Mathématiques 2012–2013

TD d'Analyse 2

Philippe JOUAN,

Bureau n^{o} M.1.11

philippe.jouan@univ-rouen.fr

Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem,

Avenue de l'Université, BP.12,

F76801 Saint-Étienne-du-Rouvray.

Rédigé avec LaTeX

par Hicham AMARIR

le 11 octobre 2026

Table des matières

Fiche n°1 – Limites de fonctions **3**

Corrigé de la fiche n°1 – Limites de fonctions **6**

Fiche n°2 – Fonctions continues sur un intervalle **27**

Corrigé de la fiche n°2 – Fonctions continues sur un intervalle **29**

Fiche n°3 – Dérivation des fonctions réelles d'une variable réelle **32**

Corrigé de la fiche n°3 – Dérivation des fonctions réelles d'une variable réelle **35**

Fiche n°4 – Calcul d'intégrales **39**

Corrigé de la fiche n°4 – Calcul d'intégrales **41**

Fiche n°5 – Équivalents et développements limités **43**

Corrigé de la fiche n°5 – Équivalents et développements limités **45**

Université de Rouen

Mathématiques — Analyse 2.

L1 M.I.E.E.A. — Fiche n°1.

Année 2012-2013 — Limites de fonctions.

Exercice 1.

Calculer les limites suivantes :

① $\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3-2x^2+x+1\right)$

② $\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+3x+9\right)$

③ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-2x\right)$

④ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

⑤ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+3x\right)$

⑥ $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2+x-2}{2x^2-8}\right)$

⑦ $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}\right)$

⑧ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

⑨ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-1-\sqrt{x^2+1}\right)$

⑩ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}\right)$

Exercice 2.

On rappelle que $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$.

Calculer les limites suivantes :

① $\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)$

② $\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 5x}{\sin x}\right)$

③ $\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+1}{\sin^2 x}\right)$

④ $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x-\sin 5x}{\sin x+\sin 5x}\right)$

⑤ $\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

⑥ $\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

⑦ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(4x\tan(2x)-\frac{\pi}{\cos 2x}\right)$

Exercice 3.

Déterminer les constantes a et b pour que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie ci-dessous soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\leqslant 1\\ ax+b & \text{si } 1<x<2\\ x^3 & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$$

Exercice 4.

Déterminer si les fonctions définies ci-dessous sont prolongeables par continuité en 0.

① $u_1(x) = \frac{1}{x}$

② $u_2(x) = \frac{x}{|x|}$

③ $u_3(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

④ $u_4(x) = E\left(\frac{1}{x}\right)$

⑤ $u_5(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 5.

La fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ par :

$$f(x) = 1 - x - \frac{2x\ln|x|}{x+1}$$

peut-elle être prolongée par continuité en -1 ? en 0 ?

Exercice 6.

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies :

① La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

② La somme d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.

③ La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.

④ La somme de deux fonctions discontinues en un point est continue en ce point.

⑤ Le produit de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

⑥ Le produit d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(2x) = f(x)$.

① Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

② En déduire que f est constante.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

① Montrer que $f(0) = 0$ et que f est une fonction impaire.

② Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx) = nf(x)$.

③ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}$.

④ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = xf(1)$.

⑤ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = xf(1)$.

Exercice 9.

Montrer que la fonction χ définie par :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 10.

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

① Étudier la continuité de la fonction f en $x = \frac{1}{2}$.

② Étudier la continuité de la fonction f sur $[0,1]$.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, T-périodique, avec $T > 0$.

Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.

Exercice 1.

Calculer les limites suivantes :

① $\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3-2x^2+x+1\right)$

② $\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+3x+9\right)$

③ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-2x\right)$

④ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

⑤ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+3x\right)$

⑥ $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2+x-2}{2x^2-8}\right)$

⑦ $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}\right)$

⑧ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

⑨ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-1-\sqrt{x^2+1}\right)$

⑩ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}\right)$

Correction de l'exercice 1.

① **Limite de** $-x^3-2x^2+x+1$ **en** $+\infty$ **:**

On a une forme indéterminée $\infty-\infty$.

Pour tout $x\neq0$, on factorise par x^3 :

$$-x^3-2x^2+x+1=x^3\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-1$$

Par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3-2x^2+x+1\right)=-\infty$$

② **Limite de** $-3x^3+3x+9$ **en** $-\infty$ **:**

On a une forme indéterminée.

Pour tout $x\neq0$, on factorise par x^3 :

$$-3x^3+3x+9=x^3\left(-3+\frac{3}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right)$$

On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{3}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right)=-3$$

Par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+3x+9\right)=+\infty$$

③ **Limite de $\sqrt{2x^2+1}-2x$ en $+\infty$:**

On a une forme indéterminée $\infty-\infty$.

Méthode 1 : Quantité conjuguée

Pour tout $x>0$, on utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+1}-2x&=\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{2x^2+1}+2x}\\&=\frac{2x^2+1-4x^2}{\sqrt{2x^2+1}+2x}\\&=\frac{1-2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+2x}\end{aligned}$$

Pour tout $x>0$, on factorise par x^2 au numérateur et par x au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{1-2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+2x}&=\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-2\right)}{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+2\right)}\\&=x\times\frac{\frac{1}{x^2}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+2}\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{-2}{\sqrt{2}+2}<0$$

Par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-2x\right)=-\infty$$

Méthode 2 : Factorisation par x^2

Pour tout $x>0$, on factorise par x^2 sous la racine :

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+1}&=\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}\\&=|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\\&=x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

On peut alors réécrire l'expression :

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+1}-2x&=x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-2x\\&=x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-2\right)\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

Par composition avec la fonction racine carrée, qui est continue en 2, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2}$$

Par différence, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-2\right)=\sqrt{2}-2<0$$

Et on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Par produit d'une limite tendant vers $+\infty$ par une limite strictement négative, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-2x\right)=-\infty$$

④ **Limite de $\sqrt{x^2+1}-x$ en $+\infty$:**

On a une forme indéterminée.

