9[\cup [0, 4[$$

$$\Leftrightarrow x^2 \in [0, 9[$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 9$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq x^2 + 3 < 12$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq g_1(x) < 12$$

Donc $g_1(x) \in [3, 12[$. Donc g_1 est minorée par 3 et elle est majorée par 12.

$$\textcircled{*} \quad g_2(x) = \frac{2x}{x+4} :$$

Première méthode : encadrement simple par équivalences successives.

$$x \in]-3, 2[\iff -3 < x < 2$$

On ajoute 4 à chaque membre pour encadrer $x+4$:

$$\iff 1 < x+4 < 6$$

Ainsi $x+4 > 0$: on pourra diviser par $x+4$ sans changer le sens des inégalités.

On multiplie d'abord par 2 les inégalités de départ :

$$x \in]-3, 2[\iff -3 < x < 2$$

$$\iff -6 < 2x < 4$$

On divise maintenant chaque membre par $x+4 > 0$ (le sens est conservé) :

$$\iff -\frac{6}{x+4} < \frac{2x}{x+4} < \frac{4}{x+4}$$

On minore le membre de gauche et on majore le membre de droite.

Comme $x+4 > 1$, on a $\frac{1}{x+4} < 1$, donc $-\frac{6}{x+4} > -6$

Comme $x+4 > 1$, on a $\frac{1}{x+4} < 1$, donc $\frac{4}{x+4} < 4$.

On en déduit l'encadrement (non optimal) :

$$\begin{aligned} \iff -6 < -\frac{6}{x+4} < \frac{2x}{x+4} < \frac{4}{x+4} < 4 \\ \implies -6 < \frac{2x}{x+4} < 4 \end{aligned}$$

Donc $g_2(x) \in]-6, 4[$. Donc g_2 est minorée par -6 et elle est majorée par 4 .

Remarque : 4 n'est pas le plus petit des majorants mais il est suffisant pour répondre à la question.

Deuxième méthode : transformation de l'expression.

Lorsque cela est possible, on essaie de faire apparaître qu'une seule occurrence de x dans l'expression algébrique de la fonction, cela a l'avantage d'être plus simple à encadrer :

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{2x}{x+4} \\ &= \frac{2(x+4) - 8}{x+4} \\ &= \frac{2(x+4)}{x+4} - \frac{8}{x+4} \\ &= 2 - \frac{8}{x+4} \end{aligned}$$

On encadre maintenant $2 - \frac{8}{x+4}$ par équivalences :

$$x \in]-3, 2[\iff -3 < x < 2$$

$$\iff 1 < x+4 < 6$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]1, 6[$, donc on change le sens des inégalités :

$$\iff \frac{1}{6} < \frac{1}{x+4} < 1$$

On multiplie par -8 qui est négatif, donc le sens change :

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow -8 < -\frac{8}{x+4} < -\frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow -6 < 2 - \frac{8}{x+4} < \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow -6 < g_2(x) < \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Donc $g_2(x) \in]-6, \frac{2}{3}[$. Donc g_2 est minorée par -6 et elle est majorée par $\frac{2}{3}$.

⊙ $g_3(x) = \frac{-x+1}{x-3}$:

On commence par transformer l'expression pour ne faire apparaître x qu'une seule fois :

$$\begin{aligned}g_3(x) &= \frac{-x+1}{x-3} \\ &= \frac{-(x-3)-2}{x-3} \\ &= -\frac{x-3}{x-3} - \frac{2}{x-3} \\ &= -1 - \frac{2}{x-3}\end{aligned}$$

On encadre maintenant $-1 - \frac{2}{x-3}$ par équivalences :

$$\begin{aligned}x \in]-3, 2[&\Leftrightarrow -3 < x < 2 \\ &\Leftrightarrow -6 < x-3 < -1\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $] -6, -1[$, donc on change le sens des inégalités :

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x-3} < -\frac{1}{6}$$

On multiplie par -2 qui est négatif, donc le sens change :

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{1}{3} < -\frac{2}{x-3} < 2 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < -1 - \frac{2}{x-3} < 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < g_3(x) < 1\end{aligned}$$

Donc $g_3(x) \in]-\frac{2}{3}, 1[$. Donc g_3 est minorée par $-\frac{2}{3}$ et elle est majorée par 1 .

