

# Mathématiques 2012–2013

## Cours d'Analyse 2

Philippe JOUAN,

Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem,

Avenue de l'Université, BP.12,

F76801 Saint-Étienne-du-Rouvray.

Rédigé avec  $\LaTeX$

par Hicham AMARIR

le 11 mai 2026

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels sur les limites et la continuité</b>	<b>4</b>
1.1	Points adhérents et limites . . . . .	4
1.2	Opérations sur les limites . . . . .	7
1.3	Continuité . . . . .	9
1.4	Prolongement par continuité . . . . .	11
1.5	Continuité à droite et à gauche — Recollement . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Continuité sur un intervalle</b>	<b>13</b>
2.1	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	13
2.2	Réciproque d'une fonction continue . . . . .	15
2.3	Fonctions continues sur $[a, b]$ . . . . .	16
2.4	Continuité uniforme . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Dérivation</b>	<b>19</b>
3.1	Définitions . . . . .	19
3.2	Opérations sur les dérivées . . . . .	21
3.3	Dérivation des fonctions réciproques . . . . .	22
3.4	Le théorème de Rolle . . . . .	23
3.5	Théorème des accroissements finis (TAF) . . . . .	24
3.6	Variations de fonctions . . . . .	25
3.7	Limites de dérivées et règle de l'Hôpital . . . . .	26
3.8	Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes . . . . .	27
3.9	Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Intégration</b>	<b>29</b>
4.1	Intégrale de Riemann . . . . .	29
4.2	Intégrales et primitives . . . . .	30
4.3	Propriétés de l'intégrale . . . . .	31
4.4	Application : le logarithme népérien . . . . .	32
4.5	Intégration par parties . . . . .	33
4.6	Intégration par changement de variable . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Étude locale des fonctions</b>	<b>35</b>
5.1	Fonctions équivalentes . . . . .	35
5.2	Fonctions négligeables et dominées . . . . .	37
5.3	Développements limités . . . . .	38
5.4	Théorème de Taylor . . . . .	39
5.5	Opérations sur les DL . . . . .	40
5.6	DL à l'infini . . . . .	42

5.7	Applications des DL . . . . .	42
5.7.1	Tangentes au graphe . . . . .	42
5.7.2	Branches infinies . . . . .	43

# Chapitre 1

## Rappels sur les limites et la continuité

### 1.1 Points adhérents et limites

#### Définition 1.1 : (Point adhérent)

Soient  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$  et  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un point  $a \in \mathbb{R}$  est dit **adhérent** à  $\mathcal{D}_f$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad ]a - \varepsilon; a + \varepsilon[ \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$$

Autrement dit, tout voisinage de  $a$  contient au moins un point de  $\mathcal{D}_f$ .

L'ensemble des points adhérents à  $\mathcal{D}_f$  est appelé **adhérence** de  $\mathcal{D}_f$ , notée  $\overline{\mathcal{D}_f}$ .

#### Propriété 1.2 : (Points adhérents triviaux)

Soient  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$  et  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

Tout point de  $\mathcal{D}_f$  est adhérent à  $\mathcal{D}_f$ .

#### Preuve :

Soit  $a \in \mathcal{D}_f$  et soit  $\varepsilon > 0$  quelconque.

Puisque  $a \in \mathcal{D}_f$ , on a en particulier  $a \in ]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ , donc :

$$a \in ]a - \varepsilon; a + \varepsilon[ \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , le point  $a$  est bien adhérent à  $\mathcal{D}_f$ .

#### Exemple :

1. En général,  $\mathcal{D}_f$  est une réunion d'intervalles :

$$\mathcal{D}_f = ]a_1; b_1[ \cup ]a_2; b_2[ \cup \dots \cup ]a_n; b_n[$$

avec  $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$ , et éventuellement  $a_1 = -\infty$  ou  $b_n = +\infty$ .

Les points adhérents à  $\mathcal{D}_f$  sont :

- i) tous les points de  $\mathcal{D}_f$ ,
  - ii) les extrémités finies intérieures :  $a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}$ ,
  - iii)  $a_1$  si  $a_1 \neq -\infty$ ,
  - iv)  $b_n$  si  $b_n \neq +\infty$ .
2.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

L'ensemble des points adhérents est  $\mathbb{R}$  tout entier : le point 0 est adhérent à  $\mathcal{D}_f$  car tout intervalle  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  contient des réels non nuls.

3.  $f(x) = \ln x$ ,  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$ .

L'ensemble des points adhérents est  $[0, +\infty[$  : le point 0 est adhérent car tout voisinage de 0 contient des réels strictement positifs.

4.  $f(x) = \ln(\sin x)$ .

On a  $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, \pi + 2k\pi[$  et l'ensemble des points adhérents est  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$ .

**Définition 1.3 :** (Limite finie en un point)

Soient  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ ,  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $a$  adhérent à  $\mathcal{D}_f$ .

On dit que  $f$  admet la **limite**  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $a$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Autrement dit : on peut rendre  $f(x)$  aussi proche que l'on veut de  $\ell$ , pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ .

Implicitement,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  désigne  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathcal{D}_f}} f(x)$ .

**Définition 1.4 :** (Limite infinie en un point)

Soient  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ ,  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $a$  adhérent à  $\mathcal{D}_f$ .

On dit que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \implies f(x) > A$$

De même, on dit que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \implies f(x) < -A$$

**Exemple :**

1.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ,  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, 1[$ .

On affirme que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ .

**Démonstration :**

Soit  $A > 0$ . On cherche  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, |x - 1| < \eta \implies f(x) > A$$

Commençons par analyser quand  $f(x) > A$  :

$$\begin{aligned} f(x) > A &\iff \frac{1}{\sqrt{1-x}} > A \\ &\iff \sqrt{1-x} < \frac{1}{A} && \text{(car } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff 1-x < \frac{1}{A^2} && \text{(car } t \mapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ &\iff -x < -1 + \frac{1}{A^2} \\ &\iff x > 1 - \frac{1}{A^2} \end{aligned}$$

On pose  $\eta = \frac{1}{A^2}$ .

Soit  $\eta = \frac{1}{A^2}$ . Si  $x \in \mathcal{D}_f$  alors  $x < 1$  et donc :

$$\begin{aligned} |x - 1| < \eta &\iff 1 - \eta < x < 1 + \eta \\ &\iff 1 - \frac{1}{A^2} < x < 1 + \frac{1}{A^2} \\ &\iff 1 - \frac{1}{A^2} < x < 1 && \text{(car } x < 1) \\ &\iff f(x) > A && \text{(d'après l'équivalence précédente)} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ .

2.  $f(x) = x \ln x$ ,  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$ .

On admet que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

3.  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ .

On affirme que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

**Démonstration :**

Soit  $\eta > 0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |x - 0| < \eta &\implies |x| < \eta \\ &\implies |f(x)| \leq |x| < \eta \\ &\implies |f(x)| < \eta \\ &\implies |f(x) - 0| < \eta \end{aligned}$$

En choisissant  $\eta = \varepsilon > 0$ , on obtient bien la définition de limite finie en un point :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |x - 0| < \eta \implies |f(x) - 0| < \varepsilon$$

Ce qui est exactement la définition de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

### **Théorème 1.5 :** (Unicité de la limite)

Soient  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$  et  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  admet une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $a$ , cette limite est **unique**.

### **Théorème 1.6 :** (Limite en un point de l'ensemble de définition)

Soient  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$  et  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$a \in \mathcal{D}_f \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

### **Preuve :**

Soit  $a \in \mathcal{D}_f$  et supposons l'existence de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ .

Par définition 1.3 de la limite finie en un point :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Puisque  $a \in \mathcal{D}_f$ , on peut appliquer cette implication en particulier pour  $x = a$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad |a - a| = 0 < \eta \implies |f(a) - \ell| < \varepsilon$$

Or  $|a - a| = 0 < \eta$  est toujours vrai (car  $\eta > 0$ ), donc la prémisse est satisfaite, ce qui donne directement :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |f(a) - \ell| < \varepsilon$$

Or, la seule quantité positive strictement inférieure à tout réel  $\varepsilon > 0$  est 0.

On en déduit :

$$\begin{aligned} |f(a) - \ell| = 0 &\iff f(a) - \ell = 0 \\ &\iff f(a) = \ell \\ &\iff f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \end{aligned}$$

## 1.2 Opérations sur les limites

### Propriété 1.7 : (Limite de $f$ et limite de suites)

La fonction  $f$  tend vers  $\ell$  quand  $x \rightarrow a$  (avec  $a$  adhérent à  $\mathcal{D}_f$ ) si et seulement si

pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $\mathcal{D}_f$  convergeant vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .

### Propriété 1.8 : (Opérations algébriques sur les limites)

Soient  $f, g$  définies sur un même ensemble  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ ,  $a$  adhérent à  $\mathcal{D}$ , et :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$$

#### 1. Compatibilité avec la somme :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \ell + \ell'$$

#### 2. Compatibilité avec la multiplication par un scalaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \lambda \ell$$

#### 3. Compatibilité avec le produit :

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \ell \ell'$$

#### 4. Compatibilité avec le quotient : si $\ell' \neq 0$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{\ell'}$$

### Exemple :

On cherche  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$ .

On factorise :

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}{x - a} = x^2 + xa + a^2 \xrightarrow{x \rightarrow a} a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = 3a^2$ .

### Remarque :

La "compatibilité avec la somme", couplée à la "compatibilité avec la multiplication par un scalaire", traduit exactement la linéarité de l'opérateur  $\lim_{x \rightarrow a}$ .

**Propriété 1.9 :** (Limite des fonctions composées)

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , et si  $a$  est adhérent à  $\mathcal{D}_{g \circ f}$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$$

**Preuve :**

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$ , par la définition 1.3 de limite on a :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}_g, \quad |y - b| < \alpha \implies |g(y) - \ell| < \varepsilon$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , pour ce  $\alpha > 0$ , par la définition 1.3 de limite on a :

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - b| < \alpha$$

Soit maintenant  $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$  (donc  $x \in \mathcal{D}_f$  et  $f(x) \in \mathcal{D}_g$ ) tel que  $|x - a| < \eta$ .

$$\begin{aligned} |x - a| < \eta &\implies |f(x) - b| < \alpha \\ &\implies |g(f(x)) - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

D'après la définition 1.3 de limite, on a bien montré que  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$ .

**Exemple :**

Soient  $f(x) = x \ln x$  avec  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$  et  $g(y) = \sqrt{y}$  avec  $\mathcal{D}_g = [0, +\infty[$ .

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ (admis)} \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$$

On s'intéresse à  $g \circ f$  :

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x \ln x}$$

$(g \circ f)(x)$  est définie si et seulement si  $x > 0$  et  $x \ln x \geq 0$ . On cherche les valeurs possibles de  $x$  :

$$\begin{aligned} x \ln x \geq 0 &\iff \ln x \geq 0 && \text{(car } x \in \mathcal{D}_f = ]0, +\infty[) \\ &\iff x \geq e^0 && \text{(car } t \mapsto e^t \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff x \geq 1 \\ &\iff x \in [1, +\infty[ \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = [1, +\infty[$$

Le point 0 n'est **pas** adhérent à  $\mathcal{D}_{g \circ f}$ , donc dire que  $g \circ f$  admet une limite en 0 n'a aucun sens.

**Conclusion :** Attention : on en déduit qu'il n'est pas toujours vrai que  $a$  soit adhérent à  $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\mathcal{D}_g)$ .

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) \text{ est définie} &\iff f(x) \text{ est définie et } f(x) \in \mathcal{D}_g \\ &\iff x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \in f^{-1}(\mathcal{D}_g) \end{aligned}$$

## 1.3 Continuité

### Définition 1.10 : (Continuité en un point)

La fonction  $f$  est **continue** au point  $a \in \mathcal{D}_f$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ou encore si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

On dit que  $f$  est **continue** sur  $\mathcal{D}_f$  si elle l'est en tout point de  $\mathcal{D}_f$ .

### Exemple :

#### Remarques sur la continuité.

1. Soit  $f$  définie sur  $]1, 3[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  n'existe pas car les limites latérales sont distinctes :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

La fonction  $f$  n'est donc pas continue en 2.

Par contre, la restriction de  $f$  à  $] -\infty, 2[ \cap \mathcal{D}_f$  possède une limite :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$  (limite à gauche).

De même  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$  (limite à droite).

2. Soit  $f(x) = 1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et  $f(0) = a$ .

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1$ . Si  $a \neq 1$ , la limite en 0 n'est pas égale à  $f(0) = a$ , donc  $f$  n'est pas continue en 0.

Mais  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1$  existe : la limite existe, mais elle est différente de  $f(0)$ .

### Propriété 1.11 : (Opérations sur les fonctions continues)

Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$ , alors les fonctions suivantes sont également continues en  $a$  :

1.  $f + g$ ,
2.  $\lambda f$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
3.  $f \cdot g$ ,
4.  $\frac{f}{g}$  si  $g(a) \neq 0$ .

### Propriété 1.12 : (Fonctions usuelles continues)

1. Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
2. Les fractions rationnelles sont continues là où elles sont définies.
3. Les fonctions  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , et  $\ln$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  (résultats admis).
4.  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  et  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exemple :**

1. Pour  $n \geq 1$ , la fonction  $f_n(x) = x^n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

C'est vrai pour  $n = 1$  :  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

Si c'est vrai pour  $f_n$ , alors  $f_{n+1} = f_n \cdot f_1$  est continue en tout point  $a \in \mathbb{R}$  par la règle 3) sur les opérations.

Cette récurrence prouve le résultat.

2. Soit  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  un polynôme (à coefficients réels).

Chaque monôme  $x \mapsto a_i x^i$  est continue sur  $\mathbb{R}$  d'après 1) et la règle 2). Par la règle 1) (somme),  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Soit  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  une fraction rationnelle, définie là où  $g(x) \neq 0$ .

$f$  et  $g$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  d'après 2). En tout point  $a$  où  $g(a) \neq 0$ , la règle 4) (quotient) donne la continuité de  $F$  en  $a$ .

**Propriété 1.13 : (Continuité des fonctions composées)**

Si  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en  $a \in \mathcal{D}_f$  et  $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en  $b = f(a) \in \mathcal{D}_g$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Preuve :**

Par hypothèse :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b)$$

D'après la proposition 1.9 sur la limite des fonctions composées,  $g \circ f$  admet la limite  $g(b) = g(f(a))$  en  $a$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a)$ , ce qui signifie exactement que  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Exemple :**

1. La fonction  $x \mapsto |x|$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

En effet : pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , l'inégalité triangulaire inverse donne  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

Conséquence : si  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}_f$ , alors  $x \mapsto |f(x)|$  est continue sur  $\mathcal{D}_f$  (par composition avec  $|\cdot|$ ).

2. La fonction  $x \mapsto e^{\sin x}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (composée de  $\sin$  et  $\exp$ , toutes deux continues).

3. La fonction  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  (composée de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $\sin$ , continues sur leurs domaines respectifs).

## 1.4 Prolongement par continuité

### Propriété 1.14 : (Prolongement par continuité)

Soit  $a$  adhérent à  $\mathcal{D}_f$  mais avec  $a \notin \mathcal{D}_f$ .

On suppose que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathcal{D}_f}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ .

On définit  $\hat{f}$  sur  $\mathcal{D}_f \cup \{a\}$  par :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

La fonction  $\hat{f}$  est continue au point  $a$  et s'appelle le **prolongement par continuité** de  $f$  au point  $a$ .

### Preuve :

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$x \in \mathcal{D}_f, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Soit maintenant  $x \in \mathcal{D}_f \cup \{a\}$  tel que  $|x - a| < \eta$ .

**Cas 1 :**  $x \in \mathcal{D}_f$ . Alors  $|\hat{f}(x) - \ell| = |f(x) - \ell| < \varepsilon$  par définition de la limite.

**Cas 2 :**  $x = a$ . Alors  $|\hat{f}(a) - \ell| = |\ell - \ell| = 0 < \varepsilon$ .

Dans les deux cas,  $|\hat{f}(x) - \ell| < \varepsilon$ .

Puisque  $\hat{f}(a) = \ell$ , cela donne bien  $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f}(x) = \hat{f}(a)$ , i.e.  $\hat{f}$  est continue en  $a$ .

### Exemple :

Soit  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

On a  $0 \notin \mathcal{D}_f$ , mais 0 est adhérent à  $\mathcal{D}_f$ .

Puisque  $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

Le prolongement par continuité est  $\hat{f}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\hat{f}(0) = 0$  et  $\hat{f}(x) = x \sin \frac{1}{x}$  pour  $x \neq 0$ .

## 1.5 Continuité à droite et à gauche — Recollement

### Définition 1.15 : (Continuité à droite et à gauche)

Soit  $a \in \mathcal{D}_f$ .