Pour tout $x>0$, on utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-x&=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Par somme, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=+\infty$$

Par quotient, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=0\end{aligned}$$

⑤ **Limite de $\sqrt{4x^2+1}+3x$ en $-\infty$:**

On a une forme indéterminée.

Méthode 1 : Quantité conjuguée

Pour tout $x<0$, on utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2+1}+3x&=\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+3x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-3x\right)}{\sqrt{4x^2+1}-3x}\\&=\frac{4x^2+1-9x^2}{\sqrt{4x^2+1}-3x}\\&=\frac{1-5x^2}{\sqrt{4x^2+1}-3x}\end{aligned}$$

Pour tout $x<0$, on a $\sqrt{x^2}=-x$. On factorise par x^2 au numérateur et par $-x$ au dénominateur :

$$\frac{1-5x^2}{\sqrt{4x^2+1}-3x}=\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-5\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3\right)}$$

$$= -x \times \frac{\frac{1}{x^2} - 5}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 3}$$

On sait que :

$$\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 5}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 3} = \frac{-5}{2+3} = -1 < 0$$

Par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} + 3x \right) = -\infty$$

Méthode 2 : Factorisation par x^2

Pour tout $x < 0$, on factorise par x^2 sous la racine :

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 1} &= \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \\ &= |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

Puisque $x \to -\infty$, on a $x < 0$, ce qui implique $|x| = -x$. On peut alors réécrire l'expression :

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 1} + 3x &= -x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 3x \\ &= x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 3 \right) \end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Par composition avec la fonction racine carrée, qui est continue en 4, on en déduit que :

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{4} = 2$$

Par différence, on obtient :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 3 \right) = -2 + 3 = 1 > 0$$

Et on sait que :

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Par produit d'une limite tendant vers $-\infty$ par une limite strictement positive, on en déduit que :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} + 3x \right) = -\infty$$

⑥ **Limite de $\dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 8}$ en -2 :**

On a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Factorisons le numérateur et le dénominateur.

Pour le numérateur, -2 est racine de $x^2 + x - 2$. On factorise :

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Pour le dénominateur :

$$2x^2-8=2\left(x^2-4\right)=2\,(x-2)\,(x+2)$$

Pour tout $x\neq -2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-2}{2x^2-8}&=\frac{(x+2)\,(x-1)}{2\,(x-2)\,(x+2)}\\&=\frac{x-1}{2\,(x-2)}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{2x^2-8}&=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{2\,(x-2)}\\&=\frac{-2-1}{2\,(-2-2)}\\&=\frac{-3}{-8}\\&=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

⑦ **Limite de $\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$ en 1 :**

On a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Factorisons le numérateur et le dénominateur.

Pour le numérateur, 1 est racine de x^3-3x+2. On factorise par $(x-1)$:

Division euclidienne :

x^3-3x+2	$x-1$
$-\left(x^3-x^2\right)$	x^2+x-2
x^2-3x+2	
$-\left(x^2-x\right)$	
$-2x+2$	
$-(-2x+2)$	
0	

x^2+x-2	$x-1$
$-\left(x^2-x\right)$	$x+2$
$2x-2$	
$-(2x-2)$	
0	

$$\begin{aligned}x^3-3x+2&=(x-1)\left(x^2+x-2\right)\\&=(x-1)\,(x-1)\,(x+2)\\&=(x-1)^2\,(x+2)\end{aligned}$$

Pour le dénominateur, soit on refait des divisions euclidiennes par $(x-1)$, soit on reconnaît une identité remarquable :

$$\begin{aligned}x^4-2x^2+1&=\left(x^2\right)^2-2\times x^2\times 1+1^2\\&=\left(x^2-1\right)^2\\&=\left((x-1)\,(x+1)\right)^2\\&=(x-1)^2\,(x+1)^2\end{aligned}$$

Pour tout $x \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1} &= \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)^2}\\ &= \frac{x+2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1+2}{(1+1)^2}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

⑧ **Limite de $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$:**

On a une forme indéterminée.

Pour tout $x > 0$, on utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$, on factorise par $\sqrt{x}$ au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Par composition, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

⑨ **Limite de $\sqrt{x^2+3x}-1-\sqrt{x^2+1}$ en $-\infty$:**

On regroupe les termes avec racines.

Pour tout $x < 0$ tel que $x^2+3x \geqslant 0$ (c'est-à-dire $x \leqslant -3$), on utilise la quantité conjuguée sur $\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{x^2+3x-x^2-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

Pour tout $x<0$, on a $\sqrt{x^2}=-x$. On factorise par x au numérateur et par $-x$ au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} &= \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\\ &= \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\\ &= \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\\ &= \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\\ &= \frac{3-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

Par composition et opérations, on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{3}{-\sqrt{1}-\sqrt{1}}=-\frac{3}{2}$$

Par somme, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-1-\sqrt{x^2+1}\right)=-\frac{3}{2}-1=-\frac{5}{2}$$

⑩ **Limite de $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$:**

On a une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on factorise par e^{3x} au numérateur et par e^x au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}} &= \frac{e^{3x}\left(1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}\\ &= e^{2x}\times\frac{1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}}{1+e^{-2x}}\end{aligned}$$

D'après les croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-3x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}e^{-3x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}}{1+e^{-2x}}=1$$

Et on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$$

Par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}=+\infty$$

Exercice 2.

On rappelle que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$.

