

Mathématiques 2012–2013

Cours d'Analyse 1

Olivier BENOIS,

Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem,

Avenue de l'Université, BP.12,

F76801 Saint-Étienne-du-Rouvray.

Rédigé avec \LaTeX

par Hicham AMARIR

le 17 mai 2026

Table des matières

1	Les nombres réels	4
1.1	Les ensembles usuels de nombres	4
1.2	Sommes et produits	6
1.3	Relation d'ordre dans \mathbb{R}	11
1.4	Valeur absolue	15
1.5	Bornes inférieures et supérieures	18
1.6	Propriété d'Archimède et ses conséquences	22
2	Fonctions réelles d'une variable réelle	26
2.1	Généralités sur les fonctions	26
2.2	Injections, surjections, bijections	27
2.3	Image directe, image réciproque	30
2.4	Opérations sur les fonctions	32
2.5	Réduction de l'intervalle d'étude d'une fonction	36
2.6	Bornes d'une fonction	37
2.7	Fonctions monotones	42
2.8	Quelques fonctions usuelles	43
2.8.1	Fonctions trigonométriques	43
2.8.2	Fonctions trigonométriques réciproques	47
2.8.2.1	Fonction Arcsin	47
2.8.2.2	Fonction Arccos	48
2.8.2.3	Fonction Arctan	48
2.8.3	Fonctions hyperboliques	50
3	Les suites numériques	52
3.1	Généralités	52
3.1.1	Monotonie	54
3.2	Suites convergentes	55
3.3	Limites infinies	60
3.4	Sous-suites d'une suite	63
4	Limites de fonctions	65
4.1	Notion de limite	65
4.1.1	Limites en $\pm\infty$ d'une fonction	65
4.1.2	Limite en un point fini	66
4.1.3	Lien avec les limites de suites	67
4.2	Opérations sur les limites de fonctions	68
4.3	Relation d'ordre et limites	69
4.4	Limites à gauche et à droite	70

4.5	Continuité	71
4.5.1	Définition et premières propriétés	71
4.5.2	Opérations sur les fonctions continues	72
4.5.3	Prolongement par continuité	72
4.5.4	Théorème des valeurs intermédiaires	72
4.5.5	Théorème des bornes atteintes	73
4.5.6	Théorème de la bijection	73

Chapitre 1

Les nombres réels

1.1 Les ensembles usuels de nombres

L'ensemble des entiers naturels

On refait rapidement l'histoire de la constructions des nombres qu'on utilise quotidiennement. On commence par les nombres entiers naturels qui sont utilisés pour dénombrer des objets. Ils sont définis comme suit :

Définition 1.1 : (*Ensemble des entiers naturels*)

Ces nombres sont utilisés pour dénombrer :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Définition 1.2 : (*Addition, Multiplication*)

Sur cet ensemble, c'est-à-dire sur \mathbb{N} , on définit deux opérations : l'addition et la multiplication.

(voir cours d'algèbre pour la vraie définition)

Problème : l'opération inverse de l'addition n'est pas définie pour tous les entiers.

Par exemple, l'équation $x + 3 = 2$ n'a pas de solution dans \mathbb{N} .

Définition 1.3 : (*Opposé*)

On introduit les symétriques des entiers pour l'addition, qui sont appelés **opposés** : $-1, -2, -3, \dots$ ce sont les entiers négatifs.

Ainsi, le problème est réglé : la solution de $x + 3 = 2$ existe et elle est $x = 2 - 3 = -1$.

Définition 1.4 : (*Ensemble des entiers relatifs*)

On appelle \mathbb{Z} l'ensemble de ces entiers, dits **entiers relatifs** :

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Définition 1.5 : (*Groupe $(\mathbb{Z}, +)$*)

Sur \mathbb{Z} , l'opération inverse de l'addition (c'est-à-dire l'opposé) est définie. On dit que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

Mais on ne peut pas définir l'opération inverse de la multiplication dans \mathbb{Z} : par exemple, 3 n'est pas divisible par 2, autrement dit (i.e. « id est ») : l'équation $2 \times x = 3$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z} .

Définition 1.6 : (*Inverse*)

On introduit les symétriques pour la multiplication : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, appelés **inverses**. Ainsi que leurs sommes : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \dots$

Définition 1.7 : (*Ensemble des nombres rationnels*)

Les nombres ainsi obtenus sont de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$ et s'appellent **nombres rationnels**. L'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$$

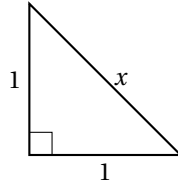
Définition 1.8 : (Corps $(\mathbb{Q}, +, \times)$)

Sur \mathbb{Q} , on peut définir soustraction et division. On dit que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un **corps**.

Ces nombres ne suffisent pas à décrire toutes les grandeurs que l'on peut observer.

Exemple :

Considérons un triangle isocèle rectangle de petit côté de longueur 1.



Quelle est la longueur de l'hypoténuse? Le théorème de Pythagore nous dit que x vérifie :

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Or, propriété : cette équation ne possède pas de solution rationnelle.

En effet, montrons cette propriété en raisonnant par l'absurde :

on suppose qu'il existe un nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ qui vérifie $x^2 = 2$.

Le nombre x peut s'écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Quitte à diviser par leur PGCD, on peut supposer que p et q sont premiers entre eux (ils n'ont pas de facteur commun à part 1).

$$\text{Alors } x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2, \text{ donc } p^2 = 2q^2.$$

On en déduit que p^2 est pair, et donc que p est pair, i.e. $p = 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Alors } p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2 \text{ (car } p^2 = 2q^2).$$

En simplifiant : $2k^2 = q^2$, ainsi q est pair.

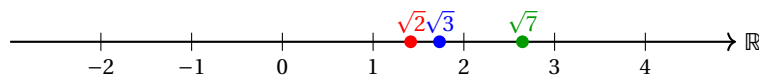
Contradiction : 2 est un facteur commun à p et q alors qu'on avait imposé p et q premier entre eux.

Conclusion : Il faut ajouter à \mathbb{Q} les solutions d'équations polynomiales (à coefficients entiers), tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$, ...

Définition 1.9 : (Nombres algébriques)

Les solutions d'une équation polynomiale à coefficients dans le corps des rationnels \mathbb{Q} sont des nombres appelés **nombres algébriques**.

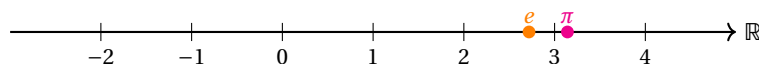
Représentation graphique : droite réelle



Définition 1.10 : (Nombres transcendants)

Si on pouvait représenter tous les nombres algébriques sur la droite, on verrait des trous : il manque des nombres. Ces nombres s'appellent les **nombres transcendants** (ex : π , $e = \exp(1) = e^1$, etc.).

Représentation graphique : droite réelle



1.2 Sommes et produits

Sommes

Définition 1.11 : (Somme d'une suite de termes)

Soient a_1, \dots, a_n des nombres réels (n : nombre de nombres réels considérés, $n \in \mathbb{N}^*$). La somme de ces nombres est notée en utilisant le symbole Σ de sommation :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (i \text{ est un indice muet, i.e. on peut changer de lettre}).$$

On lit « somme des termes a_i lorsque i varie de 1 à n ».

Propriété 1.12 : (Changements d'indices d'une somme)

On peut effectuer des changements d'indices. L'ensemble des indices $\{1, \dots, n\}$ utilisé pour sommer les termes peut aussi être décrit par l'indice $\ell - 1$, mais alors $\ell - 1$ doit varier entre 1 et n , donc ℓ doit varier entre $1 + 1$ et $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{\ell=2}^{n+1} a_{\ell-1}.$$

On dit qu'on a effectué le changement d'indice $i = \ell - 1$ (ou encore $\ell = i + 1$). Lors d'un changement d'indice, la lettre étant muette, on peut garder la même lettre dans le 2e symbole de sommation.

Exemple :

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = a_1 + \dots + a_n.$$

Changement d'indice :

$$i = j + 1 \iff j = i - 1$$

$$1 \leq i \leq n \iff 0 \leq j \leq n - 1$$

De même :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n = a_n + \dots + a_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}.$$

Propriété 1.13 : (Linéarité de la somme)

Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des nombres réels ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors :

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Si } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors } \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) = \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i \right).$$

Preuve :

①

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$$

(addition associative et commutative)

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

- ② Preuve par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$ on a :

$$\sum_{i=1}^1 (\lambda a_i) = \lambda a_1$$

et

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^1 a_i \right) = \lambda (a_1) = \lambda a_1$$

La propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : On suppose la formule vraie au rang $n \geq 1$. Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda a_i) &= (\lambda a_1 + \dots + \lambda a_n) + \lambda a_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda a_i + \lambda a_{n+1} \\ &\stackrel{\text{HR}}{=} \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + \lambda a_{n+1} \\ &\stackrel{\text{factoris.}}{=} \lambda \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1} \right) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \right). \end{aligned}$$

Exemple :

- ① Les termes a_1, \dots, a_n sont constants : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ fois}} = n \cdot a.$$

- ② On suppose que la suite a_0, \dots, a_n est en progression géométrique, par exemple $a_k = \rho^k$:

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^n \rho^i = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} \quad (\rho \neq 1).$$

- ③ On veut calculer $\sum_{k=1}^n k$ (i.e. $a_1 = 1, \dots, a_n = n$).

Notons $S_n = \sum_{k=1}^n k$.

On a vu que

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$$

Par changement d'indice on a aussi que :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = \sum_{i=0}^{n-1} (n - i) = \sum_{k=0}^{n-1} (n - k).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} 2S_n &= S_n + S_n \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (n - i) \right) \\ &\stackrel{\text{chgt d'indice}}{=} \left(\sum_{\ell=1}^n k \right) + \left(\sum_{\ell=1}^n (n - \ell + 1) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{\text{propos. 1}}{=} \sum_{k=1}^n (k + (n - k + 1)) \\
 &= \sum_{k=1}^n (n + 1) \\
 &= (n + 1) \left(\sum_{k=1}^n 1 \right) = (n + 1) \cdot n.
 \end{aligned}$$

Donc

$$2S_n = (n + 1)n$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n k = S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Produits

Définition 1.14 : (Produit d'une suite de termes)

Soient a_1, \dots, a_n des nombres réels. Le produit de tous ces nombres est noté :

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = a_1 a_2 \dots a_n.$$

On lit : « produit pour i variant de 1 jusqu'à n des termes a_i ».

Propriété 1.15 : (Changements d'indices d'un produit)

Là encore, l'indice i est muet : on peut utiliser toute autre lettre non déjà employée. On peut également changer d'indice :

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell+1} \quad (k = \ell + 1 \iff \ell = k - 1).$$

Exemple :

Il n'existe pas de formule explicite (i.e. fonction de n) qui permette de calculer $\prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Définition 1.16 : (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On utilise alors la **notation factorielle** définie par :

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \dots \times n \quad \text{et} \quad 0! = 1.$$

Définition 1.17 : (Coefficient binomial)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0; \dots; n-1\}$.

On appelle **coefficient binomial** le **nombre de combinaisons de k éléments parmi n** défini par

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{ancienne notation : } C_n^k).$$

Exemple :

Par convention, on pose $0! = 1$. Alors :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Propriété 1.18 : (Formule de Pascal)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0; \dots; n-1\}$.

Alors :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Preuve :

Exercice 1 du cours.

Exemple :

On peut calculer les nombres de combinaisons successifs grâce au **triangle de Pascal** :

$n = 1$			1		1								
$n = 2$			1		2		1						
$n = 3$			1		3		3		1				
$n = 4$			1		4		6		4		1		
$n = 5$			1		5		10		10		5		1

Propriété 1.19 : (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve :

Preuve par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : démontrons la formule au 1^{er} rang $n = 1$.

On a d'une part,

$$(a + b)^n = (a + b)^1 = a + b$$

D'autre part,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = 1 \cdot 1 \cdot b + 1 \cdot a \cdot 1 = b + a = a + b \quad \checkmark$$

Hérédité : On suppose la formule vraie au rang n , il faut la démontrer au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \times (a+b) \\
 &\stackrel{\text{(HR)}}{=} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b) \\
 &= a \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) + b \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.
 \end{aligned}$$

On isole les termes extrêmes de la première somme et les termes extrêmes de la deuxième somme, puis on combine les deux sommes en une seule somme en changeant l'indice de la deuxième somme :

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\stackrel{\text{chgt } \ell=k-1}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} a^{\ell+1} b^{n-\ell} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\stackrel{\text{(indice muet)}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^n b^{n+1-n} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{(dans la 2e somme, } k = n : a^n b^1 \text{)} \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
 &\stackrel{\text{Pascal}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
 &\stackrel{\text{chgt } \ell=k+1}{=} \sum_{\ell=1}^n \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
 &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell}.
 \end{aligned}$$

C'est la formule du binôme au rang $n + 1$.

1.3 Relation d'ordre dans \mathbb{R}

Définition 1.20 : (Relation d'ordre \leq sur \mathbb{R})

L'ensemble des nombres réels est muni d'une relation d'ordre \leq qui possède des propriétés :

- a) **Réflexivité** : tout nombre $x \in \mathbb{R}$ vérifie $x \leq x$.
- b) **Anti-symétrie** : si x et y sont deux réels qui vérifient $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.
- c) **Transitivité** : soient x , y et z trois réels tels que $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$. Dans ce cas, on note $x \leq y \leq z$.

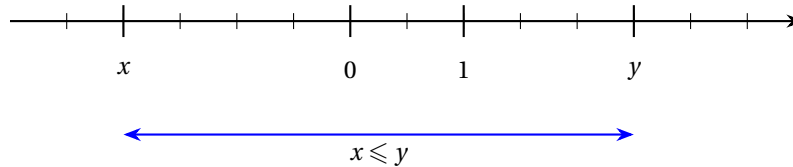
Exemple :

On utilise b) : pour démontrer que $x = y$, il suffit de prouver les doubles inégalités $x \leq y$ et $y \leq x$.

Représentation graphique.

On représente l'ensemble des réels par une droite orientée.

On a que $x \leq y$ si le point d'abscisse x sur la droite est à gauche du point d'abscisse y .



Propriété 1.21 : (Relation d'ordre total de \mathbb{R})

La relation \leq est une relation d'ordre **total** : on peut toujours comparer deux réels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

Propriété 1.22 : (Comportement des inégalités par rapport aux opérations)

On a les règles suivantes :

- a) On peut toujours additionner 2 inégalités :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } a_1 \leq b_1 \text{ et } a_2 \leq b_2, \\ \text{alors } a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2 \end{array} \right\}$$

- Δ b) On peut multiplier une inégalité par un nombre positif :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } a \leq b \text{ et } 0 \leq \lambda, \\ \text{alors } \lambda a \leq \lambda b \end{array} \right\}$$

Si on multiplie une inégalité par un nombre strictement négatif, elle Δ **change de sens** Δ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } a \leq b \text{ et } \lambda < 0, \\ \text{alors } \lambda a \geq \lambda b \end{array} \right\}$$

En particulier, si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$.

- c) **Inverse** :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } 0 < x \leq y, \\ \text{alors } 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \end{array} \right\}$$

Conséquences :

Propriété 1.23 : (Majoration et minoration d'un quotient)

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On souhaite majorer la fraction $\frac{a}{b}$ (majorer : trouver un nombre qui soit plus grand ou égal).

Il faut majorer le numérateur a et minorer le dénominateur b :

$$\begin{array}{l} \text{Si } 0 < a \leq a' \text{ et } 0 < b' \leq b, \\ \text{alors } \frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'} \end{array}$$

Pour minorer la fraction $\frac{a}{b}$, il faut minorer a et majorer b .

Exemple :

Soit x un réel, avec $1 \leq x \leq 2$.

On veut majorer $\frac{x+1}{2x-1}$.

On a

$$\begin{cases} 2 \leq x+1 \leq 3 \\ 1 \leq 2x-1 \leq 3 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{x+1}{2x-1} \leq \frac{3}{1} = 3$$

3 n'est sans doute pas le « meilleur » majorant possible (i.e. le plus petit).

Droite numérique achevée

Définition 1.24 : (Partie majorée, Majorant)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de \mathbb{R} (un sous-ensemble de nombres réels).