—  $f$  est **continue à gauche** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

—  $f$  est **continue à droite** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

### Exemple :

Soit  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En 0,  $f$  est **continue à droite** car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ .

Mais  $f$  n'est **pas continue à gauche** en 0 :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = f(0)$ .

Par conséquent  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  n'existe pas (les limites latérales sont distinctes) et  $f$  n'est pas continue en 0.

### Propriété 1.16 : (Recollement)

Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un point de  $I$  qui n'est pas une extrémité.

Si  $f$  est continue à droite **et** à gauche en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

### Preuve :

Les limites latérales existent et vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Comme les deux limites latérales sont égales (et égales à  $f(a)$ ), la limite globale existe et vaut  $f(a)$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Donc  $f$  est continue en  $a$ .

### Exemple :

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction  $f$  est continue sur  $]-\infty, -1[$  et sur  $]1, +\infty[$  (car  $\ln|\cdot|$  y est continue).

En  $x = 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 1 = 0 = f(1)$$

Par le théorème de recollement,  $f$  est continue en 1. De même en  $-1$ .

Donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Chapitre 2

# Continuité sur un intervalle

Dans ce chapitre,  $I$  est un intervalle contenant au moins deux points.

On note  $\text{Int}(I) = \overset{\circ}{I}$  l'intervalle  $I$  privé de ses extrémités.

## 2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

### **Théorème 2.1 :** (*Théorème des valeurs intermédiaires (TVI 1)*)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ , et  $a < b$  dans  $I$ .

Si  $f(a)f(b) \leq 0$  (i.e.  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés ou l'un est nul), alors :

$$\exists c \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad f(c) = 0$$

### **Preuve :**

On suppose  $f(a) \leq 0 \leq f(b)$  (sinon on considère  $-f$ , qui vérifie les mêmes hypothèses).

**Construction par dichotomie.** On construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par le procédé suivant :

- $a_0 = a, b_0 = b$ .
- À l'étape  $n$ , on considère le milieu  $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  :
  - si  $f(m_n) \leq 0$  : on pose  $a_{n+1} = m_n$  et  $b_{n+1} = b_n$ ,
  - sinon ( $f(m_n) > 0$ ) : on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = m_n$ .

Par construction :

$$f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n) \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les suites  $(a_n)$  (croissante, majorée par  $b$ ) et  $(b_n)$  (décroissante, minorée par  $a$ ) sont adjacentes : elles convergent vers une même limite  $c \in [a, b]$ .

Par continuité de  $f$  en  $c$  :

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{et} \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \geq 0$$

On conclut que  $f(c) = 0$ .

### **Théorème 2.2 :** (*Théorème des valeurs intermédiaires (TVI 2)*)

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ .

Alors  $f$  prend toutes les valeurs comprises entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

### **Preuve :**

Soit  $d$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , i.e.  $d$  est entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

Posons  $g = f - d$ . Alors  $g$  est continue sur  $[a, b]$  et :

$$g(a) = f(a) - d \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - d$$

Puisque  $d$  est entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , on a  $g(a) \cdot g(b) \leq 0$ .

Par le TVI 1, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ , i.e.  $f(c) = d$ .

**Corolaire 2.3 :** (Image d'un intervalle)

L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

**Preuve :**

Soient  $y_1 < y_2 \in f(I)$ .

Il existe  $x_1, x_2 \in I$  tels que  $f(x_1) = y_1$  et  $f(x_2) = y_2$ .

On applique le TVI 2 à  $f$  sur  $[x_1, x_2]$  (ou  $[x_2, x_1]$  si  $x_2 < x_1$ ) : tout  $d$  compris entre  $y_1$  et  $y_2$  appartient à  $f(I)$ .

Donc  $f(I)$  est un intervalle.

**Exemple :**

**Contre-exemples montrant la nécessité de la continuité.**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = -1$  si  $x \leq 0$  et  $f(x) = 1$  si  $x > 0$ .

$f$  est **discontinue** en 0. Son image vaut  $f(\mathbb{R}) = \{-1; 1\}$ , qui n'est **pas un intervalle**.

Aucun des trois théorèmes (TVI 1, TVI 2, Corollaire) n'est vérifié.

2. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$  pour  $x > 0$ .

$f$  est discontinue en 0. On a  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$ , et  $f([0, 1]) = \{0\} \cup \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ , qui n'est pas un intervalle.

**Exemple :**

**Application — point fixe.**

Si  $f$  est continue de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ , alors  $f$  admet un **point fixe**, i.e. il existe  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

**Démonstration.** Posons  $g(x) = f(x) - x$ . Alors  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  et :

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

(car  $f(0) \in [0, 1]$  et  $f(1) \in [0, 1]$ ).

Par le TVI 1, il existe  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $g(x_0) = 0$ , i.e.  $f(x_0) = x_0$ .

## 2.2 Réciproque d'une fonction continue

### Lemme 2.4 : (Lemme 1 — Monotonie et limites latérales)

Soit  $f$  une fonction monotone sur un intervalle  $I$ .

Alors  $f$  admet une limite à gauche et à droite en tout point de l'intérieur de  $I$ .

Si  $f$  est croissante, pour tout  $c \in \text{Int}(I)$  :

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

### Lemme 2.5 : (Lemme 2 — Image intervalle implique continuité)

Soit  $f$  monotone sur un intervalle  $I$ .

Si  $f(I)$  est un intervalle, alors  $f$  est continue.

#### Preuve :

Supposons  $f$  croissante. Soit  $c \in I$  qui n'est pas l'infimum de  $I$ .

Posons  $\ell = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  (qui existe par le lemme 1). On a  $\ell \leq f(c)$ .

Si  $\ell < f(c)$ , alors pour tout  $x < c$  on a  $f(x) \leq \ell < f(c)$ , donc  $f(I)$  ne contient aucun élément de  $] \ell, f(c)[$ , ce qui contredirait le fait que  $f(I)$  est un intervalle.

Donc  $\ell = f(c)$ , i.e.  $f$  est continue à gauche en  $c$ . De même à droite.

### Théorème 2.6 : (Réciproque d'une fonction continue strictement monotone)

Soit  $f$  continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

Alors  $f$  est bijective et sa réciproque  $f^{-1}$  est continue de  $f(I)$  dans  $I$ . Elle est de plus strictement monotone, de même sens de variation que  $f$ .

#### Preuve :

La stricte monotonie entraîne l'injectivité, donc  $f$  est bijective de  $I$  dans  $f(I)$ .

Par le corollaire 2.3,  $f(I)$  est un intervalle.

La réciproque  $g = f^{-1}$  est strictement monotone (de même sens que  $f$ ), définie sur l'intervalle  $f(I)$ , et son image est l'intervalle  $I$ .

Par le lemme 2,  $g$  est continue sur  $f(I)$ .

#### Exemple :

1. Pour  $n \geq 1$ ,  $f_n(x) = x^n$  :

—  **$n$  pair** :  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , avec  $f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ . Sa réciproque  $x \mapsto x^{1/n}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

—  **$n$  impair** :  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Sa réciproque  $x \mapsto x^{1/n}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est continue et strictement croissante. Sa réciproque Arcsin est continue et strictement croissante de  $[-1, 1]$  dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

3.  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et strictement croissante. Sa réciproque Arctan est continue et strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

## 2.3 Fonctions continues sur $[a, b]$

### **Théorème 2.7 :** (Bolzano-Weierstraß)

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

#### **Preuve :**

Soit  $(x_n)$  une suite bornée : il existe  $m, M \in \mathbb{R}$  tels que  $m \leq x_n \leq M$  pour tout  $n$ .

On construit une suite d'intervalles emboîtés par dichotomie :

- $I_0 = [a_0, b_0] = [m, M]$ .
- À chaque étape  $n$ , l'un des deux demi-intervalles  $\left[ a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right]$  ou  $\left[ \frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right]$  contient une infinité de termes de  $(x_n)$ ; on le choisit comme  $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ .

Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes, avec  $b_n - a_n = \frac{M - m}{2^n} \rightarrow 0$ , et convergent vers une même limite  $\ell \in [m, M]$ .

On extrait une sous-suite en choisissant à chaque étape  $k$  un indice  $\varphi(k)$  tel que  $x_{\varphi(k)} \in I_k$ . Par le théorème des gendarmes :

$$a_k \leq x_{\varphi(k)} \leq b_k \quad \text{et} \quad a_k, b_k \rightarrow \ell \implies x_{\varphi(k)} \rightarrow \ell$$

### **Théorème 2.8 :** (Fonction continue sur un segment : bornée et atteint ses bornes)

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  (segment fermé borné).