Calculer les limites suivantes :

① $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)$

② $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 5x}{\sin x}\right)$

③ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{(\sin x)^2}\right)$

④ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\sin 5x}{\sin x+\sin 5x}\right)$

⑤ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

⑥ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

⑦ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(4x\tan(2x)-\frac{\pi}{\cos 2x}\right)$

Correction de l'exercice 2.

① Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x\neq 0$, on a :

$$\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\cos x=1$$

Par produit, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)\\&=1\times 1\\&=1\end{aligned}$$

② Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{10}\right[$ tel que $x\neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\tan 5x}{\sin x}&=\frac{\sin 5x}{\cos 5x}\times\frac{1}{\sin x}\\&=\frac{\sin 5x}{5x}\times\frac{5x}{x}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{1}{\cos 5x}\\&=5\times\frac{\sin 5x}{5x}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{1}{\cos 5x}\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\cos 5x=1$$

Par produit, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin x}&=\lim_{x\to 0}\left(5\times\frac{\sin 5x}{5x}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{1}{\cos 5x}\right)\\&=5\times 1\times 1\times 1\\&=5\end{aligned}$$

③ On sait que :

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)=1$$

De plus, pour tout $x \neq 0$ au voisinage de 0, on a $(\sin x)^2 > 0$ et :

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)^2 = 0$$

Par quotient, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{(\sin x)^2} = +\infty$$

④ Pour tout x tel que $\sin x + \sin 5x \neq 0$, on divise le numérateur et le dénominateur par x :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 5x} &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 5x}{x}} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - 5\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{x} + 5\frac{\sin 5x}{5x}}\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$$

Par opérations sur les limites, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 5x} &= \frac{1 - 5\times 1}{1 + 5\times 1} \\ &= \frac{-4}{6} \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

⑤ **Méthode 1 : Quantité conjuguée**

Pour tout $x \neq 0$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $1 + \cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \frac{(\sin x)^2}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\cos x}\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Par opérations sur les limites, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\cos x}\right) \\ &= 1^2 \times \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Méthode 2 : Utilisation d'une identité trigonométrique

On rappelle l'identité trigonométrique suivante (formule de linéarisation) : pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$1 - \cos(2a) = 2(\sin a)^2$$

En posant $a = \frac{x}{2}$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos x = 2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2$$

En utilisant l'identité précédente, on a pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2}{x^2} \\ &= 2 \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \end{aligned}$$

On réécrit chaque fraction en faisant apparaître $\frac{x}{2}$ au dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos x}{x^2} &= 2 \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \times \frac{x}{2}} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \times \frac{x}{2}} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0$$

En posant $X = \frac{x}{2}$, lorsque $x \to 0$, on a $X \to 0$. Par la limite usuelle rappelée, on obtient :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

Par produit, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

⑥ Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^3} \\ &= \frac{\sin x \left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{x^3} \\ &= \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On sait également que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times 1$$
$$= \frac{1}{2}$$

⑦ On pose le changement de variable $X = x - \frac{\pi}{4}$.

Lorsque $x \to \frac{\pi}{4}$, on a $X \to 0$.

De plus, $x = X + \frac{\pi}{4}$, donc $2x = 2X + \frac{\pi}{2}$.

On utilise les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\tan(2x) &= \tan\left(2X + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{\tan 2X}\\ &= -\frac{\cos 2X}{\sin 2X}\\ \cos(2x) &= \cos\left(2X + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin 2X\end{aligned}$$

On aurait pu aussi utiliser la définition de tangente :

$$\begin{aligned}\tan(2x) &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\\ &= \frac{\sin\left(2X + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2X + \frac{\pi}{2}\right)}\\ &= \frac{\cos 2X}{-\sin 2X}\\ &= -\frac{\cos 2X}{\sin 2X}\end{aligned}$$

L'expression devient :

$$\begin{aligned}4x\tan(2x) - \frac{\pi}{\cos 2x} &= 4\left(X + \frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{\cos 2X}{\sin 2X}\right) - \frac{\pi}{-\sin 2X}\\ &= -\frac{(4X+\pi)\cos 2X}{\sin 2X} + \frac{\pi}{\sin 2X}\\ &= \frac{-4X\cos 2X - \pi\cos 2X + \pi}{\sin 2X}\\ &= \frac{-4X\cos 2X + \pi(1-\cos 2X)}{\sin 2X}\end{aligned}$$

Pour tout $X \neq 0$ au voisinage de 0, on divise le numérateur et le dénominateur par $2X$:

$$\frac{-4X\cos 2X + \pi(1-\cos 2X)}{\sin 2X} = \frac{-2\cos 2X + \pi\frac{1-\cos 2X}{2X}}{\frac{\sin 2X}{2X}}$$

Étudions la limite de $\frac{1-\cos 2X}{2X}$ lorsque $X \to 0$.

On sait que $1 - \cos 2X = 2(\sin X)^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos 2X}{2X} &= \frac{2(\sin X)^2}{2X}\\ &= \frac{\sin X}{X} \times \sin X\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X\to 0} \sin X = 0$$

Par produit, on en déduit que :

$$\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos 2X}{2X} = 0$$

On sait également que :

$$\lim_{X\to 0} \cos 2X = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X\to 0} \frac{\sin 2X}{2X} = 1$$

Par opérations sur les limites, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(4x\tan(2x) - \frac{\pi}{\cos 2x}\right) &= \lim_{X\to 0} \frac{-2\cos 2X + \pi\frac{1-\cos 2X}{2X}}{\frac{\sin 2X}{2X}} \\ &= \frac{-2\times 1 + \pi\times 0}{1} \\ &= -2\end{aligned}$$

Exercice 3.