⊙ $g_4(x) = \frac{x}{x-1}$:

On commence par transformer l'expression pour ne faire apparaître x qu'une seule fois :

$$\begin{aligned}g_4(x) &= \frac{x}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)+1}{x-1} \\ &= \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \\ &= 1 + \frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

On a $x \in]-3, 2[$ mais $x-1$ doit être différent de 0 :

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \quad \text{donc } 1 \text{ est une valeur interdite.}$$

Autrement dit, $x \in]-3, 1[\cup]1, 2[$.

On encadre maintenant $1 + \frac{1}{x-1}$ par équivalences :

$$x \in]-3, 1[\cup]1, 2[\iff -3 < x < 1 \quad \text{ou} \quad 1 < x < 2$$

$$\iff -4 < x - 1 < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x - 1 < 1$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $] -4, 0[$ et sur $]0, 1[$, donc on change le sens des inégalités :

$$\iff -\frac{1}{4} > \frac{1}{x-1} > -\infty \quad \text{ou} \quad +\infty > \frac{1}{x-1} > 1$$

$$\iff -\frac{1}{4} + 1 > 1 + \frac{1}{x-1} > -\infty \quad \text{ou} \quad +\infty > 1 + \frac{1}{x-1} > 1$$

$$\iff -\infty < g_4(x) < \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad 1 < g_4(x) < +\infty$$

Vérifions qu'il n'y a ni minorant ni majorant :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + (-\infty) = -\infty \quad \text{donc } g_4 \text{ n'a pas de minorant.}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + (+\infty) = +\infty \quad \text{donc } g_4 \text{ n'a pas de majorant.}$$

Exercice 4.

Démontrer les inégalités suivantes.

- ① $\forall (a, b) \in \mathbb{R}, \quad 2ab \leq a^2 + b^2.$
- ② $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b).$
- ③ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$
- ④ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad 4 \leq (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$
- ⑤ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$
- ⑥ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad 4ab \leq (a + b)^2.$
- ⑦ $\forall a \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$

Correction de l'exercice 4.

- ① Pour tout réel x , on sait que $x^2 \geq 0$. En particulier, en prenant $x = a - b$, on a :

$$(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

On ajoute $2ab$ de chaque côté :

$$\iff 2ab \leq a^2 + b^2$$

Ce qui montre le résultat attendu.

- ② **Première méthode :** on part de ce qu'on cherche à démontrer et on procède par équivalences successives jusqu'à arriver à une proposition dont on sait si elle est vraie ou fausse.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b) \iff 0 \leq \frac{1}{2}a - \sqrt{ab} + \frac{1}{2}b$$

$$\iff 0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$\iff 0 \leq \sqrt{a^2} - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

Cette dernière proposition est vraie (un carré est toujours positif ou nul), donc par équivalences successives, la proposition de départ est vraie.

Deuxième méthode : d'après la question 1), on sait que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy \leq x^2 + y^2$.

Prenons $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ et posons $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$. On a alors :

$$\begin{aligned} 2xy \leq x^2 + y^2 &\Leftrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b} \leq \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \quad (\text{vrai d'après 1}) \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b \\ &\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b) \end{aligned}$$

③ On commence par simplifier l'expression :

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Donc on veut montrer $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} &\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \\ &\Leftrightarrow 2ab \leq \sqrt{ab}(a+b) && (\text{car } a+b > 0) \\ &\Leftrightarrow 2ab\sqrt{ab} \leq \sqrt{ab} \times \sqrt{ab} \times (a+b) && (\text{car } \sqrt{ab} > 0) \\ &\Leftrightarrow 2ab\sqrt{ab} \leq ab \times (a+b) \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b && (\text{car } ab > 0) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b) \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est exactement celle démontrée à la question 2.

Donc par équivalence l'inégalité de départ est vraie.