Alors  $f$  est bornée et elle atteint ses bornes : il existe  $x_m, x_M \in [a, b]$  tels que :

$$f(x_m) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_M) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

#### **Preuve :**

##### **Étape 1 : $f$ est bornée.**

Supposons par l'absurde que  $f$  n'est pas majorée. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in [a, b]$  tel que  $f(x_n) > n$ .

La suite  $(x_n)$  est bornée (car  $a \leq x_n \leq b$ ). Par Bolzano-Weierstraß, il existe une sous-suite  $x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$ .

Par continuité de  $f$  en  $c$  :  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$ .

Mais  $f(x_{n_k}) > n_k \rightarrow +\infty$ , contradiction.

Donc  $f$  est majorée. De même,  $f$  est minorée.

##### **Étape 2 : $f$ atteint son supremum.**

Soit  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $x_n \in [a, b]$  tel que  $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$ .

Par Bolzano-Weierstraß,  $x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$ , et par continuité :

$$f(c) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = M$$

De même pour l'infimum.

### **Corolaire 2.9 :** (Image d'un segment)

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors :

$$f([a, b]) = [m, M]$$

où  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  et  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ .

## 2.4 Continuité uniforme

### Définition 2.10 : (Continuité uniforme)

La fonction  $f$  définie sur  $I$  est **uniformément continue** sur  $I$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

La différence avec la continuité simple est que  $\eta$  ne dépend **pas** de  $x$  : le même  $\eta$  fonctionne simultanément pour tous les points.

### Définition 2.11 : (Fonction lipschitzienne)

La fonction  $f$  est **lipschitzienne** de rapport  $k > 0$  sur  $I$  s'il existe  $k > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

### Propriété 2.12 : (Lipschitz implique uniformément continu)

Si  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k$  sur  $I$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .

#### Preuve :

Soit  $\varepsilon > 0$ .

On pose  $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ .

Pour tous  $x, y \in I$  tels que  $|x - y| < \eta$ , on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

Donc  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .

#### Exemple :

1. La fonction  $f(x) = |x|$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  car  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

2. La fonction  $f(x) = x^2$  est 2-lipschitzienne sur  $[0, 1]$  :

$$|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2|x - y|$$

En revanche,  $x^2$  n'est **pas** uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  tout entier (le rapport lipschitzien dépend du point et tend vers  $+\infty$ ).

3. La fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$  (mais pas lipschitzienne) :

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|}$$

### Théorème 2.13 : (Heine)

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

#### Preuve :

Supposons par l'absurde que  $f$  n'est pas uniformément continue.

Il existe alors  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $x, y \in [a, b]$  avec  $|x - y| < \eta$  et  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$ .

En prenant  $\eta = \frac{1}{n}$  pour chaque  $n \geq 1$ , on obtient des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  dans  $[a, b]$  telles que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

Par Bolzano-Weierstraß, on extrait  $x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$ .

Comme  $|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0$ , on a aussi  $y_{n_k} \rightarrow c$ .

Par continuité de  $f$  en  $c$  :

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow |f(c) - f(c)| = 0$$

ce qui contredit  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$ .

## Chapitre 3

# Dérivation

### 3.1 Définitions

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  avec  $\text{Int}(I) \neq \emptyset$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Définition 3.1 : (Dérivabilité en un point)

La fonction  $f$  est **dérivable** au point  $a \in \text{Int}(I)$  si le **taux d'accroissement** :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in I, x \neq a)$$

possède une limite finie quand  $x \rightarrow a$ .

Cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$  ou  $\frac{df}{dx}(a)$ .

**Interprétation géométrique :** la tangente au graphe de  $f$  au point  $A = (a, f(a))$  est la droite d'équation  $y = f(a) + (x - a)f'(a)$ . C'est l'unique droite passant par  $A$  de pente  $f'(a)$ .

#### Exemple :

1.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a > 0$ .

On calcule le taux d'accroissement en  $a$  :

$$\tau_a(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Donc  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ .

2.  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Le taux d'accroissement en 0 est :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

Cette expression n'a pas de limite en 0 (elle oscille entre  $-1$  et  $1$ ), donc  $f$  n'est **pas** dérivable en 0.

#### Définition 3.2 : (Dérivées à droite et à gauche)

—  $f$  est **dérivable à droite** en  $a$  si la limite  $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe (finie).

—  $f$  est **dérivable à gauche** en  $a$  si la limite  $f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe (finie).

#### Propriété 3.3 : (Dérivabilité et dérivées latérales)

La fonction  $f$  est dérivable en  $a \in \text{Int}(I)$  si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en  $a$  et :

$$f'_d(a) = f'_g(a)$$

### Définition 3.4 : (Dérivabilité sur I)

La fonction  $f$  est **dérivable sur**  $I$  si :

- elle est dérivable en tout point de  $\text{Int}(I)$ ,
- elle est dérivable à droite en  $\inf I$  si  $\inf I \in I$ ,
- elle est dérivable à gauche en  $\sup I$  si  $\sup I \in I$ .

### Propriété 3.5 : (Dérivable implique continu)

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

La réciproque est fausse.

### Preuve :

Puisque  $f$  est dérivable en  $a$ , on peut écrire pour  $x \neq a$  :

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \tau_a(x) \cdot (x - a)$$

Quand  $x \rightarrow a$ ,  $\tau_a(x) \rightarrow f'(a) \in \mathbb{R}$  et  $(x - a) \rightarrow 0$ , donc :

$$f(x) - f(a) \rightarrow f'(a) \cdot 0 = 0$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  :  $f$  est continue en  $a$ .

**Contre-exemple pour la réciproque :**  $f(x) = |x|$  est continue en 0, mais :

$$f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_g(0)$$

donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

### Exemple :

La fonction  $f(x) = |x|$  vérifie  $f'_g(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$ .

Le point  $(0,0)$  est un **point anguleux** : le graphe présente un angle en ce point.

En général, si  $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ , le point  $(a, f(a))$  est dit **anguleux**.

## 3.2 Opérations sur les dérivées

### Propriété 3.6 : (Opérations algébriques sur les dérivées)

Soient  $f, g$  dérivables en  $a \in \text{Int}(I)$ . Alors :

1. **Somme** :  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. **Multipliation par un scalaire** :  $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$
3. **Produit (règle de Leibniz)** :  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. **Inverse** : si  $g(a) \neq 0$ ,  $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$
5. **Quotient** : si  $g(a) \neq 0$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$

### Preuve :

On démontre (3).

Pour  $x \neq a$ , on développe le taux d'accroissement de  $fg$  en  $a$  en ajoutant et soustrayant  $f(x)g(a)$  :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= f(x) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\end{aligned}$$

Quand  $x \rightarrow a$  :

- $f(x) \rightarrow f(a)$  (car  $f$  est dérivable, donc continue en  $a$ ),
- $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \rightarrow g'(a)$ ,
- $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)$ .

Donc la limite vaut  $f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$ , ce qui est bien  $(fg)'(a)$ .

### Propriété 3.7 : (Dérivation des fonctions composées (règle de la chaîne))

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $a \in \text{Int}(I)$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $b = f(a) \in \text{Int}(J)$ .

Alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

### Preuve :

L'idée est de prolonger par continuité le taux d'accroissement de  $g$  en  $b$ .

On définit la fonction  $\tilde{\tau}_{b,g}$  par :

$$\tilde{\tau}_{b,g}(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b \end{cases}$$

Cette fonction est continue en  $b$  (c'est le prolongement par continuité du taux d'accroissement de  $g$ ).

Pour  $x \neq a$ , on a  $g(f(x)) - g(f(a)) = \tilde{\tau}_{b,g}(f(x)) \cdot (f(x) - b)$  (même si  $f(x) = b$ , car alors les deux membres sont nuls). Donc :

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \tilde{\tau}_{b,g}(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Quand  $x \rightarrow a$  :

- $f(x) \rightarrow f(a) = b$  (car  $f$  est continue en  $a$ ),

- $\tilde{\tau}_{b,g}(f(x)) \rightarrow \tilde{\tau}_{b,g}(b) = g'(b)$  (par continuité de  $\tilde{\tau}_{b,g}$ ),
- $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)$ .

Donc  $(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ .

**Exemple :**

1.  $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$  pour  $u(x) > 0$ .
2.  $[\sqrt{u(x)}]' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$  pour  $u(x) > 0$ .
3. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $x > 0$  :  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ , donc  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .
4.  $[\sin(x^2)]' = 2x \cos(x^2)$  et  $[\sin^2 x]' = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ .

### 3.3 Dérivation des fonctions réciproques

**Propriété 3.8 :** (Dérivée de la réciproque)

Soit  $f$  dérivable (donc continue) et strictement monotone de  $I$  dans  $J$ .

Sa réciproque  $f^{-1}$  est dérivable au point  $b = f(a)$  si et seulement si  $f'(a) \neq 0$ , et dans ce cas :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

**Preuve :**

**Nécessité.** Supposons  $f^{-1}$  dérivable en  $b$ .

Puisque  $f^{-1} \circ f = \text{id}_I$ , en dérivant en  $a$  par la règle de la chaîne :

$$(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(b) \cdot f'(a) = 1$$

Donc  $f'(a) \neq 0$  et  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .

**Suffisance.** Supposons  $f'(a) \neq 0$ .

Puisque  $f^{-1}$  est continue (théorème de la réciproque), si  $y \rightarrow b$  et  $y \neq b$ , alors  $x = f^{-1}(y) \rightarrow a$  et  $x \neq a$ .

On peut donc écrire :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \xrightarrow{y \rightarrow b} \frac{1}{f'(a)}$$

Donc  $f^{-1}$  est dérivable en  $b$  et  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .

**Exemple :**

**Fonctions trigonométriques réciproques.**

- Arcsin : sur  $[-1, 1]$ ,  $\sin(\text{Arcsin } x) = x$ , donc en dérivant :

$$\cos(\text{Arcsin } x) \cdot \text{Arcsin}'(x) = 1 \implies \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin } x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

car  $\text{Arcsin } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  donc  $\cos(\text{Arcsin } x) \geq 0$ .

- Arccos :  $\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour  $x \in ]-1, 1[$ .
- Arctan :  $\tan(\text{Arctan } x) = x$ , donc :

$$(1 + \tan^2(\text{Arctan } x)) \cdot \text{Arctan}'(x) = 1 \implies \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

## Fonctions hyperboliques.

On rappelle les définitions et propriétés fondamentales :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

On a  $\cosh' = \sinh$  et  $\sinh' = \cosh > 0$ .

La fonction  $\sinh$  est strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , donc  $\operatorname{argsh}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(car  $\cosh^2(\operatorname{argsh} x) = 1 + \sinh^2(\operatorname{argsh} x) = 1 + x^2$ ).

De même,  $\operatorname{argch}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  :

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$$

## 3.4 Le théorème de Rolle

### Définition 3.9 : (Extremum local)

La fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admet un **minimum local** (resp. **maximum local**) en  $a \in I$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in ]a-\delta, a+\delta[ \cap I, \quad f(x) \geq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \leq f(a))$$

### Théorème 3.10 : (Condition d'Euler (extremum et dérivée nulle))

Soit  $f$  définie sur un intervalle **ouvert**  $I$ .

Si  $f$  admet un extremum local en  $c \in I$  et si  $f$  est dérivable en  $c$ , alors :

$$f'(c) = 0$$

### Preuve :

Supposons que  $c$  est un minimum local.

Il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in ]c-\delta, c+\delta[, f(x) \geq f(c)$ .

**Pour**  $x \in ]c, c+\delta[$  (i.e.  $x > c$ ) :

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

En passant à la limite  $x \rightarrow c^+$  :  $f'_d(c) \geq 0$ .

**Pour**  $x \in ]c-\delta, c[$  (i.e.  $x < c$ ) :

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

En passant à la limite  $x \rightarrow c^-$  :  $f'_g(c) \leq 0$ .

Puisque  $f$  est dérivable en  $c$ , on a  $f'(c) = f'_g(c) = f'_d(c)$ .

On conclut :  $0 \leq f'_d(c) = f'(c) = f'_g(c) \leq 0$ , donc  $f'(c) = 0$ .

### Remarques :

1. L'annulation de la dérivée est **nécessaire mais pas suffisante** pour un extremum.

Exemple :  $f(x) = x^3$ ,  $f'(0) = 0$ , mais 0 n'est pas un extremum ( $f$  est strictement croissante).

2. Le résultat est **faux au bord** d'un intervalle fermé.

Exemple :  $f(x) = x$  sur  $[0, 1]$  admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais  $f'(x) = 1 \neq 0$ .

### **Théorème 3.11 : (Rolle)**

Soient  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- i)  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
- ii)  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,
- iii)  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

#### **Preuve :**

**Cas 1 :** Si  $f$  est constante, tout  $c \in ]a, b[$  convient car  $f'(c) = 0$ .

**Cas 2 :** Supposons  $f$  non constante.

Par le théorème 2.8,  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes : il existe  $m = \min f$  et  $M = \max f$ , avec  $m < M$  (car  $f$  est non constante).

Puisque  $f(a) = f(b)$ , au moins l'un des deux extrêmes  $m$  ou  $M$  est atteint en un point  $c \in ]a, b[$  (et non aux extrémités  $a$  ou  $b$  seulement).

Donc  $c \in ]a, b[$ ,  $f$  est dérivable en  $c$ , et  $c$  est un extremum local.

Par le théorème d'Euler,  $f'(c) = 0$ .

## **3.5 Théorème des accroissements finis (TAF)**

### **Théorème 3.12 : (Accroissements finis)**

Soient  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- i)  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
- ii)  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Autrement dit, il existe un point où la tangente est parallèle à la corde  $[A, B]$  avec  $A = (a, f(a))$ ,  $B = (b, f(b))$ .

#### **Preuve :**

L'idée est de se ramener au théorème de Rolle en soustrayant la droite  $(AB)$ .

On pose :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Alors  $g$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , et :

$$g(a) = f(a) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

Donc  $g(a) = g(b)$ . Par le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ , i.e. :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui donne bien  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

**Corolaire 3.13 :** (Forme avec un paramètre  $\theta$ )

Soit  $f$  dérivable sur  $I$  et  $x \in I$ . Pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x + h \in I$ , il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que :

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$$

**Exemple :**

En appliquant le corollaire à  $\ln$  avec  $h = 1$  :

Pour tout  $x > 0$ , il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{x+\theta}$ .

Or  $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+\theta} < \frac{1}{x}$  (car  $0 < \theta < 1$ ), donc :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

En sommant de  $p = 1$  à  $n$ , on obtient un encadrement de  $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$  par des quantités liées à  $\ln n$ , montrant que  $\frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \rightarrow 1$ .

### 3.6 Variations de fonctions

**Propriété 3.14 :** (Monotonie et dérivée)

Soit  $f$  dérivable sur  $I$ . Alors :

1.  $f$  est croissante  $\iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$
2.  $f$  est décroissante  $\iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$
3.  $f$  est constante  $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

**Preuve :**

On démontre (1).

( $\Rightarrow$ ) Supposons  $f$  croissante. Pour  $x > x_0$  dans  $I$  :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

En passant à la limite  $x \rightarrow x_0$ , on obtient  $f'(x_0) \geq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ . Soient  $x_1 < x_2$  dans  $I$ .

Par le TAF sur  $[x_1, x_2]$ , il existe  $c \in ]x_1, x_2[$  tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \geq 0$$

Donc  $f(x_2) \geq f(x_1)$  :  $f$  est croissante.

**Propriété 3.15 :** (Dérivée strictement positive  $\Rightarrow$  strictement croissante)

Soit  $f$  dérivable sur  $I$ .

Si  $\forall x \in I, f'(x) > 0$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

De même : si  $f' < 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement décroissante.

**Propriété 3.16 :** (Critère fin de stricte monotonie)

Si  $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$  et si  $f'$  ne s'annule pas sur un intervalle d'intérieur non vide, alors  $f$  est strictement croissante.

**Attention :** il faut que le domaine soit un intervalle. Contre-exemples :

- $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$  a  $f' = 0$  sur  $\mathbb{R}^*$  mais  $f$  n'est pas constante (domaine non connexe).
- $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^*$  a  $f' < 0$  partout, mais  $f$  n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}^*$  (car  $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ ).

### 3.7 Limites de dérivées et règle de l'Hôpital

**Propriété 3.17 :** (Existence de dérivée au bord par limite)

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell$  existe (finie), alors  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f'_d(a) = \ell$ .