On dit que A est **majorée** par le réel $M \in \mathbb{R}$ si tous les éléments de A sont inférieurs ou égaux à M :

$$\forall a \in A, a \leq M.$$

On dit que M est un **majorant** de A .

Exemple :

$A = [0 ; 1[$ est majorée par 2.

Propriété 1.25 : (Stabilité par augmentation des majorants)

Si M est un majorant de A et si $M \leq M'$, alors M' est encore un majorant de A .

Définition 1.26 : (Partie minorée, Minorant)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de \mathbb{R} .

On dit que A est **minorée** par le réel $m \in \mathbb{R}$ si tous les éléments de A sont supérieurs ou égaux à m :

$$\forall a \in A, a \geq m.$$

On dit que m est un **minorant** de A .

Exemple :

$A = [0 ; 1[$ est minorée par -1 .

Propriété 1.27 : (Stabilité par diminution des minorants)

Si m est un minorant de A et si $m' \leq m$, alors m' est encore un minorant de A .

Définition 1.28 : (Partie bornée)

Une partie A est dite **bornée** si elle possède un majorant et un minorant :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a \leq M.$$

Exemple :

- ① \mathbb{R} n'est ni majoré, ni minoré.
- ② $[0 ; 1[$ est minoré par -7 et majoré par 25 donc $[0 ; 1[$ est bornée.
- ③ $] -\infty ; 5[$ est majoré par 8 mais n'est pas minorée, donc $] -\infty ; 5[$ n'est pas bornée.

Définition 1.29 : (Droite numérique achevée)

On ajoute à \mathbb{R} deux éléments (qui ne sont pas des nombres) :

- ① $+\infty$: un élément plus grand que tous les réels.
- ② $-\infty$: un élément plus petit que tous les réels.

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble obtenu en ajoutant à \mathbb{R} ces 2 éléments :

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

⚠ Notation toutefois ambiguë, car la barre signifie généralement « complémentaire » en théorie des ensembles, ou « adhérence » en topologie. Ce qui n'est pas le cas ici! ⚠

Propriété 1.30 : (Caractérisation de la relation d'ordre \leq sur \mathbb{R})

Soient a et b deux nombres réels.

On suppose que, pour tout réel $\varepsilon > 0$ (ε : epsilon) on a $a \leq b + \varepsilon$. Alors $a \leq b$.

En écriture formelle :

$$(\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon) \implies (a \leq b)$$

Preuve :

Preuve par l'absurde.

On suppose que $\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon$ et $b < a$. (voir cours de logique sur l'implication en cours d'algèbre)

Posons $\eta = \frac{a-b}{2} > 0$. Alors :

$$b + \eta = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \quad (\text{C'est le milieu du segment } [b, a].)$$

Par hypothèse, comme $\eta > 0$:

$$a \leq b + \eta = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Donc

$$a - \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2}$$

donc

$$\frac{a}{2} \leq \frac{b}{2}$$

d'où

$$a \leq b$$

Absurde, car on a supposé $b < a$.

Donc l'hypothèse de départ est fausse.

Donc sa négation qui est ce qu'on cherche à démontrer est vraie :

$$\forall \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon \implies a \leq b$$

Exemple :

△ Si on suppose que $\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon$, alors on peut seulement conclure que $a \leq b$. △

Exemple : soient $a = b = 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on a bien $0 = a < \varepsilon = b + \varepsilon$ mais pourtant $0 = a \leq b = 0$.

Intervalles de \mathbb{R}

On se donne deux réels a et b avec $a < b$.

Définition 1.31 : (*Intervalles de \mathbb{R}*)

Intervalle fermé borné (compact) :

$$[a ; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Intervalle ouvert borné :

$$]a ; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Intervalles semi-ouverts / semi-fermés :

$$]a ; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a ; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Intervalles non bornés ouverts / fermés :

$$]-\infty ; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},$$

$$]a ; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

$$]-\infty ; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

$$[a ; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

Propriété 1.32 : (*Intersection d'intervalles*)

L'intersection de 2 intervalles est un intervalle.

Propriété 1.33 : (*Réunion d'intervalles*)

L'union de 2 intervalles n'est pas toujours un intervalle.

Exemple :

$I =]0 ; 1]$; $J = [2 ; 3[$. Alors $I \cup J =]0 ; 1] \cup [2 ; 3[$ n'est pas un intervalle.

En revanche, la réunion de 2 intervalles ayant au moins un point commun est un intervalle.

1.4 Valeur absolue

Définition 1.34 : (*Valeur absolue*)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

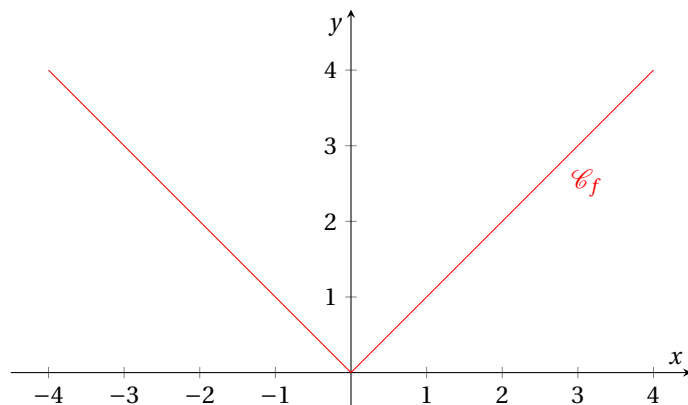
On appelle **valeur absolue** de x le nombre noté $|x|$ défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriété 1.35 : (*Courbe représentative de la fonction valeur absolue*)

La fonction $x \mapsto |x|$ admet pour graphe un « V » et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

La courbe représentative de la fonction valeur absolue dans un repère orthonormé est formée de deux demi-droites perpendiculaires se coupant à l'origine du repère.



Propriété 1.36 : (*Propriétés de la valeur absolue*)

Soient x et y deux réels.

a) $|-x| = |x|$.

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

c) Si $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

d) **Inégalité triangulaire :** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

e) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exemple :

Pour **d)** en général, il n'y a pas égalité :

si $x = 2$, $y = -1$, alors $x + y = 1$. Donc $|x + y| = |1| = 1$.

Mais $|x| + |y| = 2 + 1 = 3$.

Donc il n'y a pas égalité.

Preuve :

e) On a $x = (x - y) + y$.

Par inégalité triangulaire :

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

d'où

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Par symétrie (on échange les rôles de x et de y), on obtient

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |-(x - y)| = |x - y|.$$

Enfin, si $|x| \leq |y|$, alors $||x| - |y|| = |y| - |x| \leq |x - y|$.

Si $|y| \leq |x|$, alors $||x| - |y|| = |x| - |y| \leq |x - y|$.

Dans tous les cas,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Propriété 1.37 : (Généralisation de l'inégalité triangulaire)

Soient x_1, \dots, x_n des réels.

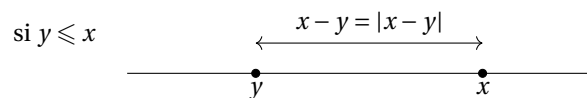
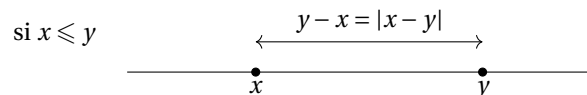
$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Preuve :

(Preuve en exercice par récurrence sur $n \geq 1$.)

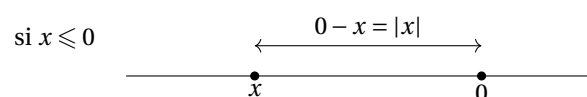
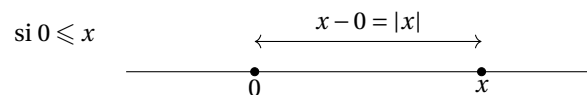
Définition 1.38 : (Distance sur la droite des réels)

Pour deux réels x et y , on appelle **distance** (sur la droite des réels) entre le point d'abscisse x et le point d'abscisse y la valeur $|x - y|$.



Propriété 1.39 : (Distance à zéro)

En particulier, $|x|$ est la distance du point d'abscisse x à l'origine.



Définition 1.40 : (Boule fermée)

On définit la **boule fermée** de centre $c \in \mathbb{R}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ (rappel : $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$) de la façon suivante :

$$B_f(c; r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| \leq r\} = [c - r; c + r].$$

Preuve :

Preuve de la dernière égalité « $B_f(c; r) = [c - r; c + r]$ » qui est une propriété et non une définition :

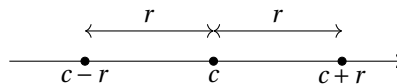
Soit $x \in B_f(c; r)$. Donc $|x - c| \leq r$.

Si $x \geq c$ $|x - c| = x - c$ donc $|x - c| \leq r \iff x - c \leq r \iff x \leq r + c$

Si $x < c$ $|x - c| = c - x$ donc $|x - c| \leq r \iff c - x \leq r \iff c - r \leq x$

Finalement $|x - c| \leq r \iff c - r \leq x \leq r + c \iff x \in [c - r; c + r]$

Ainsi $B^f(c, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| \leq r\} = [c - r; c + r]$



Définition 1.41 : (Boule ouverte)

On définit la **boule ouverte** de centre $c \in \mathbb{R}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ de la façon suivante :

$$B_o(c; r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < r\} =]c - r; c + r[.$$

Preuve :

Même preuve que précédemment mais avec des inégalités strictes.

Propriété 1.42 : (Inégalité et valeur absolue)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r.$$

Preuve :

$$|x| \leq r \iff |x - 0| \leq r \iff 0 - r \leq x \leq 0 + r \iff -r \leq x \leq r$$

1.5 Bornes inférieures et supérieures

Définition 1.43 : (Maximum d'une partie)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de \mathbb{R} .

On dit que M est **maximum** dans A si :

$$\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A, \\ M \in A, \end{cases}$$

Autrement dit si :

$$\begin{cases} \forall a \in A, a \leq M, \\ M \in A. \end{cases}$$

S'il existe, le **maximum** de A se note $\max A$.

S'il existe, le **maximum** d'une partie est encore appelé **plus grand élément** de cette partie.

Preuve :

Supposons que $A \subset \mathbb{R}$ possède un maximum.

Soit M un majorant de A : $\forall a \in A, a \leq M$.

En particulier, comme $\max A \in A$, on obtient $\max A \leq M$.

Conclusion : le maximum de A (s'il existe) est le plus petit des majorants de A .

Propriété 1.44 : (Unicité du maximum)

S'il existe un maximum de A , il est unique.

Preuve :

Soient M_1 et M_2 des maxima de A .

Comme M_1 est un majorant de A et que $M_2 \in A$, on a $M_2 \leq M_1$.

De même, comme M_2 est un majorant de A et que $M_1 \in A$, on a $M_1 \leq M_2$.

Par anti-symétrie, $M_1 = M_2$.

Exemple :

① $A = [0 ; 1]$: 1 est un majorant de $[0, 1]$ et $1 \in [0 ; 1]$, donc $\max[0 ; 1]$ existe et $\max[0 ; 1] = 1$.

② $A = [0 ; 1[$: 1 est (toujours) un majorant de A , mais $1 \notin A$, donc $1 \neq \max A$.

Montrons que A n'a pas de maximum par l'absurde : on suppose que A admet pour maximum M .

Donc :

$$\begin{cases} \forall a \in [0 ; 1[, a \leq M, \\ M \in [0 ; 1]. \end{cases}$$

Soit $c = \frac{M+1}{2}$ et montrons que $c \in [0 ; 1[$:

On a $M \in [0 ; 1[\Rightarrow M \geq 0 \Rightarrow M+1 \geq 1 \Rightarrow c = \frac{M+1}{2} \geq \frac{1}{2} \geq 0$.

On a $M \in [0 ; 1[\Rightarrow M < 1 \Rightarrow M+1 < 2 \Rightarrow c = \frac{M+1}{2} < \frac{2}{2} = 1$.

Conclusion : $c \in [0 ; 1[$.

Or M est un maximum de $[0 ; 1[$ par hypothèse donc $c \leq M \Leftrightarrow \frac{M+1}{2} \leq M \Leftrightarrow M+1 \leq 2M \Leftrightarrow M \geq 1$.

Ce qui contredit l'hypothèse $M \in [0 ; 1[$.

Donc la supposition « A admet pour maximum M » est fautive et par conséquent sa négation « A n'a pas de maximum » est vraie

Définition 1.45 : (*Minimum d'une partie*)

On définit de même la notion de **minimum** :

m est minimum de A si

$$\begin{cases} m \text{ est minorant de } A, \\ m \in A, \end{cases}$$

Autrement dit si :

$$\begin{cases} \forall a \in A, m \leq a, \\ m \in A. \end{cases}$$

S'il existe, on le note $\min A$

S'il existe, le **minimum** d'une partie est encore appelé **plus petit élément**.

Preuve :

Même preuve que pour le maximum.

De la même façon, s'il existe, le minimum de A est le plus grand des minorants.

Propriété 1.46 : (*Unicité du minimum*)

Lorsqu'il existe, un minimum de A est unique.

Preuve :

Même preuve que pour le maximum.

Définition 1.47 : (*Bornes inférieure et supérieure*)

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- S'il existe, le plus petit des majorants de A est appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup A$ (supremum).
- S'il existe, le plus grand des minorants de A est appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf A$ (infimum).

Propriété 1.48 : (*Coïncidence des extrema et bornes*)

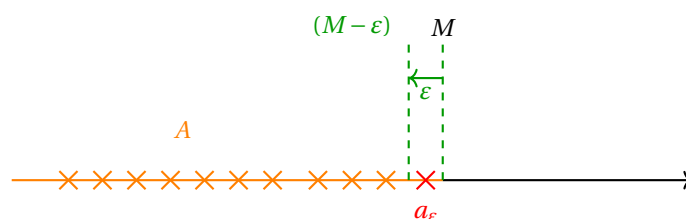
Si A possède un maximum, alors A possède une borne supérieure et $\max A = \sup A$.

Si A possède un minimum, alors A possède une borne inférieure et $\min A = \inf A$.

Propriété 1.49 : (*Caractérisation de la borne supérieure*)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M & \text{(a)} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A, M - \varepsilon < a_\varepsilon & \text{(b)} \end{cases}$$



Preuve :

\Rightarrow On suppose que A admet M comme borne supérieure.

Donc d'une part, M est un majorant de $A : \forall a \in A, a \leq M$. (a) est vérifiée

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$.

On a $M - \varepsilon < M$, donc M étant le plus petit des majorants de A , $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A . On a donc :

$$\text{non } (\forall a \in A, a \leq M - \varepsilon) \implies \exists a_\varepsilon \in A, a_\varepsilon > M - \varepsilon \quad \text{(b) est vérifiée}$$

\Leftarrow On suppose (a) et (b) vérifiées.

Il faut montrer que $\sup A$ existe et $\sup A = M$.

(a) signifie que M est un majorant de A .

Pour démontrer que $M = \sup A$, il faut prouver que si M' est un majorant de A , alors $M' \geq M$.

Par l'absurde :

supposons M' est un majorant de A et $M' < M$. Donc $M - M' > 0$.

Posons $\varepsilon = M - M' > 0$.

(b) affirme qu'il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Donc il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $M - (M - M') < a_\varepsilon$.

Donc il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $M' < a_\varepsilon$.

Contredit le fait que M' soit un majorant.

Donc l'hypothèse « M' est un majorant de A et $M' < M$ » est fausse.

Donc la négation « si M' est un majorant de A , alors $M' \geq M$ » est vraie.

Autrement dit, $M = \sup A$.

Exemple :

On veut calculer $\sup \left\{ \frac{x}{1+x}, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

Cherchons un majorant de $A = \left\{ \frac{x}{1+x}, x > 0 \right\}$.

On a bien sûr $x \leq 1+x$. Donc, en divisant par $1+x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Par conséquent, 1 est un majorant de A .

On note aussi que $\frac{x}{1+x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

Montrons que $1 = \sup A$. Le point (a) est déjà prouvé.

Démontrons le point (b) : on fixe $\varepsilon > 0$ (arbitrairement choisi).

On cherche $x_\varepsilon > 0$ tel que $1 - \varepsilon < \frac{x_\varepsilon}{1+x_\varepsilon}$.