Déterminer les constantes a et b pour que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie ci-dessous soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ ax+b & \text{si } 1 < x < 2 \\ x^3 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3.

La fonction f est définie par morceaux à l'aide de fonctions polynômes, qui sont continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f est continue sur $]-\infty, 1[$, sur $]1, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

Les seuls points où la continuité n'est pas automatique sont les points de raccordement $x = 1$ et $x = 2$.

Continuité en $x = 1$:

Calculons la limite à gauche de f en 1 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Calculons la limite à droite de f en 1 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (ax+b) \\ &= a+b\end{aligned}$$

La valeur de f en 1 est :

$$\begin{aligned}f(1) &= 1^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

La fonction f est continue en 1 si et seulement si la limite à gauche, la limite à droite et la valeur en 1 coïncident, c'est-à-dire :

$$a+b = 1$$

Continuité en $x = 2$:

Calculons la limite à gauche de f en 2 :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax + b)$$
$$= 2a + b$$

Calculons la limite à droite de f en 2 :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^3$$
$$= 8$$

La valeur de f en 2 est :

$$f(2) = 2^3$$
$$= 8$$

La fonction f est continue en 2 si et seulement si :

$$2a + b = 8$$

Résolution du système :

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les deux conditions précédentes sont simultanément vérifiées.

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 8 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation à la deuxième, on obtient :

$$(2a + b) - (a + b) = 8 - 1$$
$$a = 7$$

En remplaçant a par 7 dans la première équation, on obtient :

$$7 + b = 1$$
$$b = -6$$

Conclusion :

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$a = 7 \quad \text{et} \quad b = -6$$

Exercice 4.

Déterminer si les fonctions définies ci-dessous sont prolongeables par continuité en 0.

① $u_1(x) = \frac{1}{x}$

② $u_2(x) = \frac{x}{|x|}$

③ $u_3(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

④ $u_4(x) = E\left(\frac{1}{x}\right)$

⑤ $u_5(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Correction de l'exercice 4.

① Étudions la limite de u_1 en 0.

On sait que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

La limite à droite n'est pas finie.

La fonction u_1 n'est donc **pas prolongeable** par continuité en 0.

② Étudions la limite de u_2 en 0.

Pour tout $x > 0$, on a $|x| = x$, donc :

$$u_2(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+} u_2(x) = 1$$

Pour tout $x < 0$, on a $|x| = -x$, donc :

$$u_2(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0^-} u_2(x) = -1$$

Les limites à gauche et à droite en 0 sont différentes.

La fonction u_2 n'est donc **pas prolongeable** par continuité en 0.

③ Étudions la limite de u_3 en 0.

Pour tout $x \neq 0$, on sait que :

$$-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$$

En multipliant par $|x| > 0$, on obtient :

$$-|x| \leqslant |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|$$

Or, pour tout $x \neq 0$:

$$\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$$

Donc :

$$-|x| \leqslant x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} (-|x|) = 0$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

La limite existe et est finie.

La fonction u_3 est donc **prolongeable** par continuité en 0 en posant $u_3(0) = 0$.

④ Étudions la limite de u_4 en 0.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$E(y) \leqslant y < E(y) + 1$$

Donc

$$y - 1 < E(y) \leqslant y$$

Pour $x > 0$, on a $\frac{1}{x} > 0$, donc :

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$$

On sait que :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty$$

Par comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

La limite à droite n'est pas finie.

La fonction u_4 n'est donc **pas prolongeable** par continuité en 0.

⑤ Étudions la limite de u_5 en 0.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$E(y) \leqslant y < E(y) + 1$$

$y < E(y) + 1$ implique que $y - 1 < E(y)$. Comme $E(y) \leqslant y$ on a par transitivité de la relation d'ordre :

$$y - 1 < E(y) \leqslant y$$

En posant $y = \frac{1}{x}$ avec $x \neq 0$, on obtient :

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$$

Limite à droite :

Pour $x > 0$, en multipliant par $x > 0$, les inégalités sont conservées :

$$1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$$

On sait que :

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - x) = 1$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Limite à gauche :

Pour $x<0$, en multipliant par $x<0$, les inégalités s'inversent :

$$1-x>xE\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant 1$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0^-}xE\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

Les limites à gauche et à droite en 0 sont égales à 1.

La fonction u_5 est donc **prolongeable** par continuité en 0 en posant $u_5(0)=1$.

Exercice 5.

La fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ par :

$$f(x)=1-x-\frac{2x\ln|x|}{x+1}$$

peut-elle être prolongée par continuité en -1 ? en 0 ?

Correction de l'exercice 5.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

Prolongement par continuité en -1 :

Étudions la limite de f en -1.

Posons le changement de variable $h=x+1$.

Lorsque $x\to -1$, on a $h\to 0$.

De plus, $x=h-1$.

L'expression de $f(x)$ devient :

$$\begin{aligned}f(x)&=1-(h-1)-\frac{2(h-1)\ln|h-1|}{h}\\&=2-h-2\frac{h-1}{h}\ln|h-1|\end{aligned}$$

Pour h au voisinage de 0, on a $h-1<0$, donc $|h-1|=1-h$.

On peut alors réécrire :

$$\begin{aligned}f(x)&=2-h-2\left(1-\frac{1}{h}\right)\ln(1-h)\\&=2-h-2\ln(1-h)+2\frac{\ln(1-h)}{h}\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{h\to 0}(2-h)=2\quad\text{et}\quad\lim_{h\to 0}\ln(1-h)=0$$

De plus, on connaît la limite usuelle :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

En posant $X=-h$, lorsque $h\to 0$, on a $X\to 0$, et :

$$\frac{\ln(1-h)}{h}=\frac{\ln(1+X)}{-X}=-\frac{\ln(1+X)}{X}$$

On en déduit que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1-h)}{h}=-1$$

Par opérations sur les limites, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{h\to 0}\left(2-h-2\ln(1-h)+2\frac{\ln(1-h)}{h}\right)\\ &= 2-0-2\times 0+2\times(-1)\\ &= 0\end{aligned}$$

La limite de f en -1 existe et est finie.