④ **Première méthode :** On développe le produit du membre de droite :

$$\begin{aligned} (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) &= a \times \frac{1}{a} + a \times \frac{1}{b} + b \times \frac{1}{a} + b \times \frac{1}{b} \\ &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \\ &= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

D'après la question 1), on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy \leq x^2 + y^2$.

En prenant $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ et $y = \sqrt{\frac{b}{a}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2xy \leq x^2 + y^2 &\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}^2 + \sqrt{\frac{b}{a}}^2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \\ &\Leftrightarrow 2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \\ &\Leftrightarrow 4 \leq 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \\ &\Leftrightarrow 4 \leq (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat attendu.

Deuxième méthode : d'après les questions 2) et 3), on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b) \quad \text{et} \quad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

On multiplie alors membre à membre ces deux inégalités (car tous les termes sont positifs) :

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} \times \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &\leq \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab} \iff \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \times 2 \times 2 \leq (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ &\iff 4 \leq (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Ce qui prouve également le résultat.

⑤ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, on a

$$\sqrt{a+b} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$, donc le sens de l'inégalité \geq est conservé par élévation au carré.

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b}^2 &\geq 0^2 & \text{et} & & (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &\geq 0^2 \\ \iff a+b &\geq 0 & \text{et} & & a+2\sqrt{ab}+b &\geq 0 \end{aligned}$$

Comme $2\sqrt{ab} \geq 0$, on a :

$$0 \leq a+b \leq a+b+2\sqrt{ab}$$

Ce qui équivaut à :

$$0 \leq \sqrt{a+b}^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Et en prenant la racine carrée (fonction croissante sur \mathbb{R}_+) :

$$0 \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Ce qui prouve le résultat.

⑥ D'après la question 1), on a $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

En ajoutant $2ab$ à chaque membre :

$$\begin{aligned} \iff 2ab + 2ab &\leq a^2 + b^2 + 2ab \\ \iff 4ab &\leq (a+b)^2 \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat.

⑦ $\forall a \in]-1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$ (inégalité de Bernoulli).

On procède par récurrence sur n .

Initialisation : pour $n=0$, $(1+a)^0 = 1 \geq 1 = 1+0a$. L'inégalité est vraie.

Hérédité : supposons que $(1+a)^n \geq 1+na$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) && \text{(par hypothèse de récurrence, car } 1+a > 0) \\ \Leftrightarrow (1+a)^{n+1} &\geq 1+a+na+na^2 \\ \Leftrightarrow (1+a)^{n+1} &\geq 1+(n+1)a+na^2 \\ \Leftrightarrow (1+a)^{n+1} &\geq 1+(n+1)a && \text{(car } na^2 \geq 0) \end{aligned}$$

Donc l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 5.

Démontrer les inégalités suivantes.

- ① $\forall x \in]-\infty, 1[, \frac{1}{1-x} > 1+x.$
- ② $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin x \leq x.$
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$
- ④ $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$

Correction de l'exercice 5.

- ① $\forall x \in]-\infty, 1[, 1-x > 0$. On a $\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{1-(1-x^2)}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \geq 0$. L'égalité n'a lieu que si $x=0$, donc $\frac{1}{1-x} > 1+x$ pour $x \neq 0$, et $\frac{1}{1-x} = 1+x$ pour $x=0$. L'inégalité stricte est donc vraie pour $x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\}$. Pour $x=0$, on a égalité.
- ② Soit $f(x) = x - \sin x$. $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, donc f est croissante sur \mathbb{R}^+ . $f(0) = 0$, donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, i.e. $\sin x \leq x$.
- ③ Soit $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. $g'(x) = -\sin x + x \geq 0$ par (2). $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$, i.e. $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
- ④ Soit $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. $h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$ par (3). $h(0) = 0$, donc $h(x) \geq 0$, i.e. $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Exercice 6.

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes et dire, de la proposition ou de sa négation, laquelle est vraie.

- ① $\forall x \in \mathbb{R}_+, x^2 - 1 > 0.$
- ② $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x = 0.$
- ③ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0.$
- ④ $\forall x \in]0, 1[, \frac{1}{x} > x.$

Correction de l'exercice 6.