On cherche à résoudre :

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{x_\varepsilon}{1+x_\varepsilon} &\implies (1-\varepsilon)(1+x_\varepsilon) < x_\varepsilon \quad (\text{car } 1+x_\varepsilon > 0) \\ &\implies 1+x_\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon x_\varepsilon < x_\varepsilon \\ &\implies 1 - \varepsilon < x_\varepsilon - x_\varepsilon + \varepsilon x_\varepsilon \\ &\implies 1 - \varepsilon < \varepsilon x_\varepsilon \\ &\implies x_\varepsilon > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \quad (\text{car } \varepsilon > 0) \end{aligned}$$

Choisissons $x_\varepsilon = \begin{cases} \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon} & \text{si } \varepsilon < 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors $x_\varepsilon > 0$ et $x_\varepsilon > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$,

donc $1 - \varepsilon < \frac{x_\varepsilon}{1 + x_\varepsilon}$.

On a bien montré : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x_\varepsilon > 0, 1 - \varepsilon < \frac{x_\varepsilon}{1 + x_\varepsilon}$.

☐ Ce qui prouve que 1 est le plus petit des majorants de A , ou encore $1 = \sup A$.

On a le théorème suivant qui est un résultat important et qui est souvent appelé le théorème fondamental à la base de la construction de \mathbb{R} :

Théorème 1.50 : (*Théorème de la borne supérieure*)

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Si A est une partie **non vide** de \mathbb{R} et **majorée**, alors A possède une borne supérieure.

☐ Autrement dit, il existe un plus petit majorant de A .

Corolaire 1.51 : (*Théorème de la borne inférieure*)

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Si A est une partie **non vide** de \mathbb{R} et **minorée**, alors A possède une borne inférieure.

☐ Autrement dit, il existe un plus grand minorant de A .

Propriété 1.52 : (*Caractérisation du maximum*)

Soit $A \neq \emptyset$ une partie de \mathbb{R} **majorée**. Alors :

☐ A possède un maximum $\iff \sup A \in A$

Propriété 1.53 : (*Caractérisation du minimum*)

Soit $A \neq \emptyset$ une partie de \mathbb{R} **minorée**. Alors :

☐ A possède un minimum $\iff \inf A \in A$

Propriété 1.54 : (*Existence des extrema pour les ensembles finis*)

☐ Si A est une partie finie non vide de \mathbb{R} , alors A possède à la fois un maximum et un minimum.

Propriété 1.55 : (*Existence du minimum dans \mathbb{N}*)

☐ Si A est une partie non vide de \mathbb{N} , alors A possède un minimum.

Propriété 1.56 : (*Existence du maximum dans \mathbb{N} borné*)

☐ Si A est une partie non vide et majorée de \mathbb{N} , alors A possède un maximum.

Exemple :

☐ Les propriétés 1.55 et 1.56 sont des conséquences de la construction de \mathbb{N} .

1.6 Propriété d'Archimède et ses conséquences

Propriété 1.57 : (Théorème d'Archimède)

L'ensemble des réels est **archimédien**, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n\varepsilon > x.$$

(ε : longueur de pas ; n : nombre de pas ; $n\varepsilon > x$: après n pas de ε , on dépasse x .)

Autrement dit : en ajoutant un nombre fini de fois la plus petite valeur, on finira toujours par dépasser la plus grande.

Preuve :

Par l'absurde.

On suppose $\exists \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n\varepsilon \leq x$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ la partie de \mathbb{R} définie par $A = \{n\varepsilon, n \in \mathbb{N}\}$.

A est non vide puisqu'en prenant $n = 0$, on obtient $0 \in A$.

De plus, A est majorée par x .

Donc par le théorème de la borne supérieure, A possède un plus petit majorant $M = \sup A$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ (quelconque). On a $n + 1 \in \mathbb{N}$, donc $(n + 1)\varepsilon \in A$, d'où $(n + 1)\varepsilon \leq M$, ce qui donne $n\varepsilon + \varepsilon \leq M$, i.e. $n\varepsilon \leq M - \varepsilon$.

On a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}, n\varepsilon \leq M - \varepsilon$.

D'où $M - \varepsilon$ est un majorant de A , or $M - \varepsilon < M$ (car $\varepsilon > 0$), ce qui contredit $M = \sup A$.

Propriété 1.58 : (Existence de la Partie entière)

Soit x un nombre réel quelconque. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n + 1 \iff x \in [n ; n + 1[.$$

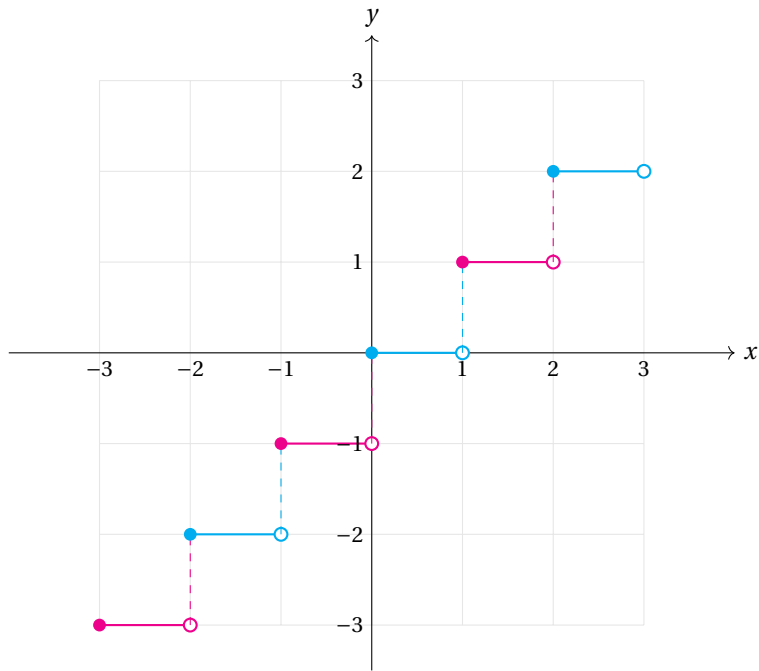
Définition 1.59 : (Partie entière)

L'entier n de la propriété 1.58 est appelé **partie entière de x** et est noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

La fonction **partie entière** E est alors définie par :

$$\begin{aligned} E: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n = E(x) \end{aligned}$$

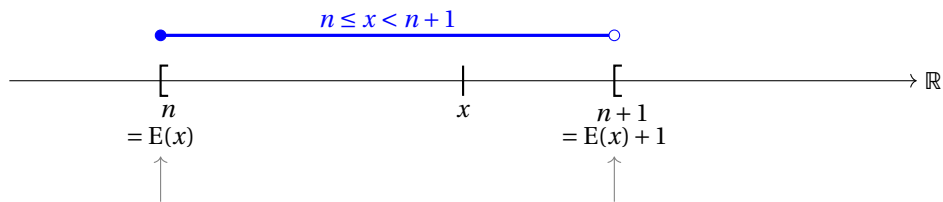
On dit que c'est une **fonction en escalier** car son graphe est le suivant :



Exemple :

$[\pi] = 3, \quad [-1/3] = -1.$

Interprétation géométrique :



Preuve :

On prouve la propriété 1.58 :

Unicité : supposons que n et m sont deux entiers qui vérifient

$$\begin{cases} n \leq x < n + 1, \\ m \leq x < m + 1. \end{cases}$$

Par transitivité, $n \leq x < m + 1$,

donc $n < m + 1$,

i.e. $n \leq m$ (car $n, m \in \mathbb{Z}$).

Par symétrie (on a aussi $m \leq x < n + 1$),

on obtient avec le même raisonnement $m \leq n$.

Donc $m \leq n \leq m$

Conclusion : $m = n$.

Existence :

Cas où $x \geq 0$:

On applique la propriété d'Archimède avec $\varepsilon = 1$ et x : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot 1 > x$, i.e. $n > x$.

Par conséquent, $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$ est une partie de \mathbb{N} non vide (puisque $n \in A$).

Ainsi, A possède un minimum noté m . Alors $m \in A$, donc $m > x$.

D'autre part, $m - 1 \notin A$, donc $m - 1 \leq x$.

Posons $\ell = m - 1$. Alors $\ell \in \mathbb{Z}$ et

$$\ell = m - 1 \leq x < m = \ell + 1,$$

donc $\ell \leq x < \ell + 1$.

Cas où $x < 0$:

D'après le 1^{er} cas, puisque $-x > 0$, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell \leq -x < \ell + 1$.

— Si $-x = \ell$, alors $x = -\ell$, et $-\ell \leq x < -\ell + 1$.

— Si $\ell < -x < \ell + 1$, en multipliant par -1 : $-\ell - 1 < x < -\ell$. On pose $L = -\ell - 1 \in \mathbb{Z}$. Alors $L = -\ell - 1 \leq x < -\ell = L + 1$, d'où $L \leq x < L + 1$.

En résumé, dans tous les cas, on a trouvé un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k + 1$.

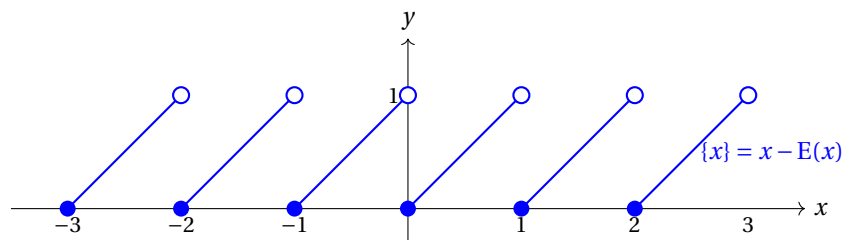
Définition 1.60 : (*Partie fractionnaire*)

Soit x un réel.

On appelle **partie fractionnaire** de x le nombre noté $\{x\}$:

$$\{x\} = x - E(x) \in [0, 1[.$$

Elle est périodique de période 1 et prend ses valeurs dans $[0, 1[$.



Propriétés graphiques :

- **Forme en dents de scie** : chaque palier est un segment de pente 1 (= coefficient directeur).
- **Périodicité** : le motif se répète tous les 1 unité sur l'axe des abscisses.
- **Discontinuités** : sauts verticaux en chaque entier $k \in \mathbb{Z}$ (valeur qui retombe à 0).
- **Ensemble image** : $\{x\} \in [0, 1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corolaire 1.61 : (*Corollaire d'Archimède*)

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Preuve :

Soit $m = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{N}$ (car $\frac{1}{\varepsilon} > 0$).

Par définition de $E(\cdot)$:

$$m \leq \frac{1}{\varepsilon} < m + 1.$$

Alors $\varepsilon > \frac{1}{m+1}$. Il suffit de poser $n = m + 1 \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < \frac{1}{n} = \frac{1}{m+1} < \varepsilon.$$

Propriété 1.62 : (Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R})

L'ensemble des nombres rationnels (\mathbb{Q}) est dense dans \mathbb{R} :

soient x et y deux réels quelconques tels que $x < y$, alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Autrement dit, l'intervalle $]x, y[$ contient un nombre rationnel.

Preuve :

Soient x et y deux réels.

On cherche $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x < \frac{p}{q} < y$, c'est-à-dire $xq < p < yq$.

Lemme 1.63 : (Existence d'un entier dans un intervalle de longueur strictement supérieure à 1)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Si $1 < b - a$, alors il existe un entier $k \in]a, b[$.

Preuve :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ tel que $1 < b - a$. Donc $a + 1 < b$. Soit $k = E(a) + 1$ (k est donc un entier).

Par définition, $E(a) \leq a < E(a) + 1$, donc $E(a) + 1 \leq a + 1$ et donc $a < k \leq a + 1$.

Et puisque $a + 1 < b$, on obtient $a < k < b$, donc $k \in]a, b[$.

Retour à la preuve de la densité.

1^{re} étape : On peut trouver $p \in \mathbb{Z}$ tel que $qx < p < qy$.

D'après le lemme, il suffit de prouver que $qy - qx = q(y - x) > 1$.

Cherchons $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(y - x) > 1$, c'est-à-dire $q > \frac{1}{y - x}$ (avec $y - x > 0$).

Il suffit de prendre

$$q = E\left(\frac{1}{y - x}\right) + 1 \in \mathbb{N}^*.$$

En résumé, on prend $q = E\left(\frac{1}{y - x}\right) + 1 \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$qy - qx > 1.$$

D'après le lemme, il existe $p \in]qx, qy[$, d'où $x < \frac{p}{q} < y$.

2.2 Injections, surjections, bijections

Définition 2.3 : (Antécédent)

Soit $f : D \rightarrow A$ une application.

Donc si $x \in D$, $f(x)$ est l'image de x par f .

Soit $y \in A$, on dit que x est un **antécédent** de y par f si $f(x) = y$.

Exemple :

-2 est un antécédent de 4 par l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Définition 2.4 : (Application injective)

L'application $f : D \rightarrow A$ est dite **injective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée A possède **au plus** un antécédent par f .

Cela revient à dire que deux éléments distincts x_1 et x_2 de D ont deux images distinctes :

$$\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

On dit alors que f est une **injection**.

Propriété 2.5 : (Critère d'injectivité)

Soit $f : D \rightarrow A$ une application injective.

Par contraposée, ceci est équivalent à :

$$\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

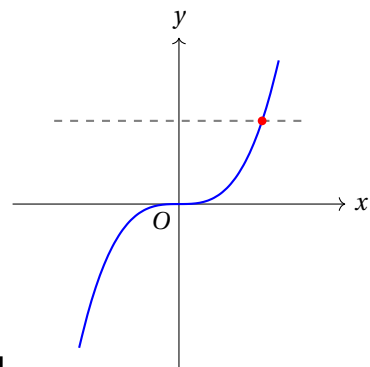
Graphiquement, une application est injective si toute droite horizontale coupe le graphe de la fonction f en au plus un point.

Exemple :

La fonction définie par :

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

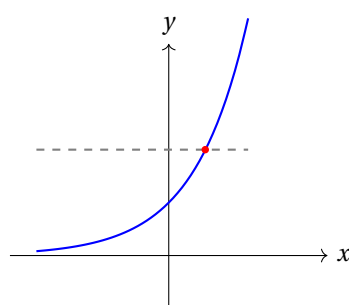
est injective.



La fonction définie par :

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

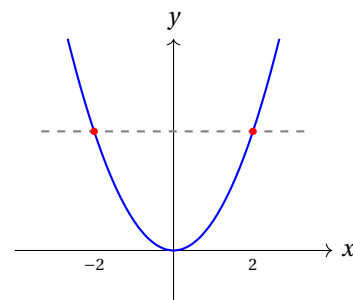
est injective.



Mais la fonction définie par :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

n'est pas injective car 2 et -2 ont la même image.



Définition 2.6 : (Application surjective)

L'application $f : D \rightarrow A$ est dite **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée A possède **au moins** un antécédent par l'application f :

$$\forall y \in A, \exists x \in D, f(x) = y.$$

Graphiquement, dire que $f : D \rightarrow A$ est une surjection, c'est dire que les droites d'équation $y = a$ avec $a \in A$ intersectent en au moins un point la courbe représentative de la fonction f .

Exemple :

La fonction définie par

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

est surjective.

Mais la fonction définie par

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

est non surjective : il n'existe pas de réel x tel que $e^x = -1$ car $e^x \in \mathbb{R}_+^*$.

En revanche, la fonction définie par

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

est surjective. Si $y > 0$, un antécédent de y par F est $x = \ln y$. En effet, $e^{\ln y} = y$.

Définition 2.7 : (Application bijective)

L'application $f : D \rightarrow A$ est dite **bijective** si tout élément de A possède un unique antécédent par f .

Autrement dit, cela signifie que f est à la fois injective et surjective.

On note parfois :

$$\forall y \in A, \exists! x \in D, f(x) = y.$$

Exemple :

La fonction définie par

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

est bijective.

Mais la fonction définie par

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

est non bijective.

En revanche, la fonction définie par

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

est surjective et injective, c'est donc une bijection.

Définition 2.8 : (Application réciproque)

Soit $f : D \rightarrow A$ une bijection. Soit $y \in A$.

Comme y possède un unique antécédent par f , on le note $g(y)$. On a $g(y) \in D$ et $f(g(y)) = y$.