La fonction f est donc **prolongeable** par continuité en -1 en posant $f(-1)=0$.

Prolongement par continuité en 0 :

Étudions la limite de f en 0.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$, on peut écrire :

$$f(x)=1-x-\frac{2}{x+1}\times x\ln|x|$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0}(1-x)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{2}{x+1}=2$$

De plus, d'après les croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x|=0$$

Par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x+1}\times x\ln|x|=2\times 0=0$$

Par somme, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\left(1-x-\frac{2}{x+1}\times x\ln|x|\right)\\ &= 1-0-0\\ &= 1\end{aligned}$$

La limite de f en 0 existe et est finie.

La fonction f est donc **prolongeable** par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.

Exercice 6.

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies :

① La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

② La somme d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.

③ La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.

④ La somme de deux fonctions discontinues en un point est continue en ce point.

⑤ Le produit de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

⑥ Le produit d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.

Correction de l'exercice 6.

① **Vraie.**

C'est un résultat classique : la somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

Plus précisément, si f et g sont deux fonctions continues en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Par somme des limites, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\big(f+g\big)(x) &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a) + g(a)\\ &= \big(f+g\big)(a)\end{aligned}$$

La fonction $f+g$ est donc continue en a.

② **Vraie.**

Démontrons ce résultat par l'absurde.

Soient f une fonction continue en a et g une fonction discontinue en a.

Supposons que la fonction $f+g$ soit continue en a.

On peut écrire $g = \big(f+g\big) - f$.

La fonction $f+g$ est continue en a par hypothèse, et la fonction f est continue en a par hypothèse.

Par différence de deux fonctions continues en a, la fonction g serait continue en a.

Cela contredit l'hypothèse selon laquelle g est discontinue en a.

Par conséquent, la fonction $f+g$ est discontinue en a.

③ **Fausse.**

La somme de deux fonctions discontinues en un point n'est pas nécessairement discontinue en ce point.

Donnons un contre-exemple pour montrer que la négation de l'assertion est vraie.

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0\\ -1 & \text{si } x < 0\end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \geqslant 0\\ 1 & \text{si } x < 0\end{cases}$$

La fonction f est discontinue en 0 car :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

Les limites à gauche et à droite en 0 sont différentes.

De même, la fonction g est discontinue en 0 car :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$$

Les limites à gauche et à droite en 0 sont différentes.

Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x) = 0$$

La fonction $f+g$ est la fonction nulle, qui est continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0.

④ **Fausse.**

La somme de deux fonctions discontinues en un point n'est pas nécessairement continue en ce point.

Reprenons le contre-exemple de la question précédente avec une modification.

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont toutes les deux discontinues en 0.

Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction $f+g$ est discontinue en 0 car :

$$\lim_{x \to 0^+} (f+g)(x) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} (f+g)(x) = -3$$

Les limites à gauche et à droite en 0 sont différentes.

⑤ **Vraie.**

C'est un résultat classique : le produit de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

Plus précisément, si f et g sont deux fonctions continues en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Par produit des limites, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f \times g)(x) &= \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) \times g(a) \\ &= (f \times g)(a) \end{aligned}$$

La fonction $f \times g$ est donc continue en a.

⑥ **Fausse.**

Le produit d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point n'est pas nécessairement discontinue en ce point.

Donnons un contre-exemple.

Soit f la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction g est discontinue en 0 car :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$$

Les limites à gauche et à droite en 0 sont différentes.

Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = 0 \times g(x) = 0$$

La fonction $f \times g$ est la fonction nulle, qui est continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(2x) = f(x)$.

① Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

② En déduire que f est constante.

Correction de l'exercice 7.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

① Montrer que $f(0) = 0$ et que f est une fonction impaire.

② Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx) = nf(x)$.

③ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}$.

④ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = xf(1)$.

⑤ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = xf(1)$.

Correction de l'exercice 8.

Exercice 9.

Montrer que la fonction χ définie par :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9.

Exercice 10.

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

① Étudier la continuité de la fonction f en $x = \frac{1}{2}$.

② Étudier la continuité de la fonction f sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 10.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, T-périodique, avec $T > 0$.

Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.

Correction de l'exercice 11.

Analyse 2.
Fiche n°2.
Fonctions continues sur un intervalle.

Exercice 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $[a;b] \subset I$.

Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?

① La restriction de f à $[a;b]$ est continue.

② f est continue en tout point de $[a;b]$.

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

① Montrer que

$$\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

② Les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont-elles continues ?

③ Exprimer les fonctions $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0) = -\inf(f,0)$ en fonction de f et de $|f|$.

Les fonctions f^+ et f^- sont-elles continues ?

Exercice 3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$ et telle que $f(I) \subset I$.

Montrer que f possède au moins un point fixe.

Exercice 4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Trouver toutes les fonctions f continues sur I dont l'image $f(I)$ ne contient qu'un nombre fini de points.

Exercice 5.

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$.

① On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$.

Montrer que f est bornée.

② On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 6.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

① L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.

② L'image par f d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

③ L'image par f d'une partie bornée est bornée.

④ L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.

Mêmes questions en supposant f continue et strictement monotone.

Quelques exercices plus difficiles

Exercice 7.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ qui admet une limite finie en $+\infty$.

Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 8.

Soit f continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f admet un point fixe unique.