- ① Négation : $\exists x \in \mathbb{R}_+, x^2 - 1 \leq 0$. Vraie (prendre $x=0$ ou $x=1$). La proposition initiale est fausse.
- ② Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \neq 0$. Fausse (car $x=0$ et $x=-1$ sont solutions). La proposition initiale est vraie.
- ③ Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. Vraie (un carré est toujours positif). La proposition initiale est fausse.
- ④ Négation : $\exists x \in]0, 1[, \frac{1}{x} \leq x$. Fausse (car pour $x \in]0, 1[, \frac{1}{x} > 1 > x$). La proposition initiale est vraie.

Exercice 7.

Compléter les propositions suivantes par l'un des symboles \Rightarrow ou \Leftrightarrow de manière à ce qu'elles soient vraies.

- ① $\forall x \in \mathbb{R}, (0 < x < 1 \dots x^3 < x^2)$.
- ② $\forall x \in \mathbb{R}, (0 < x < 1 \dots \frac{1}{x} > 1)$.
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}, (0 < x < 1 \dots x \geq x^2)$.
- ④ $\forall x \in \mathbb{R}, (0 < x < 1 \dots x - 1 < 0)$.
- ⑤ $\forall x \in \mathbb{R}, (0 < x < 1 \dots x^2 < 1)$.

Correction de l'exercice 7.

- ① $0 < x < 1 \Rightarrow x^3 < x^2$ (car $x^2 > 0$ et $x < 1$). Réciproque fautive : $x = -2$ donne $x^3 = -8 < 4 = x^2$ mais $x \notin]0, 1[$. Donc \Rightarrow .
- ② $0 < x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1$ (la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}^{+*}). Donc \Leftrightarrow .
- ③ $0 < x < 1 \Rightarrow x \geq x^2$ (car $x(1-x) \geq 0$). Réciproque fautive : $x = 0$ donne $0 \geq 0$ mais $0 \notin]0, 1[$. Donc \Rightarrow .
- ④ $0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ (évident). Réciproque fautive : $x = -1$ donne $-2 < 0$ mais $-1 \notin]0, 1[$. Donc \Rightarrow .
- ⑤ $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$ (car $x < 1$ et $x > 0$). Réciproque fautive : $x = -\frac{1}{2}$ donne $x^2 = \frac{1}{4} < 1$ mais $x \notin]0, 1[$. Donc \Rightarrow .

Exercice 8.

Soit n un entier naturel non nul et x_1, \dots, x_n des réels appartenant à $[0, 1]$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

Retrouver l'inégalité de l'exercice 4.(7).

Correction de l'exercice 8.

Par récurrence sur n . Pour $n = 1$: $\prod_{k=1}^1 (1 - x_k) = 1 - x_1 \geq 1 - x_1$, vrai.

Supposons la propriété vraie au rang n . Alors :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) &= (1 - x_{n+1}) \prod_{k=1}^n (1 - x_k) \\ &\geq (1 - x_{n+1}) \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k \right) \quad (\text{par H.R. et } 1 - x_{n+1} \geq 0) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n x_k - x_{n+1} + x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \quad (\text{car } x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k \geq 0) \end{aligned}$$

Pour retrouver l'exercice 4.(7) : prendre $x_k = a$ pour tout k , avec $a \in]-1, +\infty[$. Si $a \geq 0$, l'inégalité est triviale. Si $a \in]-1, 0[$,

on pose $x_k = -a \in]0, 1[$ et on obtient $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 9.

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ des réels.

On considère le polynôme

$$P(X) = \sum_{i=0}^n (Xa_i + b_i)^2.$$

- ① Montrer que $P(X)$ peut se mettre sous la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, où a, b, c sont des réels à déterminer en fonction de $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$.
- ② Calculer le discriminant.

- ③ En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \times b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}.$$

- ④ En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\sum_{k=0}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}.$$

Correction de l'exercice 9.

- ① Développement :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{i=0}^n (X^2 a_i^2 + 2X a_i b_i + b_i^2) \\ &= \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 \right) X^2 + 2 \left(\sum_{i=0}^n a_i b_i \right) X + \left(\sum_{i=0}^n b_i^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } a = \sum_{i=0}^n a_i^2, b = 2 \sum_{i=0}^n a_i b_i, c = \sum_{i=0}^n b_i^2.$$

- ② Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 4 \left(\sum_{i=0}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^n b_i^2 \right)$.