On définit ainsi une application g (unique antécédent de y par f) comme suit :

$$\begin{aligned} g: A &\longrightarrow D \\ y &\longmapsto g(y) \end{aligned}$$

Cette application est appelée **application réciproque** de l'application f et (parfois) notée f^{-1} (Δ **risque de confusion avec**

l'application inverse $\frac{1}{f}$ Δ).

Exemple :

La fonction définie par

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

est une bijection.

Sa réciproque :

$$\begin{aligned} F^{-1}: \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \ln y \end{aligned}$$

Son application inverse est :

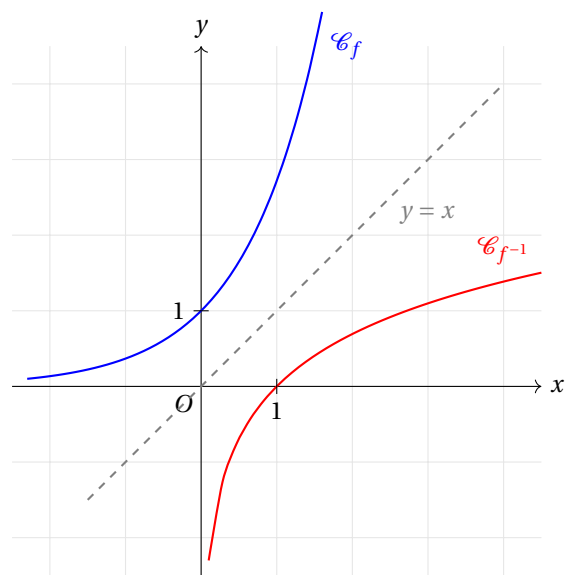
$$\begin{aligned} \frac{1}{F}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \frac{1}{e^x} = e^{-x} \end{aligned}$$

⚠ à ne pas confondre avec la réciproque de F ⚠

Propriété 2.9 : (Interprétation graphique de la réciproque)

Le graphe de la réciproque f^{-1} d'une bijection f s'obtient en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple :



2.3 Image directe, image réciproque

Définition 2.10 : (Image directe)

Soit $f : D \rightarrow A$ une application ($D \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$).

Soit $C \subset D$ une partie de l'ensemble de départ.

On appelle **image directe de C par f** l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt C .

On note cet ensemble $f(C)$:

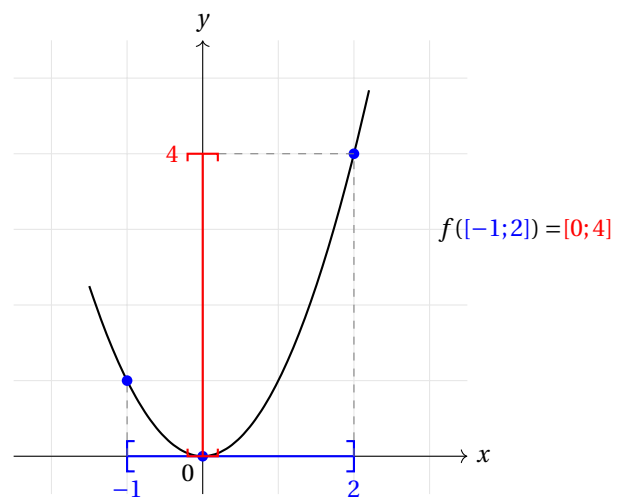
$$f(C) = \{f(x), x \in C\} = \{f(x) \mid x \in C\} = \{y \in A \mid \exists x \in C, y = f(x)\} \subset A.$$

Exemple :

Soit la fonction définie par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Si $C = [-1; 2]$, alors $f(C) = [0; 4]$.



Exemple :

① Soit $y \in A$ et $C \subset D$: $y \in f(C) \iff \exists x \in C, y = f(x)$.

② $f : D \rightarrow A$ est surjective si et seulement si $f(D) = A$.

Définition 2.11 : (Image réciproque)

Soit $B \subset A$ une partie de l'ensemble d'arrivée.

On appelle **image réciproque de B par f** l'ensemble des antécédents par f des éléments de B .

On note cette partie $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Ainsi, pour $x \in D$:

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

⚠ Ne pas confondre l'image réciproque d'une partie $f^{-1}(B)$ (qui existe même si f n'est pas bijective) et l'application réciproque f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective). ⚠

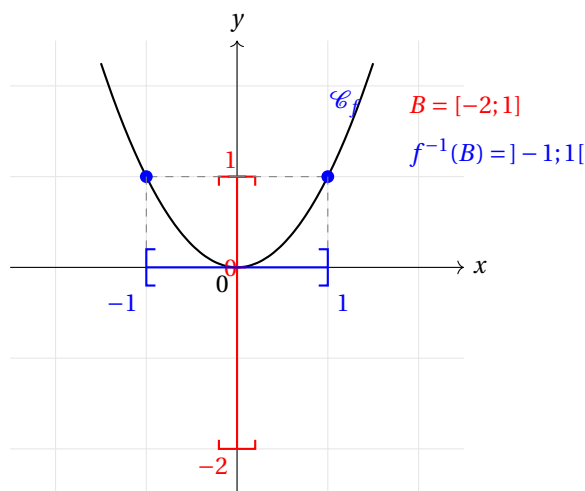
Exemple :

Soit la fonction définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

Si $B = [-2; 1]$,

alors $f^{-1}(B) =]-1; 1[$.



Propriété 2.12 : (Caractérisation de l'injectivité par l'images réciproques des singletons)

$f: D \rightarrow A$ est injective si et seulement si, pour tout élément $y \in A$, $f^{-1}(\{y\})$ est soit l'ensemble vide soit un singleton.

Preuve :

\Rightarrow Supposons que f est injective. Soit $y \in A$.

- Si aucun élément de D n'a pour image y , alors $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$.
- Sinon, il existe $x \in D$ tel que $f(x) = y$, donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ et l'ensemble est non vide.

Montrons qu'il ne contient qu'un seul élément.

Soient $x_1 \in f^{-1}(\{y\})$ et $x_2 \in f^{-1}(\{y\})$.

$$x_1 \in f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f(x_1) = y$$

$$x_2 \in f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f(x_2) = y$$

Donc

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Par injectivité de f , on en déduit que $x_1 = x_2$.

Ainsi, $f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément, c'est donc un singleton.

\Leftarrow Réciproquement, supposons que pour tout $y \in A$, $f^{-1}(\{y\})$ est soit vide soit un singleton.

Soient $x_1 \in D$ et $x_2 \in D$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons qu'avec les hypothèses on a nécessairement que $x_1 = x_2$.

Notons $y = f(x_1) = f(x_2)$.

Alors $x_1 \in f^{-1}(\{y\})$ et $x_2 \in f^{-1}(\{y\})$.

D'après l'hypothèse, $f^{-1}(\{y\})$ est soit vide soit un singleton.

Comme il contient au moins x_1 , il n'est pas vide, donc c'est un singleton :

$$x_1 \in f^{-1}(\{y\}) \text{ et } x_2 \in f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f^{-1}(\{y\}) = \{x_1\} \text{ et } f^{-1}(\{y\}) = \{x_2\} \Rightarrow f^{-1}(\{y\}) = \{x_1\} = \{x_2\}$$

Par conséquent, $x_1 = x_2$.

On a montré que $\forall x_1, x_2 \in D, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, donc f est injective.

Conclusion : On a montré l'implication et sa réciproque. Donc on a montré l'équivalence.

2.4 Opérations sur les fonctions

Propriété 2.13 : (Opérations sur les fonctions)

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications ayant le même ensemble de définition.

On définit les applications :

$$\begin{aligned} \lambda f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

(avec $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f + g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \cdot g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Si pour tout $x \in D$, $f(x) \neq 0$, on définit l'application inverse :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{f(x)} \end{aligned}$$

Propriété 2.14 : (Continuité des opérations sur les fonctions)

Si f et g sont continues sur D , alors λf , $f + g$, $f \cdot g$ sont encore continues sur D .

Si de plus f ne s'annule pas sur D , $\frac{1}{f}$ est continue sur D .

Propriété 2.15 : (Dérivabilité des opérations sur les fonctions)

Si f et g sont dérivables sur D , alors λf , $f + g$, $f \cdot g$ sont encore dérivables sur D .

De plus :

$$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}$$

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f'g + fg'}$$

Si f ne s'annule pas sur D alors :

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$$

Définition 2.16 : (Application identité)

Soit $D \subset \mathbb{R}$.

On appelle l'**identité sur D** l'application notée Id_D définie par :

$$\begin{aligned} \text{Id}_D : D &\longrightarrow D \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

C'est une bijection.

Définition 2.17 : (Application indicatrice)

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie de \mathbb{R} .

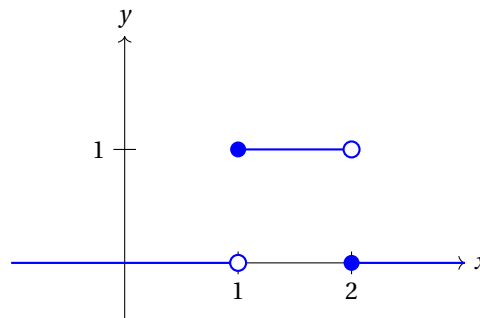
On appelle **indicatrice de B** la fonction notée $\mathbb{1}_B$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_B : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple :

$$\mathbb{1}_{[1,2[} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$\Delta \mathbb{1}_{[1,2[}$ n'est pas continue en 1 et en 2.

La valeur absolue peut s'écrire avec des indicatrices :

$$|x| = x \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) - x \cdot \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x)$$

Composition des applications

Définition 2.18 : (*Application composée*)

Soient $f : D \rightarrow A$ et $g : C \rightarrow B$ deux applications.

On suppose que l'ensemble d'arrivée de f (i.e. A) est inclus dans l'ensemble de définition C de g .

Autrement dit, on suppose $A \subset C$.

On peut alors définir l'application composée $g \circ f$ (lire « g rond f ») définie par :

$$g \circ f : D \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Exemple :

Soient f et g définies par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x+1 \qquad y \longmapsto e^y$$

Alors qu'elle est l'expression de $g \circ f$?

$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = e^{2x+1} = e^{2x} \cdot e = (e^x)^2 \cdot e$$

Donc

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (e^x)^2 \cdot e$$

Et qu'elle est l'expression de $f \circ g$?

$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = 2e^x + 1$$

Donc

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2e^x + 1$$

En général, $f \circ g \neq g \circ f$ comme le montre l'exemple.

Propriété 2.19 : (Continuité d'une application composée)

Soient $f : D \rightarrow A$ et $g : C \rightarrow B$ deux applications.

Si f est continue sur D et si g est continue sur C , alors $g \circ f$ est continue sur D .

Propriété 2.20 : (Dérivabilité d'une application composée)

Soient $f : D \rightarrow A$ et $g : C \rightarrow B$ deux applications.

Si f est dérivable sur D et si g est dérivable sur C , alors $g \circ f$ est dérivable sur D . De plus

$$(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$$

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

On peut appliquer la formule de la dérivée d'une composée à $P_n \circ f$ où $P_n : x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et à e^f .

* $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et on définit P_n dérivable par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{array}{l} P_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \end{array}$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n \circ f(x) = P_n(f(x)) = (f(x))^n = f^n(x)$$

Ainsi

$$(f^n)'(x) = (P_n \circ f)'(x) = f'(x) \cdot P_n'(f(x)) = n f'(x) \cdot f^{n-1}(x)$$

Ainsi

$$(f^n)' = n f' \cdot f^{n-1}$$

* On montre de même que

$$(e^f)' = f' e^f$$

* Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable,

$$(\ln f)' = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$$

donc

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

Composition et bijection

Propriété 2.21 : (Application composée d'une application et sa réciproque)

Soient $f : D \rightarrow A$ une bijection et $f^{-1} : A \rightarrow D$ sa réciproque.

Alors :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_D$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_A$$

D'après le cours d'algèbre, on démontre que

$$f : D \rightarrow A \text{ est bijective} \iff \exists g : A \rightarrow D, \quad g \circ f = \text{Id}_D \text{ et } f \circ g = \text{Id}_A$$

Dans ce cas, g est la réciproque de f et on note $g = f^{-1}$.

Exemple :

Soient les applications suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \text{exp: } \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} \text{ln: } \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln y \end{array}$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

donc

$$\ln \circ \text{exp} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$$

De plus,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln y} = y$$

donc

$$\text{exp} \circ \ln = \text{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$$

Ainsi

$$\ln = (\text{exp})^{-1} \text{ et } \text{exp} = (\ln)^{-1}$$

Propriété 2.22 : (Dérivée d'une application réciproque)

Si $f : D \rightarrow A$ est bijective dérivable et si la dérivée ne s'annule pas sur D , alors la réciproque f^{-1} est dérivable sur A et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Exemple :

On a

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

donc

$$\frac{d}{dy}(\ln y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}(e^x) \circ \ln(y)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

2.5 Réduction de l'intervalle d'étude d'une fonction

Définition 2.23 : (Ensemble symétrique)

Soit $D \subset \mathbb{R}$.

On dit que D est **symétrique** si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \implies -x \in D.$$

Définition 2.24 : (Fonction paire et fonction impaire)

Une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **paire** si D est symétrique et si

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$$

Elle est dite **impaire** si D est symétrique et si

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$$

Propriété 2.25 : (Interprétation graphique d'une fonction paire et d'une fonction impaire)

Si f est paire, son graphe \mathcal{G}_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Si f est impaire, son graphe \mathcal{G}_f est symétrique par rapport à l'origine.

Propriété 2.26 : (Etude d'une fonction paire ou impaire)

Pour étudier une fonction paire ou impaire définie sur D , il suffit de l'étudier sur $D \cap \mathbb{R}_+$.

Définition 2.27 : (Fonction périodique)

Une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **T -périodique** (ou périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$) si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

Exemple :

Les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \cos: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \sin: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

sont 2π -périodiques ou 4π -périodiques ou 6π -périodiques etc.

2.6 Bornes d'une fonction

Définition 2.28 : (Fonction majorée, minorée)

Soit $f : D \rightarrow A$ (avec $D \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$) une fonction.

On dit que f est **majorée** par $M \in \mathbb{R}$ sur D si M est majorant de $f(D)$.

Autrement dit :

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq M$$

On dit que f est **minorée** par $m \in \mathbb{R}$ sur D si m est minorant de $f(D)$.

Autrement dit :

$$\forall x \in D, \quad m \leq f(x)$$

Définition 2.29 : (Borne supérieure et inférieure d'une fonction)

Si une fonction est majorée, le plus petit des majorants de f sur D , c'est-à-dire la borne supérieure de l'ensemble $f(D)$, est appelé **borne supérieure de la fonction f sur D** et est notée :

$$\sup_{x \in D} f(x) \quad \text{ou} \quad \sup_D f \quad \text{ou encore} \quad \sup_D f$$

Si une fonction est minorée, le plus grand des minorants de f sur D , c'est-à-dire la borne inférieure de l'ensemble $f(D)$, est appelé **borne inférieure de la fonction f sur D** et est notée :

$$\inf_{x \in D} f(x) \quad \text{ou} \quad \inf_D f \quad \text{ou encore} \quad \inf_D f$$

Exemple :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Cette fonction est minorée par 0. Elle admet une borne inférieure :

$$\inf_{\mathbb{R}_+^*} f = \inf \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\} = 0$$

Propriété 2.30 : (Interprétation graphique des bornes)

Graphiquement, dire que f est majorée par M , c'est dire que son graphe est au-dessous de la droite horizontale d'équation $y = M$.

Graphiquement, dire que f est minorée par m , c'est dire que son graphe est au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = m$.

Définition 2.31 : (Application bornée)

On dit que f est majorée si f possède un majorant.

Dans le cas où f est à la fois majorée et minorée, on dit que f est **bornée**.

Définition 2.32 : (Généralisation de la notion de sup et d'inf à des fonctions non bornées)

Soient $A \subset \mathbb{R}$

Si A n'est pas majorée, on pose $\sup A = +\infty$.

Si A n'est pas minorée, on pose $\inf A = -\infty$.

De même, si f n'est pas majorée sur D , on pose $\sup_D f = +\infty$

et si f n'est pas minorée, on pose $\inf_D f = -\infty$.

Propriété 2.33 : (Propriétés des bornes d'une fonction)

Soient $f : D \rightarrow A, g : D \rightarrow A$ des applications majorées sur D et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

① **Translation par λ :** $\sup_{x \in D} (f(x) + \lambda) = \left(\sup_{x \in D} f(x) \right) + \lambda$.