**Preuve :**

Pour  $x \in ]a, b]$ , on applique le TAF sur  $[a, x]$  :

Il existe  $c_x \in ]a, x[$  tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

Quand  $x \rightarrow a^+$ ,  $c_x \in ]a, x[$  donc  $c_x \rightarrow a^+$  également. Donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$$

Donc  $f'_d(a) = \ell$ .

**Lemme 3.18 :** (TAF généralisé (Cauchy))

Soient  $f, g$  continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ .

Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

**Preuve :**

On pose  $h(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$ .

Alors  $h$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , et on vérifie :

$$h(a) = (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a)$$

$$h(b) = (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b)$$

On calcule :

$$h(b) - h(a) = (f(b) - f(a)) (g(b) - g(a)) - (g(b) - g(a)) (f(b) - f(a)) = 0$$

Donc  $h(a) = h(b)$ , et par le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ , i.e. :

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

### **Théorème 3.19 :** (Règle de l'Hôpital)

Soient  $f, g$  continues sur  $I$ , dérivables sur  $I$  sauf peut-être en  $x_0 \in I$ , et  $g'$  ne s'annule pas sauf peut-être en  $x_0$ .

Si  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

#### **Preuve :**

Pour  $x < x_0$  (le cas  $x > x_0$  est analogue), on applique le TAF généralisé de Cauchy sur  $[x, x_0]$  :

Il existe  $c_x \in ]x, x_0[$  tel que :

$$(f(x) - f(x_0))g'(c_x) = (g(x) - g(x_0))f'(c_x)$$

Comme  $g'(c_x) \neq 0$  et  $g(x) \neq g(x_0)$  (sinon par Rolle il existerait un point entre  $x$  et  $x_0$  où  $g' = 0$ , contradiction), on divise :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Quand  $x \rightarrow x_0$ ,  $c_x \in ]x, x_0[$  donc  $c_x \rightarrow x_0$ , et la limite est  $\ell$ .

#### **Exemple :**

On calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \ln(1+x)}{x^3}$  (avec  $f(x_0) = 0$ ,  $g(x_0) = 0$ ).

On a  $f'(x) = \cos x - x \sin x - \frac{1}{1+x}$ ,  $g'(x) = 3x^2$ , donc :

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x - x \sin x - \frac{1}{1+x}}{3x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} ?$$

On applique à nouveau l'Hôpital (forme 0/0), ou on utilise les développements limités.

## 3.8 Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes

### **Théorème 3.20 :** (Inégalité des accroissements finis)

Soit  $f$  dérivable sur  $I$  avec  $|f'(x)| \leq M$  pour tout  $x \in I$ . Alors :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

En particulier,  $f$  est lipschitzienne de rapport  $M$  sur  $I$ .

#### **Preuve :**

Soient  $x, y \in I$  avec  $x < y$  (le cas  $x > y$  est analogue).

Par le TAF sur  $[x, y]$ , il existe  $c \in ]x, y[$  tel que :

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x)$$

En prenant la valeur absolue :

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq M|x - y|$$

**Corolaire 3.21 :** ( $\mathcal{C}^1$  implique localement lipschitzienne)

Une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  (dérivable et  $f'$  continue) sur  $I$  est localement lipschitzienne sur  $I$  : elle est lipschitzienne sur tout segment  $[a, b] \subset I$ .

**Preuve :**

Sur le segment  $[a, b]$ ,  $f'$  est continue donc bornée : il existe  $M > 0$  tel que  $|f'(x)| \leq M$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

Par le théorème précédent,  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$ .

### 3.9 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

**Définition 3.22 :** (Classe  $\mathcal{C}^n$ )

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^n$**  sur  $I$  (et on note  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ ) si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et si la dérivée  $n$ -ième  $f^{(n)}$  est **continue** sur  $I$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  pour tout  $n \geq 0$ , on dit que  $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^\infty$**  sur  $I$  (indéfiniment dérivable).

**Remarques :**

1.  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  signifie que  $f$  est continue sur  $I$ .
2. Si  $f$  est  $(n + 1)$  fois dérivable, alors  $f^{(n)}$  est dérivable donc continue, et  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ .
3.  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$  si et seulement si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ .

**Exemple :**

Les fonctions sin, cos et exp sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour sin, les dérivées successives suivent un cycle de période 4 :

$$f^{(4k)} = \sin, \quad f^{(4k+1)} = \cos, \quad f^{(4k+2)} = -\sin, \quad f^{(4k+3)} = -\cos$$

## Chapitre 4

# Intégration

### 4.1 Intégrale de Riemann

Soit  $f$  bornée sur  $[a, b]$ .

Pour une subdivision  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , on pose pour chaque sous-intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  :

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

**Petite somme de Riemann (somme inférieure) :**

$$\ell(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i$$

**Grande somme de Riemann (somme supérieure) :**

$$L(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i$$

On a toujours  $\ell(f) \leq L(f)$ .

**Définition 4.1 :** (*Intégrabilité au sens de Riemann*)

La fonction  $f$  est **intégrable** sur  $[a, b]$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \text{ subdivision telle que } L(f) - \ell(f) < \varepsilon$$

Dans ce cas,  $\int_a^b f(x) dx$  est l'unique réel compris entre  $\ell(f)$  et  $L(f)$  pour toute subdivision.

**Exemples de fonctions intégrables :** les fonctions en escalier, les fonctions monotones, et les fonctions continues sur  $[a, b]$ .

**Contre-exemple :** la fonction de Dirichlet  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  (valant 1 sur  $\mathbb{Q}$  et 0 sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) n'est pas intégrable : pour toute subdivision,  $\ell(f) = 0$  et  $L(f) = 1$ , donc  $L - \ell = 1$ .

## 4.2 Intégrales et primitives

### **Théorème 4.2 :** (Intégrabilité des fonctions continues)

Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

### **Théorème 4.3 :** (Théorème fondamental de l'analyse (1))

Soit  $f$  continue sur  $I$  et  $a \in I$ .

La fonction  $S$  définie par :

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur  $I$  et  $S'(x) = f(x)$ .

En particulier,  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

### **Convention 4.4 :** (Convention d'orientation)

$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^x f(t) dt = -\int_x^a f(t) dt \quad \text{si } x < a$$

### **Corolaire 4.5 :** (Existence et unicité des primitives)

Toute fonction continue sur  $I$  admet des primitives.

Si  $F$  est l'une d'elles, les primitives de  $f$  sont exactement les fonctions  $F + c$  où  $c \in \mathbb{R}$  est une constante.

### **Preuve :**

Par le théorème fondamental,  $S = F + c$  est une primitive de  $f$  pour un certain  $c$ .

Si  $G$  est une autre primitive de  $f$ , alors  $(G - F)' = f - f = 0$  sur  $I$ .

Par la proposition 3.14 (dérivée nulle  $\Rightarrow$  fonction constante),  $G - F = c \in \mathbb{R}$ .

Donc  $G = F + c$ .

### **Corolaire 4.6 :** (Théorème fondamental de l'analyse (2))

Soit  $f$  continue sur  $I$ ,  $a \in I$ , et  $F$  une primitive quelconque de  $f$ . Pour tout  $b \in I$  :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: [F(t)]_a^b$$

### **Exemple :**

1. Les primitives de  $f(x) = x$  sur  $\mathbb{R}$  sont  $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$ .
2. Les primitives de  $f(x) = \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}_+$  sont  $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$ .
3. Les primitives de  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}$  sont  $F(x) = \text{Arctan } x + c$ .

## 4.3 Propriétés de l'intégrale

Soient  $f, g$  continues sur  $[a, b]$ .

### Propriété 4.7 : (Propriétés de l'intégrale)

#### 1. Linéarité :

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$
$$\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx$$

#### 2. Relation de Chasles : pour tout $c \in I$ ,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

#### 3. Positivité : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ , alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ .

#### 4. Croissance : si $f \leq g$ sur $[a, b]$ , alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$ .

#### 5. Inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

### Preuve :

On démontre (5).

Pour tout  $x \in [a, b]$ , l'inégalité  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  donne, par la croissance (propriété 4) :

$$-\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

Ce qui signifie exactement :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

## 4.4 Application : le logarithme népérien

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

### Définition 4.8 : (Logarithme népérien)

Le **logarithme népérien** est l'unique primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  s'annulant en 1 :

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*, \quad \ln 1 = 0$$

Autrement dit :  $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ .

### Propriété 4.9 : (Relation fonctionnelle)

Pour tous  $x, y > 0$  :  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ .

### Preuve :

Fixons  $y > 0$  et posons  $f(x) = \ln(xy)$  pour  $x > 0$ .