- ③ $P(X) \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}$ (somme de carrés). Donc $\Delta \leq 0$, soit :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^n b_i^2 \right)$$

$$\text{En prenant la racine carrée : } \left| \sum_{i=0}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i^2}.$$

- ④ Inégalité de Minkowski :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=0}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=0}^n a_k b_k + \sum_{k=0}^n b_k^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2} + \sum_{k=0}^n b_k^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient l'inégalité de Minkowski.

Exercice 10.

Soient $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ des réels, et soient $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$ des réels.

L'objectif de l'exercice est de démontrer l'inégalité de Tchebychev :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

- ① Montrer que $a_i b_i + a_j b_j \geq a_i b_j + a_j b_i$ pour tout couple (i, j) .
- ② Démontrer l'inégalité de Tchebychev.

Correction de l'exercice 10.

- ① On a $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ car les suites sont toutes deux décroissantes (les différences ont le même signe). En développant : $a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j \geq 0$, soit $a_i b_i + a_j b_j \geq a_i b_j + a_j b_i$.
- ② Sommons cette inégalité pour tous les couples (i, j) avec $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_i + a_j b_j) &\geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_j b_i) \\ 2n \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \end{aligned}$$

En divisant par $2n^2$: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right)$.

Exercice 11.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n , et y_1, y_2, \dots, y_n des réels avec $y_i > 0$ pour tout i . On note $m = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $M = \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- ① Montrer que

$$m \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq M.$$

- ② En déduire que

$$\min_i \left(\frac{x_i}{y_i} \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq \max_i \left(\frac{x_i}{y_i} \right).$$

Correction de l'exercice 11.

- ① On a $m \leq x_i \leq M$ pour tout i . Comme $y_i > 0$, on a $m y_i \leq x_i y_i \leq M y_i$. En sommant : $m \sum_{i=1}^n y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq M \sum_{i=1}^n y_i$. En

divisant par $\sum_{i=1}^n y_i > 0$: $m \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq M$.

- ② On applique (1) avec x_i remplacé par $\frac{x_i}{y_i}$ et y_i inchangé. On a $m' = \min_i \left(\frac{x_i}{y_i} \right)$ et $M' = \max_i \left(\frac{x_i}{y_i} \right)$. Alors : $m' \leq$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \times y_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq M', \text{ soit } m' \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq M'.$$

Exercice 1.

Pour chaque ligne du tableau suivant, il y a quatre écritures possibles définissant le même ensemble de nombres réels : avec intervalles, inégalités, distances et valeurs absolues. Donner les trois manquantes, ainsi qu'une représentation graphique de cet ensemble.

intervalles	inégalités	distance	valeur absolue	représentation graphique
$x \in [-1, 3[$				
	$x < -1$ ou $x > 5$			
		$d(x, 3) > 3$		
			$ x - x_0 < \alpha$	

Exercice 2.

Résoudre dans \mathbb{R} :

- ① $|2x + 1| \leq 2$
- ② $|-x + 1| \geq 1$
- ③ $|x + 1| - |x + 2| = 2x$
- ④ $|x + 12| \leq |x^2 - 16|$

Exercice 3.

Démontrer que :

- ① $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$ (première inégalité triangulaire).
- ② $\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y|$ (deuxième inégalité triangulaire).
- ③ $\forall x, y \in \mathbb{R}, 2|x| \leq |x + y| + |x - y|$
- ④ $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$

Exercice 4.

A désigne un sous-ensemble de \mathbb{R} . Écrire avec des quantificateurs :

- ① 10 est un majorant de A .
- ② m est un minorant de A .
- ③ p n'est pas un majorant de A .
- ④ A est majorée.
- ⑤ A n'est pas minorée.
- ⑥ A est bornée.

Exercice 5.

Déterminer, s'ils existent la borne supérieure, la borne inférieure, le plus petit élément, le plus grand élément des parties de \mathbb{R} suivantes.