② **Multiplication par λ :**

Si $\lambda \geq 0$, alors $\sup_{x \in D} (\lambda f(x)) = \lambda \left(\sup_{x \in D} f(x) \right)$.

Si $\lambda < 0$ et f est minorée sur D , alors $\sup_{x \in D} (\lambda f(x)) = \lambda \left(\inf_D f(x) \right)$.

③ **Somme de deux fonctions :** $\sup_{x \in D} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x)$.

④ **Inverse d'une fonction strictement positive :** On suppose que f est minorée sur D et que $\inf_D f(x) > 0$.

Alors $\frac{1}{f}$ est majorée sur D et

$$\sup_{x \in D} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{\inf_{x \in D} f(x)}$$

Preuve :

① **Translation par λ .**

(*) Montrons que la fonction

$$\begin{aligned} f + \lambda : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + \lambda \end{aligned}$$

est majorée sur D .

Soit $M = \sup_{x \in D} f(x)$. On a, pour $x \in D$:

$$f(x) + \lambda \leq M + \lambda$$

Donc $f + \lambda$ est majorée, d'où d'après le théorème de la borne supérieure 1.50

$$\sup_{x \in D} (f(x) + \lambda) \leq M + \lambda$$

Autrement dit :

$$\sup_{x \in D} (f(x) + \lambda) \leq \sup_{x \in D} f(x) + \lambda$$

(*) Par ailleurs, soit $N = \sup_{x \in D} (f(x) + \lambda)$. Pour $x \in D$,

$$f(x) = (f(x) + \lambda) - \lambda \leq N - \lambda$$

Ainsi, $N - \lambda$ est un majorant de f , donc

$$M = \sup_{x \in D} f(x) \leq N - \lambda = \sup_{x \in D} (f(x) + \lambda) - \lambda$$

D'où

$$\sup_{x \in D} f(x) + \lambda \leq \sup_{x \in D} (f(x) + \lambda)$$

Conclusion : On a donc :

$$\sup_{x \in D} (f(x) + \lambda) \leq \sup_{x \in D} f(x) + \lambda \leq \sup_{x \in D} (f(x) + \lambda)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\sup_{x \in D} (f(x) + \lambda) = \sup_{x \in D} f(x) + \lambda}$$

② Multiplication par λ .

$\boxed{\text{Cas } \lambda > 0 :}$

Montrons que

$$\begin{aligned} \lambda f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

est majorée.

Soit $M = \sup_{x \in D} f(x)$. On a, pour $x \in D$,

$$f(x) \leq M \implies \lambda f(x) \leq \lambda M \quad (\text{car } \lambda > 0)$$

Ainsi, λf est majorée et

$$\sup_{x \in D} (\lambda f(x)) \leq \lambda M = \lambda \sup_{x \in D} f(x)$$

Par ailleurs, pour $x \in D$,

$$f(x) = \frac{\lambda f(x)}{\lambda} \leq \frac{\sup_{x \in D} (\lambda f(x))}{\lambda}$$

Ainsi, $\frac{\sup_{x \in D} (\lambda f(x))}{\lambda}$ est un majorant de f sur D .

D'où

$$\sup_{x \in D} f(x) \leq \frac{\sup_{x \in D} (\lambda f(x))}{\lambda}$$

En multipliant cette inégalité par $\lambda > 0$, on obtient

$$\lambda \sup_{x \in D} f(x) \leq \sup_{x \in D} (\lambda f(x))$$

$\boxed{\text{Cas } \lambda = 0 :}$

$$\begin{aligned} \lambda f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda f(x) = 0 \times f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc λf est l'application constante égale à 0. Donc

$$\sup_{x \in D} (\lambda f) = 0 = 0 \cdot \sup_{x \in D} f$$

$\boxed{\text{Cas } \lambda < 0 :}$

On suppose que f est minorée. On pose $m = \inf_{x \in D} f$.

Montrons que

$$\begin{aligned}\lambda f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda f(x)\end{aligned}$$

est majorée.

Soit $x \in D$,

$$\begin{aligned}f(x) &\geq m \\ \implies \lambda f(x) &\leq \lambda m \quad (\text{car } \lambda < 0)\end{aligned}$$

Donc λm est un majorant de λf , d'où d'après le théorème de la borne supérieure 1.50 :

$$\sup_{x \in D}(\lambda f) \leq \lambda m = \lambda \inf_{x \in D} f$$

Par ailleurs, pour $x \in D$,

$$f(x) = \frac{\lambda f(x)}{\lambda}$$

Or

$$\begin{aligned}\lambda f(x) &\leq \sup_{x \in D}(\lambda f) \\ \implies f(x) = \frac{\lambda f(x)}{\lambda} &\geq \frac{1}{\lambda} \sup_{x \in D}(\lambda f) \quad \left(\text{car } \frac{1}{\lambda} < 0\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{\lambda} \sup_{x \in D}(\lambda f)$ est un minorant de f . Par conséquent,

$$\inf_{x \in D} f \geq \frac{1}{\lambda} \sup_{x \in D}(\lambda f)$$

On multiplie cette inégalité par $\lambda < 0$, donc

$$\lambda \inf_{x \in D} f \leq \sup_{x \in D}(\lambda f)$$

Conclusion : On a donc

$$\sup_{x \in D}(\lambda f) \leq \lambda \inf_{x \in D} f \leq \sup_{x \in D}(\lambda f)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\sup_{x \in D}(\lambda f) = \lambda \inf_{x \in D} f}$$

③ Somme de deux fonctions.

Commençons par prouver que $f + g$ est majorée.

Soit $M = \sup_{x \in D} f$ et soit $N = \sup_{x \in D} g$.

Soit $x \in D$, on a :

$$f(x) + g(x) \leq M + N \quad (\text{car } f(x) \leq M \text{ et } g(x) \leq N).$$

Donc $M + N$ est un majorant de $f + g$. Ainsi, d'après le théorème de la borne supérieure 1.50 :

$$\sup_{x \in D}(f + g) \leq M + N = \sup_{x \in D} f + \sup_{x \in D} g$$

④ Inverse d'une fonction strictement positive.

Soit f minorée et $\inf_{x \in D} f > 0$.

Montrons que $\frac{1}{f}$ est majorée.

Pour $x \in D$,

$$f(x) \geq \inf_{x \in D} f = m > 0 \implies \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$$

Donc la fonction $\frac{1}{f}$ est majorée par $\frac{1}{m}$, d'où d'après le théorème de la borne supérieure 1.50 :

$$\sup_{x \in D} \frac{1}{f} \leq \frac{1}{m} = \frac{1}{\inf_{x \in D} f}$$

D'autre part, si $x \in D$,

$$\frac{1}{f(x)} \leq \sup_{x \in D} \frac{1}{f}$$

De plus, comme $f(x) \geq m > 0$, on a aussi

$$\frac{1}{f(x)} > 0$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{f(x)} &\leq \sup_{x \in D} \left(\frac{1}{f} \right) \\ \implies \frac{1}{1/f(x)} &\geq \frac{1}{\sup_{x \in D} (1/f)} \quad (\text{car on inverse}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{\sup_{x \in D} (1/f)}$ est un minorant de f . Donc

$$0 < \frac{1}{\sup_{x \in D} (1/f)} \leq \inf_{x \in D} f$$

D'où

$$\sup_{x \in D} \left(\frac{1}{f} \right) \geq \frac{1}{\inf_{x \in D} f}$$

Exemple :

Dans la proposition précédente, on peut changer majorée par minorée, sup par inf et inf par sup :

- ① $\inf_D (f + \lambda) = \inf_D f + \lambda$.
- ② $\lambda \geq 0 \implies \inf_D (\lambda f) = \lambda \inf_D f$. $\lambda < 0 \implies \inf_D (\lambda f) = \lambda \sup_D f$.
- ③ $\inf_D (f + g) \geq \inf_D f + \inf_D g$.

La proposition reste vraie pour des parties non bornées si l'on fait les conventions suivantes :

$$\lfloor (+\infty) + c = +\infty, \quad \text{si } \lambda > 0, \lambda(+\infty) = +\infty, \quad \text{si } \lambda < 0, \lambda(+\infty) = -\infty, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Définition 2.34 : (Maximum, minimum de l'image direct une application)

Soit $f : D \rightarrow A$ une application majorée et soit $M = \sup_D f = \sup f(D)$.

Si $M \in f(D)$, alors M est le **maximum de $f(D)$** .

Cela signifie qu'il existe $d \in D$ tel que $M = f(d) = \sup_D f$.

On dit que f présente son maximum en d et on note $\sup_D f = \max_D f$.

De même, on dit que f présente son **minimum m** en $e \in D$ si $m = f(e) = \inf_D f$ et on note, si c'est le cas, $\inf_D f = \min_D f$.

Exemple :

Soit f définie par :

$$\begin{aligned} f: [0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(1-x) \end{aligned}$$

f présente son maximum $\frac{1}{4}$ au point $d = \frac{1}{2}$ et elle présente son minimum 0 en 0 et 1.

En effet, f est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x) = 1 - 2x$:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{4}$	0

2.7 Fonctions monotones

Définition 2.35 : (Fonctions monotones)

Soit $f : D \rightarrow A$ une application.

On dit que f est **croissante** sur D si et seulement si

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \quad x < y \implies f(x) \leq f(y)$$

On dit que f est **décroissante** sur D si et seulement si

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \quad x < y \implies f(x) \geq f(y)$$

On dit que f est **strictement croissante** sur D si et seulement si

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

On dit que f est **strictement décroissante** sur D si et seulement si

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

Une fonction est dite **monotone** sur D si elle est soit croissante, soit décroissante sur D .

Propriété 2.36 : (Affaiblissement de la monotonie)

Si f est strictement croissante sur D , alors elle est croissante sur D :

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \quad x < y \implies f(x) < f(y) \implies f(x) \leq f(y)$$

Si f est strictement décroissante sur D , alors elle est décroissante sur D :

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \quad x < y \implies f(x) > f(y) \implies f(x) \geq f(y)$$

Théorème 2.37 : (*Caractérisation des fonctions monotones par la dérivée*)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- ① f est croissante sur $[a, b]$ **si et seulement si** $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.
- ② f est décroissante sur $[a, b]$ **si et seulement si** $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$.
- ③ Si $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
- ④ Si $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Théorème 2.38 : (*Théorème de la bijection monotone*)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Alors f induit une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (si f est croissante) ou $[f(b), f(a)]$ (si f est décroissante).

Cela signifie que :

$$\begin{array}{ccc} f: [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \implies \begin{array}{ccc} \tilde{f}: [a, b] & \longrightarrow & [f(a), f(b)] \text{ ou } [f(b), f(a)] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \text{ est bijective.}$$

2.8 Quelques fonctions usuelles

2.8.1 Fonctions trigonométriques

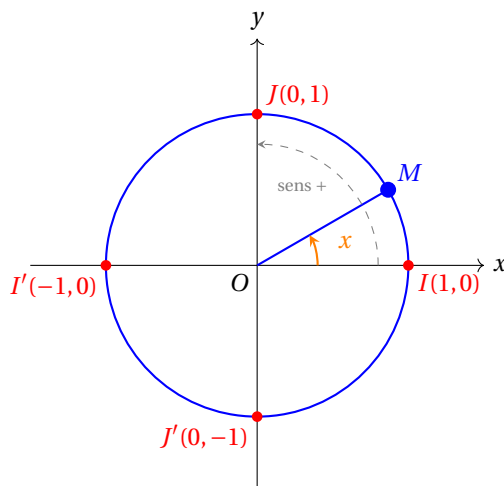
Définition 2.39 : (*Cercle trigonométrique*)

Le **cercle trigonométrique** est le cercle \mathcal{C} du plan euclidien \mathbb{R}^2 défini par :

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

muni des conventions suivantes :

- ① **Centre** : l'origine $O(0, 0)$ du repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- ② **Rayon** : 1 (c'est un cercle *unité*).
- ③ **Sens positif** : le sens **inverse des aiguilles d'une montre** (sens trigonométrique), correspondant au sens de rotation qui amène \vec{i} sur \vec{j} .
- ④ **Origine des angles** : le point $I(1, 0)$ d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses.
- ⑤ **Mesure d'un angle** : à tout réel $x \in \mathbb{R}$, on associe le point $M \in \mathcal{C}$ tel que la longueur de l'arc \widehat{IM} (parcouru dans le sens positif) soit égale à $|x|$. Deux réels x et x' définissent le même point M si et seulement si $x' = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



Remarque : Le cercle trigonométrique permet de **définir géométriquement** les fonctions cos et sin :

si M est le point associé à x , alors $M(\cos x ; \sin x)$.

Définition 2.40 : (*Définition géométrique des fonctions trigonométriques*)

Soit $x \in \mathbb{R}$ une mesure d'un angle orienté (définie à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$) et M le point correspondant sur le cercle trigonométrique (cercle de centre $O(0,0)$ dans un repère orthonormé, de rayon 1 dans le plan euclidien).

① $\cos x$: abscisse de M ,

② $\sin x$: ordonnée de M .

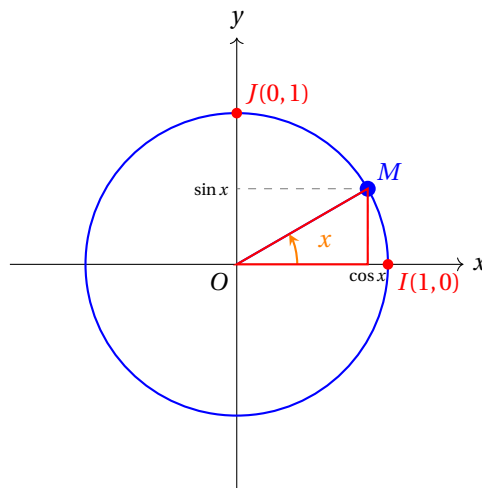
③ Si $\cos x \neq 0$, on pose $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Propriété 2.41 : (*Première identité trigonométrique pythagoricienne*)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle trigonométrique associé à l'angle x .



Par définition géométrique :

$$M(\cos x, \sin x)$$

Le point M appartient au cercle trigonométrique de centre $O(0,0)$ et de rayon 1. Donc la distance OM vérifie :

$$OM = 1$$

D'après la formule de la distance dans un repère orthonormé :

$$OM^2 = (\cos x - 0)^2 + (\sin x - 0)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Puisque $OM = 1$, on a $OM^2 = 1$, donc :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Exemple :

Cette identité est valable pour **tout réel** $x \in \mathbb{R}$, car elle découle directement de la définition géométrique des fonctions cos et sin sur le cercle trigonométrique.