Par la règle de dérivation des fonctions composées :

$$f'(x) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = \ln' x$$

Donc  $f$  et  $\ln$  ont la même dérivée sur  $\mathbb{R}_+^*$  : elles diffèrent d'une constante.

Il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $\ln(xy) = \ln x + c$ .

Pour déterminer  $c$ , on évalue en  $x = 1$  :

$$\ln(y) = \ln(1 \cdot y) = \ln 1 + c = 0 + c = c$$

Donc  $c = \ln y$ , et on a bien  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ .

### Corolaire 4.10 : (Propriétés du logarithme)

Pour  $x > 0$  :

1.  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ .

2.  $\ln(x^n) = n \ln x$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

3. Plus généralement,  $\ln(x^{p/q}) = \frac{p}{q} \ln x$  pour  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ .

### Propriété 4.11 : (Propriétés analytiques de $\ln$ )

1.  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  (car  $\ln' = \frac{1}{x} > 0$ ).

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

3. **Croissances comparées :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

### Preuve :

On démontre (3).

**Limite en  $+\infty$ .** Pour  $x \geq 1$  et  $t \geq 1$ , on a  $\sqrt{t} \leq t$ , donc  $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ .

Par croissance de l'intégrale :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$$

Donc :

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x} - 2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Par le théorème des gendarmes,  $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ .

**Limite en  $0^+$ .** On pose  $y = \frac{1}{x}$ . Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $y \rightarrow +\infty$ , et :

$$x \ln x = \frac{1}{y} \cdot \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} \cdot (-\ln y) = -\frac{\ln y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$$

**Remarque :** la fonction exp est la réciproque de ln, et par la formule de dérivation des réciproques :

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x$$

## 4.5 Intégration par parties

### **Théorème 4.12 :** (*Intégration par parties (IPP)*)

Soient  $u, v$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

### Preuve :

Par la règle de Leibniz (dérivée d'un produit) :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

En intégrant les deux membres sur  $[a, b]$  et en appliquant le théorème fondamental :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx = \int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b$$

On en déduit la formule d'intégration par parties.

### Exemple :

1. Calcul de  $I = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ .

On pose  $u' = \cos x$  et  $v = x$ , donc  $u = \sin x$  et  $v' = 1$ .

La formule d'IPP donne :

$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - (0 - (-1)) = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. Calcul de  $I = \int_1^x \ln t dt$ .

On pose  $u' = 1$  et  $v = \ln t$ , donc  $u = t$  et  $v' = \frac{1}{t}$ .

$$I = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt = x \ln x - 0 - [t]_1^x = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1$$

## 4.6 Intégration par changement de variable

### **Théorème 4.13 :** (*Changement de variable*)

Soit  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[a, b]$  dans un intervalle  $I$ , et  $f$  continue sur  $I$ .

Alors :

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

### **Preuve :**

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$  (qui existe car  $f$  est continue).

La fonction  $F \circ \varphi$  est dérivable sur  $[a, b]$  et, par la règle de la chaîne :

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Donc  $F \circ \varphi$  est une primitive de  $x \mapsto f(\varphi(x)) \varphi'(x)$  sur  $[a, b]$ .

Par le théorème fondamental (2) :

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = [F(\varphi(x))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

### **Exemple :**

1.  $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx.$

On pose  $u = e^x$ , donc  $du = e^x dx$ . Quand  $x = 0$ ,  $u = 1$ ; quand  $x = 1$ ,  $u = e$ .

$$I = \int_1^e \frac{du}{u^2 + 1} = [\text{Arctan } u]_1^e = \text{Arctan } e - \frac{\pi}{4}$$

2.  $I = \int_0^{1/2} \frac{x \text{Arcsin}(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

On pose  $u = \text{Arcsin}(x^2)$ , donc  $du = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ .

Quand  $x = 0$ ,  $u = 0$ ; quand  $x = \frac{1}{2}$ ,  $u = \text{Arcsin}(\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{6}$ .

$$I = \int_0^{\pi/6} u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{144}$$

### 3. Surface du demi-cercle de rayon $R$ .

On pose  $x = R \sin \theta$ , donc  $dx = R \cos \theta d\theta$  et  $\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos \theta$ .

Quand  $x = -R$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ; quand  $x = R$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

$$S = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \theta \cdot R \cos \theta d\theta = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^2}{2}$$

## Chapitre 5

# Étude locale des fonctions

### 5.1 Fonctions équivalentes

#### Définition 5.1 : (Voisinage d'un point)

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{F}(a)$  l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de  $a$ , sauf peut-être en  $a$  lui-même.

On note  $\mathcal{F}^+(a)$  (resp.  $\mathcal{F}^-(a)$ ) le sous-ensemble des fonctions définies sur  $]a, a + \eta[$  (resp.  $]a - \eta, a[$ ) pour un certain  $\eta > 0$ .

De même,  $\mathcal{F}(+\infty)$  désigne les fonctions définies sur  $]x_0, +\infty[$  pour un certain  $x_0$ .

#### Définition 5.2 : (Fonctions équivalentes)

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(a)$ .

On dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes** au voisinage de  $a$ , et on note  $f \sim_a g$ , s'il existe  $u \in \mathcal{F}(a)$  tel que :

$$f = u \cdot g \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$$

Intuitivement :  $f$  et  $g$  ont le même ordre de grandeur et les mêmes signes au voisinage de  $a$ .

#### Propriété 5.3 : (Caractérisations des équivalents)

1. Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  (sauf peut-être en  $a$ ) :

$$f \sim_a g \iff \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

2. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \neq 0$ , alors  $f \sim_a g$ .

#### Propriété 5.4 : (L'équivalence est une relation d'équivalence)

La relation  $\sim_a$  est réflexive, symétrique et transitive.

#### Preuve :

**Réflexivité.** Pour tout  $f \in \mathcal{F}(a)$ , on a  $f = 1 \cdot f$  avec  $u = 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ , donc  $f \sim_a f$ .

**Symétrie.** Si  $f \sim_a g$ , il existe  $u \rightarrow 1$  tel que  $f = ug$ .

Au voisinage de  $a$ ,  $u(x) \neq 0$  (car  $u \rightarrow 1 \neq 0$ ), donc on peut écrire  $g = \frac{1}{u} \cdot f$ , avec  $\frac{1}{u} \rightarrow 1$ .

Donc  $g \sim_a f$ .

**Transitivité.** Si  $f \sim_a g$  et  $g \sim_a h$ , il existe  $u, v \rightarrow 1$  tels que  $f = ug$  et  $g = vh$ .

Alors  $f = uv \cdot h$ , avec  $uv \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$ .

Donc  $f \sim_a h$ .

#### Propriété 5.5 : (Obtention d'équivalents par dérivation)

Si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) \neq 0$ , alors :

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$$

### Preuve :

On calcule le rapport des deux expressions :

$$\frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x - a)} = \frac{1}{f'(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{f'(a)} \cdot f'(a) = 1$$

Donc  $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a)$ .

### Exemple :

Équivalents classiques en 0 :

$$- e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \quad \ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x, \quad \sin x \underset{0}{\sim} x, \quad \tan x \underset{0}{\sim} x, \quad \sinh x \underset{0}{\sim} x$$

$$- \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, \quad \cosh x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$- \text{Pour } f(x) = \sum_{k=p}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ avec } a_p \neq 0 : f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p \text{ (le terme dominant)}$$

### Théorème 5.6 : (Limite d'un équivalent)

Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

### Propriété 5.7 : (Opérations sur les équivalents)

1. **Produit** : Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $h \underset{a}{\sim} k$ , alors  $fh \underset{a}{\sim} gk$ .

2. **Inverse** : Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et si  $f, g$  ne s'annulent pas, alors  $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$ .

**Attention** :  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $h \underset{a}{\sim} k$  n'impliquent pas  $f + h \underset{a}{\sim} g + k$  en général (les termes dominants peuvent se compenser).

### Propriété 5.8 : (Substitution dans les équivalents)

Soient  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $h$  telle que  $\lim_{t \rightarrow a} h(t) = a$ .

Si  $f \circ h$  et  $g \circ h$  sont définies au voisinage de  $a$ , alors  $f \circ h \underset{a}{\sim} g \circ h$ .

### Exemple :

—  $\sin x \underset{0}{\sim} x$ , donc  $\sin(\sin t) \underset{0}{\sim} \sin t \underset{0}{\sim} t$ . Par transitivité :  $\sin(\sin t) \underset{0}{\sim} t$ .