- ① $]a, b]$ où a et b sont deux réels avec $a < b$.
- ② $]a, +\infty[$
- ③ $\left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Exercice 6.

Si A et B sont deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} , on définit $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

- ① Justifier l'existence de $\sup(A + B)$.
- ② Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- ③ On suppose en outre que A est minorée et on note $-A = \{-a \mid a \in A\}$ l'ensemble des opposés des éléments de A .
 - ⓐ Montrer que $-A$ est bornée et que $\sup(-A) = -\inf A$, $\inf(-A) = -\sup A$.
 - ⓑ On appelle diamètre de A la borne supérieure des distances entre deux éléments de A :

$$\text{diam}(A) = \sup \{|a_1 - a_2| \mid a_1 \in A, a_2 \in A\}.$$

Montrer que $\text{diam}(A) = \sup(A - A)$.

- ⓒ En déduire que $\text{diam}(A) = \sup A - \inf A$.

Exercice 7.

Montrer que $D = \{r^2 \mid r \in \mathbb{Q}\} \cup \{-r^2 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} , autrement dit que tout intervalle ouvert non vide contient (au moins) un élément de D .

Exercice 1.

Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |2x - 1| - |6 + 3x|$.

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants préciser les ensembles de définition des fonctions f et g et déterminer, quand c'est possible, les composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

① $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$

② $f(x) = x - 1$ et $g(x) = 1 - x^3$

③ $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$

④ $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = x^2$

Exercice 3.

Préciser le domaine de définition et étudier la parité éventuelle de la fonction f dans les cas suivants.

① $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^4 + 1}$

② $f(x) = 1 - x^3$

③ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

④ $f(x) = x^5 - x^2 + 1$

⑤ $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Exercice 4.

Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques et déterminer une période.

① $f(x) = E(x) - x$.

② $f(x) = \sin x + \cos x$

③ $f(x) = \tan x - \sin 2x$

Exercice 5.

Démontrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1$, admet trois zéros et encadrer chacun de ces zéros par deux entiers consécutifs.

Exercice 6.

① Calculer :

$$\operatorname{Arccos} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right),$$

$$\operatorname{Arccos} (\cos (4\pi)),$$

$$\operatorname{Arccos} \left(\cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \right),$$

$$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

② Démontrer que $2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$.

Exercice 7.

Simplifier les expressions suivantes, en précisant leur domaine de validité.

① $\cos(2\operatorname{Arccos} x)$

② $\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x\right)$

③ $\sin^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x\right)$

④ $\tan(2\operatorname{Arctan} x)$

Exercice 8.

Montrer que

① $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$

② $\forall x \in]-1, 1[\quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{Arcsin}(x)$.

Exercice 9.

Résoudre les inéquations suivantes.

① $\operatorname{Arcsin} x < 0$

② $2\operatorname{Arccos} x - \pi > 0$

③ $2\operatorname{Arctan} x + \pi \geq 0$

Exercice 1.

Parmi les suites définies ci-après par leur terme général, citer celles qui sont arithmétiques, celles qui sont géométriques. Donner alors le premier terme et la raison.

$$u_n = 3^n \quad v_n = n^n \quad w_n = 4n - \frac{5}{2} \quad x_n = (-3)^{2n+1} \quad y_n = (-1)^n e^{-n} \quad z_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3 \quad \alpha_n = \frac{e^{(n+3)^2}}{e^{n^2}} \quad \beta_n = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i$$

Exercice 2.

Etudier si les suites définies ci-après sont bornées.

$$u_n = \frac{2n-3}{2n+1} \quad v_n = \frac{\ln(n)}{n} \quad w_n = \sqrt{n} \quad x_n = \frac{3n + \sin n}{n^2} \quad y_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n+1}$$

Exercice 3.

Etudier si les suites définies ci-après sont monotones.

$$u_n = n + \frac{1}{3^n} \quad v_n = \sqrt{n} + (-1)^n \quad w_n = \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} \quad x_n = \sqrt[n]{n} \quad y_n = 2n + \sin n$$

Exercice 4.