On définit ainsi les trois fonctions trigonométriques principales :

Propriété 2.42 : (Fonction cosinus)

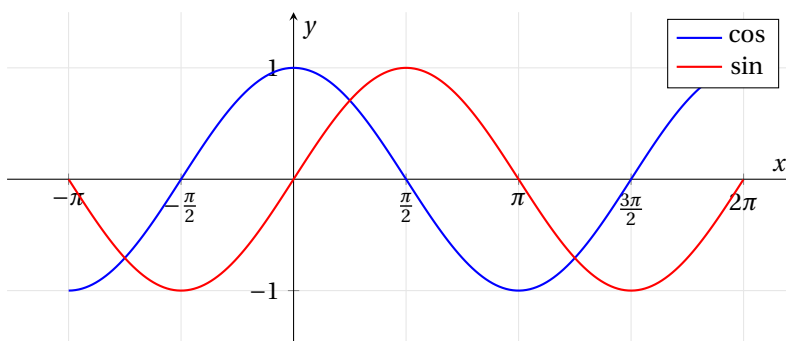
$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

- ① Dérivée : $\cos' x = -\sin x$
- ② Périodicité : 2π -périodique
- ③ Parité : paire, c'est-à-dire $\cos(-x) = \cos x$

Propriété 2.43 : (Fonction sinus)

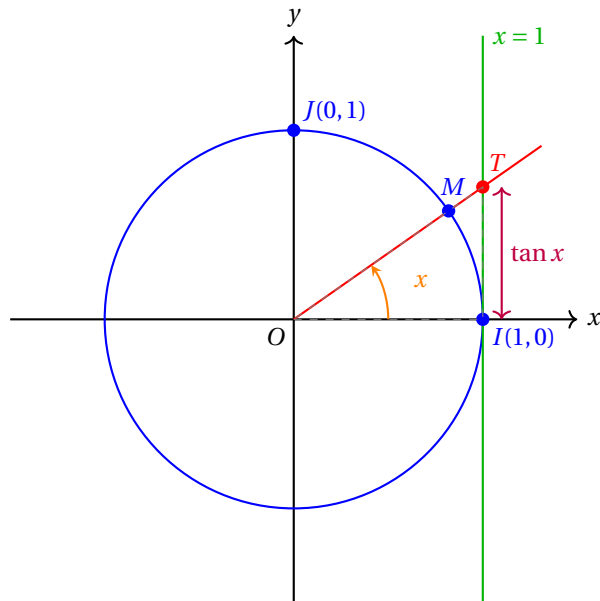
$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$$

- ① Dérivée : $\sin' x = \cos x$
- ② Périodicité : 2π -périodique
- ③ Parité : impaire, c'est-à-dire $\sin(-x) = -\sin x$

**Propriété 2.44 : (Fonction tangente)**

$$\begin{aligned} \tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

- ① Dérivée : $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- ② Périodicité : π -périodique
- ③ Parité : impaire, c'est-à-dire $\tan(-x) = -\tan x$



Preuve :

Démonstration de la dérivée de tan :

Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

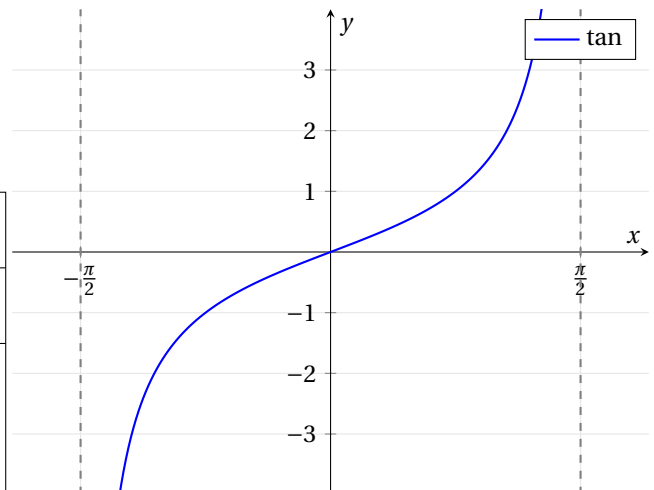
$$\begin{aligned} (\tan)'_{\theta} &= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)' \\ &= \frac{(\sin)'_{\theta} \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot (\cos)'_{\theta}}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tan)'_{\theta} &= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)' \\ &= \frac{(\sin)'_{\theta} \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot (\cos)'_{\theta}}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= 1 + \tan^2 \theta \end{aligned}$$

Donc :

$$\tan' \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan' \theta$	+		
$\tan \theta$	$-\infty$	0	$+\infty$



Propriété 2.45 : (Formule trigonométrique fondamentale)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Tableau de valeurs usuelles :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\times

2.8.2 Fonctions trigonométriques réciproques

2.8.2.1 Fonction Arcsin

Définition 2.46 : (Fonction Arcsin)

La fonction sin restreinte à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$.

Sa réciproque est notée **arcsin** :

$$\begin{aligned} \arcsin: [-1; 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ y &\longmapsto \arcsin y \end{aligned}$$

Propriété 2.47 : (Propriétés de la fonction Arcsin)

1. Caractérisation :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in [-1; 1], \sin(\arcsin y) = y$$

2. Dérivabilité : arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ et :

$$\forall y \in] -1; 1[, \quad (\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Preuve :

Soit $y \in] -1; 1[$. Par la formule de dérivation de la réciproque 2.22 :

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos x \geq 0$, donc $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

En prenant $\theta = \arcsin y$ (donc $\sin \theta = y$) :

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2}$$

D'où :

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Tableau des valeurs usuelles :

y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin y$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

2.8.2.2 Fonction Arccos

Définition 2.48 : (Fonction Arccos)

La fonction cos restreinte à $[0; \pi]$ est une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. Sa réciproque est notée arccos :

$$\begin{aligned} \arccos: \quad [-1; 1] &\longrightarrow [0; \pi] \\ x &\longmapsto \arccos x \end{aligned}$$

Propriété 2.49 : (Propriétés de la fonction Arccos)

1. **Caractérisation :**

$$\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos x) = x \quad \text{et} \quad \forall \theta \in [0; \pi], \arccos(\cos \theta) = \theta$$

2. **Dérivabilité :** arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve :

Soit $x \in] -1; 1[$. Par la formule de dérivation de la réciproque 2.22 :

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}$$

Pour $\theta \in [0; \pi]$, on a $\sin \theta \geq 0$. De plus $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, donc :

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

Pour $x \in] -1; 1[$, $\arccos x \in [0; \pi]$, donc :

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

D'où :

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

⚠ Attention : $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) = \arccos(\frac{1}{2}) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$ (car arccos prend valeurs dans $[0; \pi]$).

Tableau des valeurs usuelles :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

2.8.2.3 Fonction Arctan

Définition 2.50 : (Fonction Arctan)

La fonction tan restreinte à $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . Sa réciproque est notée arctan :

$$\begin{aligned} \arctan: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ x &\longmapsto \arctan x \end{aligned}$$

Propriété 2.51 : (Propriétés de la fonction Arctan)

1. **Caractérisation :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \arctan(\tan \theta) = \theta$$

2. **Limites :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

3. **Dérivabilité :** arctan est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de dérivation de la réciproque :

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

Or $\tan(\arctan x) = x$, donc :

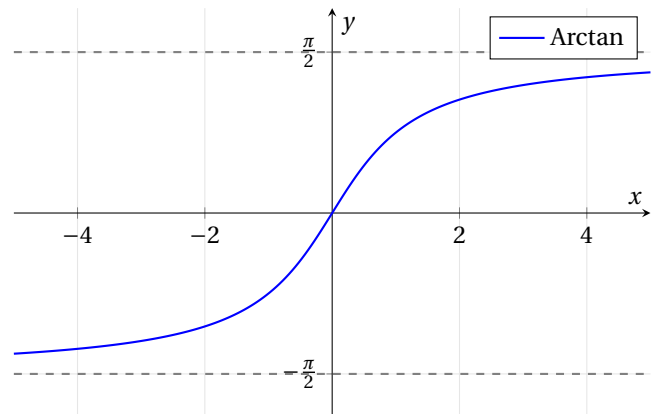
$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Tableau des valeurs usuelles :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
\arctan'		$+$	
\arctan	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$



2.8.3 Fonctions hyperboliques

Idée : généraliser la notion de cos et sin pour les exponentielles réelles.

Notation 2.52 : (*Formule de de Moivre*)

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ (nombre complexe d'argument $\theta [2\pi]$ et de module 1).

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta & (1) \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos\theta \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad (1) - (2) \Rightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin\theta \Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Définition 2.53 : (*Fonctions hyperboliques*)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit :

① Le **cosinus hyperbolique** :

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

② Le **sinus hyperbolique** :

$$\boxed{\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

③ La **tangente hyperbolique** :

$$\boxed{\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

Exemple :

Ces définitions sont inspirées de la **formule d'Euler** pour les fonctions trigonométriques :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Les fonctions hyperboliques correspondent au cas où l'argument est réel (pas de i).

Propriété 2.54 : (*Dérivées des fonctions hyperboliques*)

Les fonctions cosh, sinh et tanh sont dérivables sur \mathbb{R} et :

$$\boxed{\cosh'(x) = \sinh(x)}, \quad \boxed{\sinh'(x) = \cosh(x)}, \quad \boxed{\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}}$$

Preuve :

Pour cosh :

$$\cosh'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

Pour sinh :

$$\sinh'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Pour tanh : Par la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned} \tanh'(x) &= \frac{\sinh'(x) \cosh(x) - \sinh(x) \cosh'(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

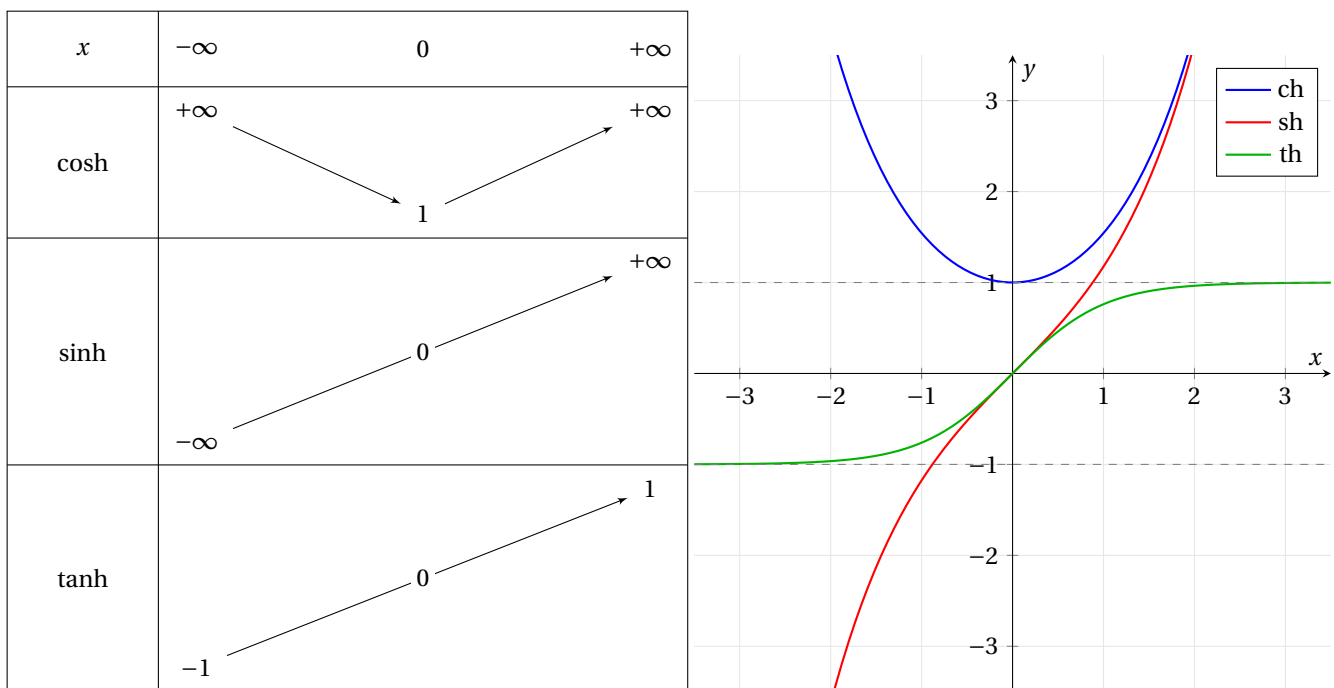
Donc :

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Propriété 2.55 : (*Identité fondamentale hyperbolique*)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Tableaux de variations :



Parités : cosh est paire, sinh et tanh sont impaires.

Propriété 2.56 : (*Formules d'addition hyperboliques*)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$$

Remarque :

Ces formules sont analogues à celles de la trigonométrie classique, **sauf** que le produit de deux sinh ne change pas de signe (contrairement à sin où $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$).

Chapitre 3

Les suites numériques

3.1 Généralités

Le terme "*numérique*" fait référence au fait que les fonctions ont un ensemble d'arrivée dans \mathbb{R} .

Définition 3.1 : (Suite numérique)

On appelle *suite de nombres réels* (ou encore *suite numérique*) toute fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

À chaque entier n (appelé *rang*) on associe $u(n)$ le nombre du rang n . On note $u_n = u(n)$.

En pratique, plutôt que d'écrire :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

on écrit simplement :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Certaines suites sont définies seulement à partir d'un certain rang n_0 , autrement dit la suite est composée des nombres

$$u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots$$

On la note $(u_n)_{n \geq n_0}$ pour que ces fonctions deviennent des applications.

Exemple :

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ n'est définie qu'à partir de $n = 1$.

On la note $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ ou $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Définition 3.2 : (Forme explicite d'une suite)

Parfois, une suite est définie par une *forme explicite* : $u_n = u(n)$ est calculable car on connaît l'expression de la fonction u .

Exemple :

$$\left[\begin{aligned} u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = u(n) & \quad u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \end{aligned} \right.$$

Définition 3.3 : (Relation de récurrence d'une suite)

On peut également définir une suite par une *relation de récurrence*.

On se donne $\varphi : D \rightarrow D$ où $D \subset \mathbb{R}$.

Il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le premier terme est $u_0 \in D$ (fixé) et qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

Exemple :

① Soient $r \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + r \end{cases}$

Alors la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = \varphi(u_n) = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est la suite en **progression arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r .

② Soient $\rho \in \mathbb{R}$ et $\psi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \rho \cdot x \end{cases}$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \psi(u_n) = \rho \cdot u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est la suite en **progression géométrique** de premier terme u_0 et de raison ρ .

③ Soient $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \rho x + r \end{cases}$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n) = \rho u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est dite **arithmético-géométrique**.

Exemple :

Parfois, il est possible d'obtenir une formule explicite pour une suite définie à partir de sa relation de récurrence.

Exemple :

Suite arithmétique de raison r :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \cdot r$$

Suite géométrique de raison ρ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \cdot \rho^n$$

Parfois, on n'a pas de formule explicite :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}.$$

On calcule les premiers termes :

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad u_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \quad \dots$$

3.1.1 Monotonie

Définition 3.4 : (Monotonie d'une suite)

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **constante** lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois croissante et décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq u_n$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Définition 3.5 : (Propriété vraie à partir d'un certain rang)

Soit $E(n)$ une **assertion** mathématique énoncée pour le terme u_n d'une suite.

On dit que $E(n)$ est **vraie à partir d'un certain rang** si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies E(n).$$

Exemple :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang $\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies u_n \leq u_{n+1}$.

Bornitude

Définition 3.6 : (Suite majorée, minorée, bornée)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **majorée** par $M \in \mathbb{R}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$, et **minorée** par $m \in \mathbb{R}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

Cela signifie que l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est majoré (resp. minoré) par M (resp. m).

Dans ce cas, on définit :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on pose $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = +\infty$.

Si elle n'est pas minorée, on pose $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = -\infty$.

Définition 3.7 : (Suite bornée)

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété 3.8 : (Caractérisation des suites bornées)

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \iff \exists c \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq c$$

3.2 Suites convergentes

Définition 3.9 : (Limite d'une suite)

On souhaite définir la notion de limite ℓ d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels.

Intuitivement, cela signifie que les valeurs u_n de la suite sont de plus en plus proches de la limite ℓ lorsque n devient grand, autrement dit la distance entre u_n et ℓ notée $d(u_n, \ell) = |u_n - \ell|$ doit être aussi petite que l'on veut à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exemple :

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Il faut démontrer : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Fixons $\varepsilon > 0$ (quelconque). On veut que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (on a $\frac{1}{n} > 0$ donc $\left|\frac{1}{n}\right| > 0$), i.e. $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

On pose $n_0 = E\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Alors $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, donc pour $n \geq n_0$, on a $n > \frac{1}{\varepsilon}$, donc $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. **Conclusion :** $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Donc $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.

Exemple :

- ① Dans la définition de limite, on peut remplacer l'inégalité stricte $|u_n - \ell| < \varepsilon$ par l'inégalité large $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

En effet, si $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, on a encore $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Réciproquement, si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$, soit $\varepsilon > 0$ quelconque; en appliquant la propriété ci-dessus avec $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ au lieu de ε , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

- ② La convergence et la limite ne dépendent pas des premiers termes de la suite. Soient (u_n) et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = v_n$ si $n \geq n_1$. On suppose que (u_n) converge vers ℓ : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$: soit $n \geq n_2$.

Comme $n \geq n_1$, on a $u_n = v_n$. Comme $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Ainsi pour $n \geq n_2$: $|v_n - \ell| = |u_n - \ell| < \varepsilon$.

On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |v_n - \ell| < \varepsilon$. Ainsi (v_n) converge vers ℓ .

- ③ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite décalée $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge encore vers ℓ .

En effet, soit $\varepsilon > 0$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Comme $n + 1 \geq n_0 \geq n_0$ pour $n \geq n_0$, on a encore $|u_{n+1} - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_{n+1} - \ell| < \varepsilon$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.