Exercice 9.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On définit l'application φ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \sup_{t\in[a,b]} \big(f(t) + xg(t)\big)$$

① Représenter graphiquement φ lorsque $[a, b] = [0, 1]$, $f(t) = 1$ et $g(t) = t$ pour tout t.

② ⓐ Montrer que pour x fixé il existe $t_x \in [a, b]$ tel que

$$\varphi(x) = f(t_x) + xg(t_x)$$

ⓑ En déduire une majoration de $\big|\varphi(x) - \varphi(y)\big|$.

ⓒ Montrer que φ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $[a;b] \subset I$.

Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?

① La restriction de f à $[a;b]$ est continue.

② f est continue en tout point de $[a;b]$.

Correction de l'exercice 1.

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

① Montrer que

$$\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

② Les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont-elles continues ?

③ Exprimer les fonctions $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0) = -\inf(f,0)$ en fonction de f et de $|f|$.

Les fonctions f^+ et f^- sont-elles continues ?

Correction de l'exercice 2.

Exercice 3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$ et telle que $f(I) \subset I$.

Montrer que f possède au moins un point fixe.

Correction de l'exercice 3.

Exercice 4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Trouver toutes les fonctions f continues sur I dont l'image $f(I)$ ne contient qu'un nombre fini de points.

Correction de l'exercice 4.

Exercice 5.

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$.

① On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$.

Montrer que f est bornée.

② On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Correction de l'exercice 5.

Exercice 6.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

① L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.

② L'image par f d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

③ L'image par f d'une partie bornée est bornée.

④ L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.

Mêmes questions en supposant f continue et strictement monotone.

Correction de l'exercice 6.

Quelques exercices plus difficiles

Exercice 7.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ qui admet une limite finie en $+\infty$.

Montrer que f est uniformément continue.

Correction de l'exercice 7.

Exercice 8.

Soit f continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f admet un point fixe unique.

Correction de l'exercice 8.

Exercice 9.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On définit l'application φ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \sup_{t\in[a,b]} \big(f(t) + xg(t)\big)$$

① Représenter graphiquement φ lorsque $[a, b] = [0, 1]$, $f(t) = 1$ et $g(t) = t$ pour tout t.

② ⓐ Montrer que pour x fixé il existe $t_x \in [a, b]$ tel que

$$\varphi(x) = f(t_x) + xg(t_x)$$

ⓑ En déduire une majoration de $\big|\varphi(x) - \varphi(y)\big|$.

ⓒ Montrer que φ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9.

Exercice 1.

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, préciser :

- ⊛ l'ensemble sur lequel la fonction est définie,
- ⊛ l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable
- ⊛ puis déterminer la fonction dérivée.

$$f_1(x) = \sin^2(x) \qquad f_2(x) = \cos^3(2x)$$
$$f_3(x) = \tan^2(2x) \qquad f_4(x) = \sqrt{3x}$$
$$f_5(x) = \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3-1} \qquad f_6(x) = \sin(x)\cos(x)$$
$$f_7(x) = \frac{-2}{5x} \qquad f_8(x) = \frac{3}{x^2}$$
$$f_9(x) = \tan(x)+1 \qquad f_{10}(x) = x\sin\left(\frac{-2}{x}\right)$$
$$f_{11}(x) = \ln\left(\frac{3}{x}\right) \qquad f_{12}(x) = \ln\left(x^2+x+1\right)$$
$$f_{13}(x) = \ln(\ln(x)) \qquad f_{14}(x) = \frac{x}{2}\Big(\sin\big(\ln(x)\big) - \cos\big(\ln(x)\big)\Big)$$
$$f_{15}(x) = x^x \qquad f_{16}(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+1)}$$
$$f_{17}(x) = \frac{x+1}{x+2} \qquad f_{18}(x) = \frac{x}{x^2+1}$$
$$f_{19}(x) = \frac{x^8}{1+x^8} \qquad f_{20}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f_{21}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-2}{\sqrt{1+x^2}+2}\right) \qquad f_{22}(x) = \ln\left(\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{4+x^3}}\right)$$
$$f_{23}(x) = \mathrm{Arctan}(2\tan(x)) \qquad f_{24}(x) = \mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}$$
$$f_{25}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \qquad f_{26}(x) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)$$

Exercice 2.

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies.

① Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

② Toute fonction continue en un point est dérivable en ce point.

③ Toute fonction non dérivable en un point est discontinue en ce point.

④ La somme de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point.

⑤ La somme d'une fonction dérivable en un point et d'une fonction non dérivable en ce point est dérivable en ce point.

⑥ La somme de deux fonctions non dérivables en un point est non dérivable en ce point.

⑦ La somme de deux fonctions non dérivables en un point est dérivable en ce point.

⑧ Le produit de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point.

⑨ Le produit d'une fonction dérivable en un point et d'une fonction non dérivable en ce point est non dérivable en ce point.

Exercice 3.

Soit f une fonction positive et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle qu'il existe une constante C telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \leqslant Cf(x)$.

① On pose $h(x) = e^{-Cx} f(x)$.

Montrer que h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

② Montrer que $f(x) \leqslant f(0)e^{Cx}$.

Que peut-on en déduire si de plus $f(0) = 0$?

Exercice 4.

Montrer que si f est une fonction dérivable en un point a alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

Exercice 5.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+3h) - f^2(x-h)}{h}$$

Exercice 6.

Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels qui possède n racines réelles distinctes.

Montrer que P' admet $n-1$ racines distinctes.

Exercice 7.

① En appliquant la formule des accroissements finis sur $[x, x+1]$ à la fonction ln, montrer que :

$$\forall\, x > 0, \quad x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

puis que :

$$\forall\, x > 0, \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

② En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(1+n)^n}{n!} < e^n < \frac{(1+n)^{n+1}}{n!}$$

Exercice 8.

Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que la suite définie par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 9.

Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions définies ci-dessous.

$$f_1(x) = \ln(1+x), \qquad f_2(x) = \frac{1-x}{1+x},$$
$$f_3(x) = \sin^2(x), \qquad f_4(x) = x^2 \sin(x),$$
$$f_5(x) = \left(x^2+1\right)e^{2x}, \qquad f_6(x) = x^{n-1}\ln(x)$$

Exercice 10.

① Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

② On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sup(1, e^x)$.

Montrer que

$$\left|e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\right| \leqslant S(x)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

③ En déduire que

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

④ Montrer que

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Exercice 1.

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, préciser :

- ⊛ l'ensemble sur lequel la fonction est définie,
- ⊛ l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable
- ⊛ puis déterminer la fonction dérivée.

$$f_1(x)=\sin^2(x) \qquad f_2(x)=\cos^3(2x)$$
$$f_3(x)=\tan^2(2x) \qquad f_4(x)=\sqrt{3x}$$
$$f_5(x)=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3-1} \qquad f_6(x)=\sin(x)\cos(x)$$
$$f_7(x)=\frac{-2}{5x} \qquad f_8(x)=\frac{3}{x^2}$$
$$f_9(x)=\tan(x)+1 \qquad f_{10}(x)=x\sin\left(\frac{-2}{x}\right)$$
$$f_{11}(x)=\ln\left(\frac{3}{x}\right) \qquad f_{12}(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$$
$$f_{13}(x)=\ln(\ln(x)) \qquad f_{14}(x)=\frac{x}{2}\Big(\sin\big(\ln(x)\big)-\cos\big(\ln(x)\big)\Big)$$
$$f_{15}(x)=x^x \qquad f_{16}(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+1)}$$
$$f_{17}(x)=\frac{x+1}{x+2} \qquad f_{18}(x)=\frac{x}{x^2+1}$$
$$f_{19}(x)=\frac{x^8}{1+x^8} \qquad f_{20}(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f_{21}(x)=\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-2}{\sqrt{1+x^2}+2}\right) \qquad f_{22}(x)=\ln\left(\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{4+x^3}}\right)$$
$$f_{23}(x)=\operatorname{Arctan}(2\tan(x)) \qquad f_{24}(x)=\operatorname{Arcsin}(x)+\sqrt{1-x^2}$$
$$f_{25}(x)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \qquad f_{26}(x)=\operatorname{Arccos}\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)$$

Correction de l'exercice 1.

Exercice 2.

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies.

① Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

② Toute fonction continue en un point est dérivable en ce point.

③ Toute fonction non dérivable en un point est discontinue en ce point.

④ La somme de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point.

⑤ La somme d'une fonction dérivable en un point et d'une fonction non dérivable en ce point est dérivable en ce point.

⑥ La somme de deux fonctions non dérivables en un point est non dérivable en ce point.

⑦ La somme de deux fonctions non dérivables en un point est dérivable en ce point.

⑧ Le produit de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point.

⑨ Le produit d'une fonction dérivable en un point et d'une fonction non dérivable en ce point est non dérivable en ce point.

Correction de l'exercice 2.

Exercice 3.

Soit f une fonction positive et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle qu'il existe une constante C telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \leqslant Cf(x)$.

① On pose $h(x) = e^{-Cx} f(x)$.

Montrer que h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

② Montrer que $f(x) \leqslant f(0)e^{Cx}$.

Que peut-on en déduire si de plus $f(0) = 0$?

Correction de l'exercice 3.

Exercice 4.

Montrer que si f est une fonction dérivable en un point a alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

Correction de l'exercice 4.

Exercice 5.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+3h) - f^2(x-h)}{h}$$

Correction de l'exercice 5.

Exercice 6.

Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels qui possède n racines réelles distinctes.

Montrer que P' admet $n-1$ racines distinctes.

Correction de l'exercice 6.

Exercice 7.

① En appliquant la formule des accroissements finis sur $[x, x+1]$ à la fonction ln, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

puis que :

$$\forall x > 0, \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

② En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(1+n)^n}{n!} < e^n < \frac{(1+n)^{n+1}}{n!}$$

Correction de l'exercice 7.

Exercice 8.

Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que la suite définie par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

Correction de l'exercice 8.

Exercice 9.

Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions définies ci-dessous.

$$f_1(x) = \ln(1+x), \qquad f_2(x) = \frac{1-x}{1+x},$$
$$f_3(x) = \sin^2(x), \qquad f_4(x) = x^2 \sin(x),$$
$$f_5(x) = \left(x^2+1\right) e^{2x}, \qquad f_6(x) = x^{n-1} \ln(x)$$

Correction de l'exercice 9.

Exercice 10.

① Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

② On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sup(1, e^x)$.

Montrer que

$$\left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} \right| \leqslant S(x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

③ En déduire que

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

④ Montrer que

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Correction de l'exercice 10.

Analyse 2.
Fiche n°4.
Calcul d'intégrales.

Exercice 1.

Calcul direct par primitives.

$$\int_0^1 \left(1+2x+3x^2+4x^3\right)\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \qquad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^4} \qquad \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{ch}(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^3 \mathrm{sh}(3x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2.

Intégration par parties.

① $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$

② $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x$

③ $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$

④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

⑤ $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t}\,\mathrm{d}t$

⑥ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ (faire deux intégrations par parties successives).

⑦ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

① $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{e^t+e^{-t}}$. Poser $u=e^t$.

② $\displaystyle\int_0^x t(2t+1)^n\,\mathrm{d}t$, où $n\in\mathbb{N}$. Poser $u=2t+1$.