On note $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$ la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_n$ de raison r . Calculer

- ① u_6 et S_6 connaissant $u_2 = 4$ et $r = 3$.
- ② u_0 et S_8 connaissant $u_7 = 100$ et $r = 5$.
- ③ r et u_0 connaissant $S_9 = 95$ et $S_8 = 100$.

Exercice 5.

Une suite arithmétique $(u_n)_n$ a pour premier terme $u_0 = 2$ et pour raison $r = \frac{1}{2}$. Soit un entier $n \geq 3$. Donner en fonction de

n la valeur de $A_n = \sum_{i=n-3}^{2n} u_i$.

Exercice 6.

Déterminer les 5 termes consécutifs u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 d'une suite géométrique décroissante sachant que $u_1 u_5 = 4$, $u_2 + u_4 = \frac{20}{3}$ et $u_3 > 0$.

Exercice 7.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} - 3$.

- ① Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v_n = u_n + \alpha$ soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- ② Calculer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

- ③ On pose $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Calculer S_n . En déduire S'_n .

Exercice 8.

- ① Montrer que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0 (on pourra revenir à la définition).
- ② Montrer que si (u_n) est une suite bornée et (v_n) une suite qui tend vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Exercice 9.

Dans chacun des cas suivants calculer la limite de la suite (u_n) .

$$u_n = 3 + \frac{1}{n+2}$$

$$u_n = \frac{n-2}{n+4}$$

$$u_n = \frac{n^2 + 2n - 1}{n+2}$$

$$u_n = \frac{n^3 + 4n + 3}{n^4 + 5}$$

$$u_n = \frac{-2}{\sqrt{n^3 + 7}}$$

$$u_n = \frac{n+3}{\sqrt{n^2 + 2n}}$$

$$u_n = \sqrt{n^2 + 1} - 2n$$

$$u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

$$u_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$u_n = \frac{2^n + 5}{3^n + 1}$$

$$u_n = \frac{n!}{2^n}$$

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$u_n = n^\alpha e^{\beta n}$$

$$u_n = n^\alpha (\ln n)^\beta$$

$$u_n = \sqrt[n]{n}$$

Exercice 10.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

Exercice 11.

Soit $(a_0, b_0) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. On pose pour tout n dans \mathbb{N} :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}$$

- ① Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont d'une part bien définies et d'autre part adjacentes.
- ② Calculer $\sqrt{a_n b_n}$. En déduire la limite de a_n et b_n .

Exercice 12.

Soit la suite définie par :

$$u_0 = -1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

- ① Montrer que pour tout n dans \mathbb{N} , u_{n+1} est positif.
- ② Étudier la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$.
- ③ En utilisant le graphe de f émettre une idée sur la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ④ Démontrer l'idée avancée.

Exercice 13.**Moyenne de Cesaro.**

- ① Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergente. La moyenne de Cesaro S_n de la suite (u_n) est définie comme

$$S_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

- ② a) On suppose pour commencer que $\lim u_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |S_n| < \frac{|u_1| + \dots + |u_{n_0}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

- ② b) Établir l'existence d'un entier $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad \frac{|u_1| + \dots + |u_{n_0}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- ② c) En déduire la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0.

- ② d) Démontrer que, dans le cas général, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers l .

- ③ Montrer que la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge mais que la suite de Cesaro associée converge.

Exercice 14.

- ① Montrer que la suite de terme général $u_n = \sin(n)$ diverge.

- ② Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(1) + \sin(2) + \dots + \sin(n)$. En déduire la nature de la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k).$$

Exercice 15.

- ① Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

- ② Soient a et b des réels strictement positifs. Déterminer les limites suivantes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + b^n)^{1/n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a^{-n} + b^{-n})^{1/n}.$$

Exercice 16.

- ① Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite non bornée a-t-on nécessairement $\lim u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$?

- ② Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite non bornée et positive a-t-on nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$?

Exercice 17.

Pour $n \geq 1$, on définit les suites u_n et v_n par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} = u_n + \frac{1}{n!}$$

- ① Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes. Soit ℓ la limite de u_n (qui est la limite de v_n).

- ② Montrer que $\ell \notin \mathbb{Q}$.