Par récurrence, la suite décalée de k termes $(u_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ .

Propriété 3.10 : (Unicité de la limite)

Si elle existe, la limite d'une suite est unique.

Preuve :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $a \in \mathbb{R}$ et vers $b \in \mathbb{R}$.

Montrons que $a = b$. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - a| < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - b| < \varepsilon$ pour $n \geq n_1$.

Soit $n = \max(n_0, n_1)$. Alors $|u_n - a| < \varepsilon$ et $|u_n - b| < \varepsilon$.

Par inégalité triangulaire :

$$|a - b| = |(a - u_n) + (u_n - b)| \leq |u_n - a| + |u_n - b| < 2\varepsilon.$$

On a donc $|a - b| < 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Supposons que $a \neq b$, alors $|a - b| > 0$. Prenons $\varepsilon = \frac{|a - b|}{4} > 0$.

Ainsi $|a - b| < 2\varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$. Absurde. Conclusion : $a = b$.

Propriété 3.11 : (Suite convergente est bornée)

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Preuve :

Soit ℓ la limite. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Prenons $\varepsilon = 1$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0, |u_n - \ell| < 1$, ce qui donne $-1 \leq u_n - \ell \leq 1$, i.e. $\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$.

Ainsi à partir du rang n_0 , la suite (u_n) est minorée par $\ell - 1$ et majorée par $\ell + 1$.

Posons $m = \min\{u_0, \dots, u_{n_0-1}, \ell - 1\}$ et $M = \max\{u_0, \dots, u_{n_0-1}, \ell + 1\}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$. Donc (u_n) est bornée.

Propriété 3.12 : (Opérations sur les limites)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites qui convergent vers u et v respectivement. Alors :

- ① La suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u + v$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.
- ② Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers αu . Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha u_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- ③ La suite $(u_n \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u \cdot v$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.
- ④ Si $v \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{u}{v}$, ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}$.

Preuve :

- ① Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$|(u_n + v_n) - (u + v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v|.$$

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Si $n \geq n_2$, on a $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$, donc

$$|u_n + v_n - (u + v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En résumé, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |(u_n + v_n) - (u + v)| < \varepsilon$. Ainsi $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u + v$.

- ② 1^{er} cas : $\alpha = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha u_n = 0$. Donc $(\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante nulle.

Elle converge donc vers 0 et $0 = 0 \cdot u$. 2^{ème} cas : $\alpha \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - u| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ ($\frac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0$).

On multiplie cette inégalité par $|\alpha|$: $\forall n \geq n_0, |\alpha| |u_n - u| < \varepsilon$, i.e. $|\alpha u_n - \alpha u| < \varepsilon$.

En résumé : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\alpha u_n - \alpha u| < \varepsilon$, i.e. $(\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (αu) .

- ③ On commence par le cas $u = v = 0$. Soit $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| < 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |v_n| < \varepsilon$.

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Alors pour $n \geq n_2$ ($n \geq n_0$ et $n \geq n_1$) :

$$|u_n v_n| = |u_n| |v_n| < 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

En résumé : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |u_n v_n| < \varepsilon$. Ainsi $\lim_{\infty} u_n v_n = 0 = \lim_{\infty} u_n \cdot \lim_{\infty} v_n$. **Cas général** : $\lim_{\infty} (u_n) = u \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\infty} (v_n) = v$. Posons $\tilde{u}_n = u_n - u$ et $\tilde{v}_n = v_n - v$.

D'après 1), $\lim_{\infty} \tilde{u}_n = 0$ et $\lim_{\infty} \tilde{v}_n = 0$.

De plus : $u_n \cdot v_n = (\tilde{u}_n + u)(\tilde{v}_n + v) = \tilde{u}_n \tilde{v}_n + \tilde{u}_n v + u \tilde{v}_n + u \cdot v$.

D'après le 1^{er} cas : $\lim_{\infty} (\tilde{u}_n \tilde{v}_n) = 0$.

D'après la propriété 2) : $\lim_{\infty} (v \cdot \tilde{u}_n) = v \lim_{\infty} (\tilde{u}_n) = 0$ et $\lim_{\infty} (u \cdot \tilde{v}_n) = u \lim_{\infty} (\tilde{v}_n) = 0$.

Conclusion : en appliquant la propriété 1), $\lim_{\infty} (u_n \cdot v_n) = 0 + 0 + 0 + u \cdot v = u \cdot v$.

- ④ On suppose $v = \lim_{\infty} v_n \neq 0$. On prend $\varepsilon = \frac{|v|}{2} > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |v_n - v| < \frac{|v|}{2}$.

Or $|v_n - v| \geq ||v_n| - |v||$, donc $||v_n| - |v|| < \frac{|v|}{2}$, ce qui donne $-\frac{|v|}{2} < |v_n| - |v| < \frac{|v|}{2}$, i.e. $\frac{|v|}{2} < |v_n| < \frac{3|v|}{2}$.

En particulier, pour $n \geq n_0, |v_n| > 0$, donc $v_n \neq 0$.

Ainsi le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ a bien un sens à partir du rang n_0 .

Il reste à prouver que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{u}{v}$.

D'après la propriété 3), il suffit, d'après la propriété 3), de prouver que $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{v}$. On a :

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v} \right| = \left| \frac{v - v_n}{v_n v} \right| = \frac{|v_n - v|}{|v_n| |v|}.$$

Par définition de limite, en prenant $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2|v|^2} > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2|v|^2}$.

Alors si on pose $n_2 = \max(n_0, n_1)$, pour $n \geq n_2$ ($n \geq n_0$ et $n \geq n_1$) :

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v} \right| = \frac{|v_n - v|}{|v_n| |v|} < \frac{\frac{\varepsilon}{2|v|^2}}{\frac{|v|}{2} \cdot |v|} = \frac{\frac{\varepsilon}{2|v|^2}}{\frac{|v|^2}{2}} = \varepsilon.$$

En résumé : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v} \right| < \varepsilon$. Ainsi $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{v}$.

Propriété 3.13 : (Conservation de l'ordre par passage à la limite)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim_{\infty} u_n \leq \lim_{\infty} v_n$.

Preuve :

Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$.

Par ailleurs, pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2}$, où $u = \lim_{\infty} u_n$ et $v = \lim_{\infty} v_n$.

Soit $n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$. Alors :

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ u - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < u + \frac{\varepsilon}{2} \\ v - \frac{\varepsilon}{2} < v_n < v + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ainsi $u - \frac{\varepsilon}{2} < u_n \leq v_n < v + \frac{\varepsilon}{2}$, donc $u - \frac{\varepsilon}{2} < v + \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $u < v + \varepsilon$.

Et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. On a vu (voir proposition antérieure) qu'alors $u \leq v$.

Exemple :

△ Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, on ne peut pas conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Exemple :

$$\begin{cases} u_n = 1 - \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N} \\ v_n = 1 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

On a bien $u_n < v_n$, mais $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$.

nb. 1) En particulier, si (u_n) converge et si M est un majorant de (u_n) à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq M$.

2) Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, on ne peut conclure que $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Propriété 3.14 : (Théorème des gendarmes)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) des suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors (v_n) converge aussi vers ℓ .

Preuve :

Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, |w_n - \ell| < \varepsilon$.

Posons $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Pour $n \geq n_3$ ($n \geq n_0, n \geq n_1, n \geq n_2$) :

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon \end{cases}$$

Donc $\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$, d'où $\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$, i.e. $|v_n - \ell| < \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_3, |v_n - \ell| < \varepsilon$, i.e. (v_n) converge vers ℓ .

Exemple :

$0,99999\dots = 1$.

Soit $\alpha = 0,9999\dots$ On a bien sûr $\alpha \leq 1$.

Posons $u_n = 0, \underbrace{9\dots 9}_{n \text{ fois}}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned} u_n &= 0,9 + 0,09 + \dots + 0,0\dots 09 \\ &= 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + \dots + 9 \cdot 10^{-n} \\ &= 9 \cdot 10^{-1} (1 + 10^{-1} + \dots + 10^{-(n-1)}) \quad (\text{suite géométrique}) \\ &= 9 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{1 - (10^{-1})^n}{1 - 10^{-1}} = 9 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{1 - 10^{-n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - 10^{-n}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-n} = 0$ (cf. Q2), ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Par le théorème des gendarmes, $\alpha = 1$.

Théorème 3.15 : (Convergence des suites monotones)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite monotone.

- a) Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge. De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
- b) Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge. De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Preuve :

a) Comme (u_n) est majorée, $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n < +\infty$ existe. Par définition de sup, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < u_{n_0}$ ($M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de la suite (u_n)).

Soit $n \geq n_0$. Comme (u_n) est croissante, $u_{n_0} \leq u_n \leq M < M + \varepsilon$.

En résumé, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, M - \varepsilon < u_n \leq M < M + \varepsilon$, d'où $|u_n - M| < \varepsilon$.

La limite de (u_n) existe et vaut M .

b) Semblable au a).

Suites adjacentes

Définition 3.16 : (Suites adjacentes)

Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si :

- ① la suite (u_n) est croissante,
- ② la suite (v_n) est décroissante,
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$.

Propriété 3.17 : (Convergence des suites adjacentes)

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

De plus, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Preuve :

La suite (u_n) est \nearrow par hypothèse, (v_n) est \searrow .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \leq v_n \leq v_0$ (car (v_n) est \searrow).

On en déduit que (u_n) est \nearrow et majorée par v_0 . Donc (u_n) converge.

De la même façon, $u_0 \leq u_n \leq v_n$ (car (u_n) est \nearrow).

Ainsi (v_n) est \searrow et minorée par u_0 . Donc (v_n) converge.

De plus $\lim_{\infty} u_n - \lim_{\infty} v_n \stackrel{\text{opérat.}}{=} \lim_{\infty} (u_n - v_n) = 0$, donc $\lim_{\infty} u_n = \lim_{\infty} v_n$.

Exemple :

On veut montrer que la suite $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ converge.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Donc (u_n) est (strictement) \nearrow .

On pose $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n!} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\
 &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2 - (n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0 \text{ si } n \geq 1.
 \end{aligned}$$

De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$.

Conclusion : (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite.

On démontre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

3.3 Limites infinies

Définition 3.18 : (Limite vers $+\infty$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

On dit que (u_n) **tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini** et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M.$$

La suite est aussi grande que l'on veut à partir d'un certain rang.

Exemple :

S'il existe un nombre $M_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n \geq M_0$, alors pour tout nombre $M \leq M_0$, on aura encore $\exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n \geq M$.

C'est pourquoi on remplace souvent la définition précédente par :

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > M.$$

Exemple :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

En effet, soit $M > 0$. Posons $n_0 = E(M) + 1$. Alors pour $n \geq n_0$:

$$n \geq n_0 = E(M) + 1 > M.$$

On a bien démontré que $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n > M$.

Définition 3.19 : (Limite vers $-\infty$)

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq m.$$

Comme précédemment, cette définition équivaut à :

$$\forall m < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq m.$$

Si on pose $M = -m > 0$, la définition devient :

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < -M.$$

Exemple :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty.$$

Notation 3.20 : (Opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

- ① Si $a \in \mathbb{R}$, alors $a + (+\infty) = +\infty$ et $a + (-\infty) = -\infty$.
- ② $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- ③ Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors $a \times (+\infty) = +\infty$ et $a \times (-\infty) = -\infty$. Si $a \in \mathbb{R}_-^*$, alors $a \times (+\infty) = -\infty$ et $a \times (-\infty) = +\infty$.
- ④ $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(+\infty)(-\infty) = -\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$.
- ⑤ $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{-\infty} = 0$.

Opérations non permises : formes indéterminées.

- ① $\infty - \infty$: $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$.
- ② $0 \times \infty$: $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$.
- ③ $\frac{\infty}{\infty}$: $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- ④ $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{a}{0}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 3.21 : (Opérations sur les limites infinies)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels qui admettent une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On note $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $v = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

- ① Si $u + v$ n'est pas une forme indéterminée, alors $(u_n + v_n)$ a une limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = u + v$.
- ② Si $u \cdot v$ n'est pas une forme indéterminée, alors $(u_n \cdot v_n)$ a une limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = u \cdot v$.
- ③ Si $\frac{u}{v}$ n'est pas une forme indéterminée, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a une limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{u}{v}$.

Exemple :

[Vocabulaire] Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) **converge** si (u_n) admet une limite u et $u \in \mathbb{R}$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Exemple :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors (u_n) admet une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) mais (u_n) est divergente.

On ne va examiner que certains cas pour les preuves (les autres, en exercices).

- ① Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. But : $(u_n + v_n)$ a une limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_n - u| < \varepsilon$ (1) et $\forall M > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1, v_n > M$ (2).

On applique (1) avec $\varepsilon = 1$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - u| < 1$, d'où $u - 1 < u_n < u + 1$. En particulier, $\forall n \geq n_0, u_n > u - 1$.

On applique (2) avec $M > 0$ si $u \geq 1$ et $M - u + 1$ si $u < 1$: il existe n_1 tel que $\forall n \geq n_1, v_n > M - u + 1 \geq 0$ (car $M \geq u - 1$).

1^{er} cas : $u \geq 1$. Il existe n_1 tel que $\forall n \geq n_1, v_n > M$. Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour $n \geq n_2$:

$$u_n + v_n > (u - 1) + M \geq M.$$

2^{ème} cas : $u < 1$. Il existe n_2 tel que $\forall n \geq n_2, v_n > M - u + 1 > 0$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$, pour $n \geq n_2$:

$$u_n + v_n \geq (u - 1) + (M - u + 1) = M.$$

Dans tous les cas, on a trouvé $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, u_n + v_n \geq M$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

② On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. But : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = +\infty$.

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - u| < \varepsilon$ (1) et $\forall M > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, v_n > M$ (2).

On applique (1) avec $\varepsilon = \frac{u}{2} > 0$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - u| < \frac{u}{2}$, d'où $+\frac{u}{2} < u_n < \frac{3u}{2}$.

En particulier, $\forall n \geq n_0, u_n \geq \frac{u}{2}$.

On applique (2) en prenant $M' = \frac{2M}{u} > 0$ au lieu de M .

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, v_n > \frac{2M}{u} > 0$.

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour $n \geq n_2$:

$$u_n \cdot v_n \geq \frac{u}{2} \cdot \frac{2M}{u} = M.$$

En résumé, $\forall M > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, u_n \cdot v_n \geq M$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = +\infty$.

③ On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$. On applique (1) avec $\varepsilon = 1$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - u| < 1$, d'où $|u_n| \leq 1 + |u|$.

On applique (2) en prenant $M = \frac{1}{\varepsilon(1 + |u|)} > 0$ au lieu de M .

Alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, v_n > \frac{1}{\varepsilon(1 + |u|)} > 0$.

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour $n \geq n_2$:

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \frac{|u_n|}{v_n} \leq \frac{1 + |u|}{v_n} < (1 + |u|) \cdot \varepsilon(1 + |u|) = \varepsilon.$$

En résumé : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| < \varepsilon$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

3.4 Sous-suites d'une suite

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

Définition 3.22 : (Sous-suite)

On appelle **sous-suite** de (u_n) toute suite infinie obtenue en ne conservant que certains termes.

Exemple :

Suite : $u_0, u_1, u_2, u_3, u_6, u_5, u_6, u_7, u_8, \dots$

Sous-suite : $u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, \dots$

Le terme de rang $n \in \mathbb{N}$ de la sous-suite correspond au terme de rang $\varphi(n)$ de la suite initiale. Dans l'exemple :

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 5, \quad \varphi(3) = 6, \quad \varphi(4) = 8.$$

On définit ainsi une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) > \varphi(n)$, i.e. $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Définition 3.23 : (Extractrice)

Une telle application est appelée **extractrice**.

On peut alors noter la sous-suite sous la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple :

$u_n = (-1)^n, \varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ \varphi \mapsto 2n \end{cases} \quad (u_{\varphi(n)}) = (u_{2n}) : \text{sous-suite des termes de rang pair. } u_{2n} = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1 : \text{c'est la}$
sous-suite constante égale à 1.

$$(-1)^n : \quad 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \quad \text{rang } 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

$(u_{\varphi(n)}) = (u_{2n}) : 1, 1, 1, \dots$ avec $\varphi(0) = 0, \varphi(2) = 2n$.