③ $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$, où $x>1$. Poser $u=\frac{1}{t}$.

④ $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t$. Poser $u=\sin(t)$.

Exercice 4.

Calculer les primitives des fonctions trigonométriques suivantes :

① $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$.

② $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\,\mathrm{d}x$.

③ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$.

④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5.

Quelques racines.

① $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

② $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$. Transformer x^2+4 en u^2+1.

Exercice 6.

Primitives et intégrales diverses.

① $\displaystyle\int_0^a \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

② $\displaystyle\int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

③ $\displaystyle\int \left(x^2-x+3\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

④ $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9}$.

⑤ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

Analyse 2.
Corrigé de la fiche n°4.
Calcul d'intégrales.

Exercice 1.

Calcul direct par primitives.

$$\int_0^1 \left(1+2x+3x^2+4x^3\right)\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \qquad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^4} \qquad \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{ch}(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^3 \mathrm{sh}(3x)\,\mathrm{d}x$$

Correction de l'exercice 1.

Exercice 2.

Intégration par parties.

① $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$

② $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x$

③ $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$

④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

⑤ $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t}\,\mathrm{d}t$

⑥ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ (faire deux intégrations par parties successives).

⑦ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$

Correction de l'exercice 2.

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

① $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{e^t+e^{-t}}$. Poser $u=e^t$.

② $\displaystyle\int_0^x t(2t+1)^n\,\mathrm{d}t$, où $n\in\mathbb{N}$. Poser $u=2t+1$.

③ $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$, où $x>1$. Poser $u=\frac{1}{t}$.

④ $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t$. Poser $u=\sin(t)$.

Correction de l'exercice 3.

Exercice 4.

Calculer les primitives des fonctions trigonométriques suivantes :

① $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$.

② $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\,\mathrm{d}x$.

③ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$.

④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction de l'exercice 4.

Exercice 5.

Quelques racines.

① $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

② $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$. Transformer x^2+4 en u^2+1.

Correction de l'exercice 5.

Exercice 6.

Primitives et intégrales diverses.

① $\displaystyle\int_0^a \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

② $\displaystyle\int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

③ $\displaystyle\int \left(x^2-x+3\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

④ $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9}$.

⑤ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

Correction de l'exercice 6.

Analyse 2.
Fiche n°5.
Équivalents et développements limités.

Exercice 1.

Trouver à l'aide d'équivalents les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to 0}\left(x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)}\right)$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)}$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{(\arcsin(x))^2}$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{3x^3+2x^4}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$

⑦ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)^{\ln(x)}$

⑧ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}}$

⑨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan(2x)\ln(\tan(x))$

Exercice 2.

Donner le développement limité à l'ordre 2 en zéro de f dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\sqrt{2+x}$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{2+\sin(x)}$

$f(x)=\ln(1+\cos(x))$ $\qquad$ $f(x)=e^x\cos(x)$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ $\qquad$ $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$

$f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

Exercice 3.

Préciser la limite en zéro de f dans chacun des cas suivants puis donner le développement limité à l'ordre 2 en zéro de f :

$f(x)=2x\dfrac{e^{6x}}{\sin(3x)}$ $\qquad$ $f(x)=x\dfrac{\ln(1-x)}{1-\cos(x)}$

Exercice 4.

Donner le développement limité à l'ordre 3 en x_0 de f dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\ln(x)$ et $x_0=e$

$f(x)=\sin(x)$ et $x_0=\dfrac{\pi}{6}$

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+2}$ et $x_0=0$

$f(x)=(\ln(1+x))^2$ et $x_0=0$

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants calculer la limite de f en zéro :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$$

$$f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 6.

Étudier en zéro la tangente à la courbe de f et la position relative de la courbe et de la tangente pour $f(x) = \exp\left(\frac{1}{2+x}\right)$.

Exercice 7.

Étudier les branches infinies de la fonction f définie par : $f(x) = \left(x^6 + x^5\right)^{\frac{1}{6}}$.

Exercice 1.
Trouver à l'aide d'équivalents les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to 0}\left(x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)}\right)$
② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)}$
③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{(\arcsin(x))^2}$
④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{3x^3+2x^4}$
⑤ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$
⑥ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$
⑦ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)^{\ln(x)}$
⑧ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}}$
⑨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan(2x)\ln(\tan(x))$

Correction de l'exercice 1.

Exercice 2.
Donner le développement limité à l'ordre 2 en zéro de f dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\sqrt{2+x}$
$f(x)=\sqrt{2+\sin(x)}$
$f(x)=\ln(1+\cos(x))$
$f(x)=e^x\cos(x)$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$
$f(x)=\arccos\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$
$f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

Correction de l'exercice 2.

Exercice 3.
Préciser la limite en zéro de f dans chacun des cas suivants puis donner le développement limité à l'ordre 2 en zéro de f :

$f(x)=2x\dfrac{e^{6x}}{\sin(3x)}$
$f(x)=x\dfrac{\ln(1-x)}{1-\cos(x)}$

Correction de l'exercice 3.

Exercice 4.

Donner le développement limité à l'ordre 3 en x_0 de f dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad x_0 = e$$
$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+2} \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$
$$f(x) = (\ln(1+x))^2 \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

Correction de l'exercice 4.

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants calculer la limite de f en zéro :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$$
$$f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Correction de l'exercice 5.

Exercice 6.

Étudier en zéro la tangente à la courbe de f et la position relative de la courbe et de la tangente pour $f(x) = \exp\left(\frac{1}{2+x}\right)$.

Correction de l'exercice 6.

Exercice 7.

Étudier les branches infinies de la fonction f définie par : $f(x) = \left(x^6 + x^5\right)^{\frac{1}{6}}$.

Correction de l'exercice 7.