Propriété 3.24 : (Limite d'une sous-suite)

Soit (u_n) une suite convergente. Alors toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) converge vers la même limite que (u_n) .

Preuve :

Lemme : Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$. **Preuve par récurrence :** $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$. HR : si $\varphi(n) \geq n$ ($n \in \mathbb{N}$), alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ ou $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n + 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - u| < \varepsilon$ (où $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$).

Prenons $n \geq n_0$. Comme φ est \nearrow , on a $\varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0$.

Donc $|u_{\varphi(n)} - u| < \varepsilon$.

En résumé : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_{\varphi(n)} - u| < \varepsilon$, i.e. $(u_{\varphi(n)})$ converge vers u .

Corolaire 3.25 : (Critère de divergence)

Pour démontrer qu'une suite (u_n) diverge, il suffit de démontrer que (u_n) possède deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes.

Exemple :

$u_n = (-1)^n$. (u_{2n}) est constante à 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1$ (sous-suite termes pairs). (u_{2n+1}) est constante à -1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$ (sous-suite termes impairs).

Les deux limites sont différentes, donc $(u_n) = ((-1)^n)$ diverge.

Chapitre 4

Limites de fonctions

4.1 Notion de limite

4.1.1 Limites en $\pm\infty$ d'une fonction

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Définition 4.1 : (Point adhérent à l'infini)

On dit que $+\infty$ est un **point adhérent** à D si

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,]a, +\infty[\cap D \neq \emptyset.$$

De même, $-\infty$ est un point adhérent à D si

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,]-\infty, -a[\cap D \neq \emptyset.$$

On démontre que $+\infty$ est adhérent à D si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de D telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

On note $+\infty \in \overline{D}$ pour dire que $+\infty$ est adhérent à D .

On suppose que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $+\infty \in \overline{D}$.

Définition 4.2 : (Limite en $+\infty$)

On dit que $f(x)$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, \forall x \in D, x > a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Exemple :

De manière analogue, on dit que $f(x)$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, \forall x \in D, x < -a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

On définit de même les limites infinies en $\pm\infty$:

$$- f(x) \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty \text{ si } \forall M > 0, \exists a > 0, x > a \implies f(x) > M.$$

$$- f(x) \rightarrow -\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty \text{ si } \forall M > 0, \exists a > 0, x > a \implies f(x) < -M.$$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{x-1}{x}$, de domaine $D_f = \mathbb{R}^*$. On a $+\infty \in \overline{\mathbb{R}^*}$.

On réécrit $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x > 0$: $|f(x) - 1| = \frac{1}{x}$.

On choisit $a = \frac{1}{\varepsilon}$: pour tout $x > a$, $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

4.1.2 Limite en un point fini

On suppose maintenant que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à D , c'est-à-dire

$$\forall \eta > 0,]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D \neq \emptyset.$$

Définition 4.3 : (Limite en un point fini)

On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$, $x_0 = 0 \in \overline{\mathbb{R}^*}$. Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. On utilise l'identité $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2 \theta$:

$$f(x) = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

Or $|\sin \theta| \leq |\theta|$, donc :

$$|f(x)| \leq \left| \frac{2}{x} \right| \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{|x|}{2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = 2\varepsilon$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ avec $|x| < \eta$: $|f(x)| \leq \frac{|x|}{2} < \frac{\eta}{2} = \varepsilon$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Définition 4.4 : (Limite infinie en un point fini)

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 si

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \eta \implies f(x) > M.$$

Exemple :

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}^*$: on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Vérification. Soit $M > 0$. On pose $\eta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Pour $|x| < \eta$, on a $x^2 < \frac{1}{M}$, donc $f(x) = \frac{1}{x^2} > M$.

Définition 4.5 : (Limite moins l'infini en un point fini)

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 si

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \eta \implies f(x) < -M.$$

Exemple :

On dispose donc de $3 \times 3 = 9$ cas pour une limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ lorsque $a \in \{x_0, +\infty, -\infty\}$ et la limite est dans $\{\ell \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$.

Toutes les définitions suivent le même schéma.

4.1.3 Lien avec les limites de suites

Propriété 4.6 : (Caractérisation séquentielle des limites)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \overline{D}$ un point adhérent à D . Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Il y a équivalence entre les assertions :

① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

② Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve :

On se limite au cas $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. (1) \implies (2). Par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (\star)$$

Soit (x_n) dans D avec $x_n \rightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$ et η donné par (\star) . Puisque $x_n \rightarrow a$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |x_n - a| < \eta$. Alors $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. Donc $f(x_n) \rightarrow \ell$. (2) \implies (1). Par contraposée. Supposons $\neg(1)$:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D, |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

On applique ceci avec $\eta = \frac{1}{n+1}$: il existe $x_n \in D$ tel que $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$.

Alors $x_n \rightarrow a$ par théorème des gendarmes, mais $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ . D'où $\neg(2)$.

Corolaire 4.7 : (Unicité de la limite d'une fonction)

Si elle existe, la limite de f en a est unique.

Preuve :

Supposons $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a f = \tilde{\ell}$. Soit (x_n) dans D avec $x_n \rightarrow a$. Alors $f(x_n) \rightarrow \ell$ et $f(x_n) \rightarrow \tilde{\ell}$. Par unicité de la limite d'une suite : $\ell = \tilde{\ell}$.

Corolaire 4.8 : (Critère de non-existence de limite)

Pour prouver que $\lim_a f$ n'existe pas, il suffit de trouver deux suites $(x_n)_n$ et $(\tilde{x}_n)_n$ dans D telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{x}_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\tilde{x}_n).$$

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (impaire, bornée par -1 et 1).

Posons $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Alors $x_n \rightarrow 0$ et $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$.

Posons $\tilde{x}_n = \frac{1}{(n+1)\pi}$. Alors $\tilde{x}_n \rightarrow 0$ et $f(\tilde{x}_n) = \sin((n+1)\pi) = 0$.

D'après le corollaire 2, f n'a pas de limite en 0.

4.2 Opérations sur les limites de fonctions

Propriété 4.9 : (Opérations sur les limites de fonctions)

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications, $a \in \overline{D}$. On suppose que f et g admettent des limites (finies ou infinies) lorsque x tend vers a .

- ① Si $\lim_a f + \lim_a g$ n'est pas une forme indéterminée, alors $f + g$ admet une limite en a et $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$.
- ② Si $\lim_a f \cdot \lim_a g$ n'est pas une forme indéterminée, alors $f \cdot g$ admet une limite en a et $\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g$.
- ③ Si $\frac{\lim_a f}{\lim_a g}$ n'est pas une forme indéterminée, alors f/g possède une limite en a et $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$.

Exemple :

Les **formes indéterminées** courantes sont : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. Dans ces cas, il faut procéder à une étude plus fine (factorisation, développements limités, règle de L'Hôpital, etc.).

Preuve :

Preuve du point (1) — méthode directe On suppose $\ell = \lim_a f \in \mathbb{R}$ et $m = \lim_a g \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1, \mu > 0$ tels que pour $x \in D$:

$$|x - a| < \eta_1 \implies |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x - a| < \mu \implies |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\nu = \min(\eta_1, \mu)$. Pour $|x - a| < \nu$:

$$|(f + g)(x) - (\ell + m)| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m| < \varepsilon.$$

Preuve :

Preuve du point (1) — méthode des suites Soit (x_n) dans D avec $x_n \rightarrow a$. Alors $f(x_n) \rightarrow \ell$ et $g(x_n) \rightarrow m$, donc $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow \ell + m$. D'où $\lim_a (f + g) = \ell + m$.

Exemple :

Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-1)}{x^2 + x + 1}$ (forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$).

On divise par x^2 :

$$\frac{x(x-1)}{x^2 + x + 1} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

Théorème 4.10 : (Composition des limites)

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(D) \subset E$, et $a \in \overline{D}$.

Si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = \ell$, alors $\lim_a (g \circ f) = \ell$.

Preuve :

Soit (x_n) dans D avec $x_n \rightarrow a$. Alors $f(x_n) \rightarrow b$ (car $\lim_a f = b$). Or $(f(x_n))$ est dans E , donc par la proposition de lien suites-limites appliquée à g : $g(f(x_n)) \rightarrow \ell$.

4.3 Relation d'ordre et limites

Définition 4.11 : (Voisinage)

Soit $A(x)$ une assertion énoncée pour un réel x et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que $A(x)$ est vraie **dans un voisinage de** x_0 s'il existe $r > 0$ tel que $A(x)$ est vraie pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$.

Pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est **définie au voisinage de** x_0 s'il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\} \subset D$.

Propriété 4.12 : (Conservation de l'ordre par passage à la limite)

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$, telles que $\lim_a f$ et $\lim_a g$ existent. Si $f(x) \leq g(x)$ dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Preuve :

Posons $\ell = \lim_a f$ et $m = \lim_a g$. Supposons $\ell > m$ par l'absurde. On pose $\varepsilon = \frac{\ell - m}{2} > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x - a| < \eta$: $f(x) > \ell - \varepsilon = \frac{\ell + m}{2}$ et $g(x) < m + \varepsilon = \frac{\ell + m}{2}$. Donc $f(x) > g(x)$, contradiction. Ainsi $\ell \leq m$.

Théorème 4.13 : (Théorème des gendarmes (fonctions))

Soient $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On suppose que dans un voisinage de a ,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x - a| < \eta$: $\ell - \varepsilon < f(x)$ et $h(x) < \ell + \varepsilon$.

Puisque $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, on a $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$, soit $|g(x) - \ell| < \varepsilon$.

4.4 Limites à gauche et à droite

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point d'adhérence de D .

On considère la restriction de f à $D \cap [a, +\infty[$, notée $f_{d,a}$, et la restriction à $D \cap]-\infty, a]$, notée $f_{g,a}$.

Définition 4.14 : (Limites latérales)

- f admet une **limite à droite de a** si $f_{d,a}$ admet une limite en a : $f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- f admet une **limite à gauche de a** si $f_{g,a}$ admet une limite en a : $f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Toutes les propriétés vues pour les limites se généralisent aux limites à gauche et à droite.

Propriété 4.15 : (Existence de la limite et limites latérales)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{D}$. f possède une limite en a si et seulement si f possède une limite à gauche et à droite de a qui sont égales :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe} \iff f(a^-) = f(a^+).$$

Dans ce cas $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a^-) = f(a^+)$.

Propriété 4.16 : (Limites des fonctions monotones)

Soient $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ croissante.

Soit $c \in]a, b[$. Alors f admet une limite à gauche et à droite en c :

$$f(c^-) = \sup_{x \in]a, c[} f(x) \leq f(c) \leq \inf_{x \in]c, b[} f(x) = f(c^+).$$

Preuve :

L'ensemble $\{f(x) \mid x \in]a, c[\}$ est non vide et majoré par $f(c)$, donc admet une borne supérieure $s \leq f(c)$.

Montrons que $f(x) \rightarrow s$ quand $x \rightarrow c^-$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_0 \in]a, c[$ tel que $f(x_0) > s - \varepsilon$. Posons $\eta = c - x_0$. Pour $x \in]a, c[$ avec $|x - c| < \eta$, on a $x > x_0$, donc $f(x) \geq f(x_0) > s - \varepsilon$. Et $f(x) \leq s$. Ainsi $|f(x) - s| < \varepsilon$, d'où $f(c^-) = s$. Raisonement analogue

pour $f(c^+)$.

4.5 Continuité

4.5.1 Définition et premières propriétés

Définition 4.17 : (Continuité en un point)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$. On dit que f est **continue en** x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D .

Exemple :

La continuité en x_0 exprime que $f(x)$ est proche de $f(x_0)$ dès que x est proche de x_0 . C'est une propriété **locale**.

Trois conditions sont requises : $f(x_0)$ est défini, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, et cette limite vaut $f(x_0)$.

Par la caractérisation séquentielle : f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) dans D avec $x_n \rightarrow x_0$, on a $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Définition 4.18 : (Continuité latérale)

- f est **continue à droite en** x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- f est **continue à gauche en** x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f est continue en x_0 si et seulement si elle est à la fois continue à gauche et à droite en x_0 .

Exemple :

- (1) Tout polynôme est continu sur \mathbb{R} .
- (2) Toute fraction rationnelle P/Q est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{Q = 0\}$.
- (3) Les fonctions sin, cos, exp, ln sont continues sur leur domaine.
- (4) La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} .
- (5) La **fonction partie entière** $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et possède en tout $n \in \mathbb{Z}$ un saut : $\lfloor n^- \rfloor = n-1$ et $\lfloor n^+ \rfloor = n = \lfloor n \rfloor$, donc elle est continue à droite mais pas à gauche en chaque entier.

4.5.2 Opérations sur les fonctions continues

Propriété 4.19 : (Opérations sur les fonctions continues)

Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continues en $x_0 \in D$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- (1) $f + g$ et λf sont continues en x_0 ;
- (2) $f \cdot g$ est continue en x_0 ;
- (3) si $g(x_0) \neq 0$, alors f/g est continue en x_0 .

Propriété 4.20 : (Continuité de la composée)

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $f(D) \subset E$) est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

4.5.3 Prolongement par continuité

Définition 4.21 : (Prolongement par continuité)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \notin D$ un point adhérent à D . On dit que f admet un **prolongement par continuité** en x_0 s'il existe

$$\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}.$$

La fonction $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $\tilde{f}(x_0) = \ell$ est alors continue en x_0 .

Exemple :

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur \mathbb{R}^* . Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on prolonge f par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 1$.

4.5.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.22 : (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continu**. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Preuve :

Preuve par dichotomie (cas $f(a) \leq k \leq f(b)$) On construit deux suites (a_n) et (b_n) par récurrence :

- $a_0 = a, b_0 = b, m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.
- Si $f(m_n) \leq k$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
- Sinon, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.

On a toujours $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$ et $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers le même réel $c \in [a, b]$.

Par continuité de f et passage à la limite dans $f(a_n) \leq k \leq f(b_n) : f(c) = k$.

Corollaire 4.23 : (Corollaire du TVI (racine))

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple :

Le polynôme $P(x) = x^3 - 2x - 5$ admet une racine dans $]2, 3[$.

En effet, $P(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$ et $P(3) = 27 - 6 - 5 = 16 > 0$. Comme P est continue et $P(2) \cdot P(3) < 0$, le TVI assure l'existence de $c \in]2, 3[$ avec $P(c) = 0$.

Théorème 4.24 : (*Image d'un intervalle par une fonction continue*)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

4.5.5 Théorème des bornes atteintes

Théorème 4.25 : (*Théorème des bornes atteintes*)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un segment. Alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ tels que

$$f(x_{\min}) = \min_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad f(x_{\max}) = \max_{[a,b]} f.$$

Preuve :

Étape 1 : f est bornée. Si f n'est pas bornée supérieurement, il existe (x_n) dans $[a, b]$ avec $f(x_n) \geq n$. Par Bolzano-Weierstraß, (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $c \in [a, b]$. Par continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(c) \in \mathbb{R}$, contradiction avec $f(x_n) \rightarrow +\infty$. **Étape 2 : le maximum est atteint.** Posons $M = \sup_{[a,b]} f$. Il existe (x_n) dans $[a, b]$ avec $f(x_n) \rightarrow M$. Par Bolzano-Weierstraß, on extrait $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow x_{\max} \in [a, b]$. Par continuité, $f(x_{\max}) = M$.

Le raisonnement est symétrique pour le minimum.

4.5.6 Théorème de la bijection

Théorème 4.26 : (*Théorème de la bijection continue*)

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continu** et **strictement monotone**. Alors :

- (1) f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (si croissante) ou $[f(b), f(a)]$ (si décroissante).
- (2) La bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone dans le même sens.

Preuve :

L'injectivité découle de la monotonie stricte. La surjectivité découle du TVI (toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte). La continuité de f^{-1} découle du fait qu'une bijection strictement monotone sur un intervalle dont l'image est un intervalle est nécessairement continue (propriété caractéristique des intervalles).

Exemple :

- (1) $x \mapsto x^n$ ($n \geq 1$) est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, de réciproque $x \mapsto x^{1/n}$ continue.
- (2) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est bijective, de réciproque \ln continue sur $]0, +\infty[$.
- (3) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est bijective, de réciproque \arcsin continue sur $[-1, 1]$.