—  $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$  car  $[(1 + x)^\alpha]_{x=0}' = \alpha$  et le terme constant vaut 1, donc par la prop. 5.5 :  $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha(x - 0) = \alpha x$ .

— Calcul de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{1 - \cos x}$  :

$$\tan x \underset{0}{\sim} x \implies \tan^3 x \underset{0}{\sim} x^3 \quad \text{et} \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Donc par produit/quotient :

$$\frac{\tan^3 x}{1 - \cos x} \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{x^2/2} = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

## 5.2 Fonctions négligeables et dominées

### Définition 5.9 : (Fonction négligeable devant une autre ( $o$ ))

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(a)$ .

On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  au voisinage de  $a$ , et on écrit  $f = o(g)$ , s'il existe  $\varepsilon \in \mathcal{F}(a)$  tel que :

$$f = \varepsilon \cdot g \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Si  $g$  ne s'annule pas, cela revient à  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow a$ .

### Définition 5.10 : (Fonction dominée ( $O$ ))

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(a)$ .

On dit que  $f$  est **dominée** par  $g$  au voisinage de  $a$ , et on écrit  $f = O(g)$ , s'il existe  $u \in \mathcal{F}(a)$  **bornée** au voisinage de  $a$  telle que  $f = u \cdot g$ .

Si  $g$  ne s'annule pas, cela revient à dire que  $\frac{f(x)}{g(x)}$  est bornée au voisinage de  $a$ .

### Propriété 5.11 : (Propriétés des petits $o$ )

Les fonctions sont dans  $\mathcal{F}(a)$  :

- (a) **Transitivité** :  $f = o(g)$  et  $g = o(h) \implies f = o(h)$ .
- (b) **Stabilité par somme** :  $f_1 = o(g)$  et  $f_2 = o(g) \implies f_1 + f_2 = o(g)$ .
- (c) **Produit  $o \cdot O$**  :  $f_1 = o(g_1)$  et  $f_2 = O(g_2) \implies f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ .
- (d) **Lien avec la limite nulle** :  $f = o(1)$  en  $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .
- (e) **Inversion** : si  $f, g$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$  :  $f = o(g) \implies \frac{1}{g} = o\left(\frac{1}{f}\right)$ .

### Propriété 5.12 : (Lien entre $\sim$ et $o$ )

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g = o(g)$$

Autrement dit,  $f$  est équivalente à  $g$  si et seulement si  $f - g$  est négligeable devant  $g$ .

### Preuve :

$$\begin{aligned} f \underset{a}{\sim} g &\iff \exists u \rightarrow 1 \text{ tel que } f = ug \\ &\iff f - g = \underbrace{(u-1)}_{\rightarrow 0} \cdot g \\ &\iff f - g = o(g) \end{aligned}$$

### Exemple :

- En  $0$  :  $x^2 = o(x)$  car  $\frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0$ .
- En  $0$  : pour  $n > k$ ,  $x^n = o(x^k)$  car  $\frac{x^n}{x^k} = x^{n-k} \rightarrow 0$ .
- En  $0$  :  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x)$  car  $\frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$ .
- En  $+\infty$  :  $x^k = o(x^n)$  si  $k < n$  car  $\frac{x^k}{x^n} = x^{k-n} \rightarrow 0$ .

## 5.3 Développements limités

### Définition 5.13 : (Développement limité)

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{F}(a)$ .

La fonction  $f$  admet un **développement limité (DL) à l'ordre  $n$  en  $a$**  s'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que, au voisinage de  $a$  :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

La partie polynomiale  $\sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$  est appelée la **partie régulière** du DL.

### Propriété 5.14 : (Unicité du DL)

Si  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en  $a$ , il est unique.

#### Preuve :

Supposons que  $f$  admette deux DL en  $a$  à l'ordre  $n$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

En soustrayant, on obtient :

$$0 = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Soit  $p \leq n$  le plus petit indice tel que  $a_p \neq b_p$  (s'il existe). Alors :

$$0 = (a_p - b_p)(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

En divisant par  $(x-a)^p$  et en faisant  $x \rightarrow a$  :

$$0 = a_p - b_p \neq 0$$

Contradiction. Donc  $a_k = b_k$  pour tout  $k$ , et le DL est unique.

## 5.4 Théorème de Taylor

### Théorème 5.15 : (Taylor-Young)

Soit  $f$  définie au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(n-1)$  fois dérivable au voisinage de  $a$  et  $n$  fois dérivable en  $a$ .

Alors, au voisinage de  $a$  :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

Autrement dit,  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en  $a$ , de coefficients  $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ .

### Preuve :

Par récurrence sur  $n$ .

**Initialisation** ( $n=1$ ). Par définition de  $f'(a)$  :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)$$

Ce qui s'écrit  $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$ . La formule est vérifiée.

**Hérédité.** Supposons la formule vraie jusqu'à l'ordre  $n-1$ .

On pose  $h = x - a$  et on définit la fonction :

$$g(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2}f''(a) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

On calcule la dérivée de  $g$  :

$$g'(h) = f'(a+h) - f'(a) - hf''(a) - \dots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(a)$$

C'est exactement l'erreur du DL à l'ordre  $n-1$  de  $f'$  en  $a$ . Par hypothèse de récurrence appliquée à  $f'$  :

$$g'(h) = o(h^{n-2})$$

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à  $g$  sur  $[0, h]$  (avec  $g(0) = 0$ ) :

$$|g(h)| = |g(h) - g(0)| \leq |h| \cdot \max_{t \in [0, h]} |g'(t)| = |h| \cdot o(|h|^{n-2}) = o(h^{n-1})$$

Donc  $g(h) = o(h^{n-1})$ , ce qui est exactement la formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$ .

### Théorème 5.16 : (Taylor avec reste intégral)

On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $]a-\alpha, a+\alpha[$ . Pour  $|h| < \alpha$  :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + r_n(h)$$

avec le **reste intégral** :

$$r_n(h) = h^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th) dt$$

et le **reste de Lagrange** :

$$|r_n(h)| \leq \frac{M|h|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{avec} \quad M = \max_{x \in ]a-\alpha, a+\alpha[} |f^{(n+1)}(x)|$$

**Exemple :****DL classiques en 0 à l'ordre  $n$  :**

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

**5.5 Opérations sur les DL**

On se limite aux DL en 0.

1. **Addition** : si  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$  et  $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$ , alors :

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$$

2. **Produit** :  $(fg)(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$  avec  $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ .

3. **Composition** : si  $g(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$  et  $f(y) = a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n + o(y^n)$ , on substitue  $y = g(x)$  et on tronque à l'ordre  $n$ .

4. **Quotient** : si  $g(0) \neq 0$ , on effectue la division euclidienne tronquée des polynômes.

5. **Primitive** : si  $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$  et  $F$  est une primitive de  $f$  :

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

**Exemple :**

1. **DL de  $e^{\sin x}$  à l'ordre 3 en 0.**

On commence par le DL de  $\sin x$  :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

On pose  $y = \sin x$  et on applique le DL de  $e^y$  :

$$\begin{aligned}
e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) \\
e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

En développant et en gardant les termes d'ordre  $\leq 3$  :

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 + o(x^3)$$

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = x^3 + o(x^3)$$

Donc :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. **DL de  $\tan x$  à l'ordre 5 en 0** (division de  $\sin x$  par  $\cos x$ ) :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

3. **DL de Arctan par intégration.**

On part du DL :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

En intégrant terme à terme (opération (5)) et en utilisant  $\text{Arctan } 0 = 0$  :

$$\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

4. **Calcul de limite.**

$$\begin{aligned} \sinh x - \sin x &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

**Remarque (DL et équivalents) :** si  $f(x) = a_p(x - x_0)^p + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$  avec  $a_p \neq 0$ , alors le terme dominant est  $a_p(x - x_0)^p$  et donc :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$$

## 5.6 DL à l'infini

### Définition 5.17 : (DL en $+\infty$ )

Soit  $f$  définie sur  $]A, +\infty[$ .

Elle admet un **développement limité** à l'ordre  $n$  en  $+\infty$  s'il existe  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

**Méthode :** on pose  $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0$  et on obtient un DL en 0 de  $f\left(\frac{1}{u}\right)$ .

### Exemple :

DL de  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  à l'ordre 2 en  $+\infty$ .

On pose  $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0$  :

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-u}$$

On applique le DL de  $\frac{1}{1-u}$  en 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

## 5.7 Applications des DL

### 5.7.1 Tangentes au graphe

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  avec DL en  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^p}{p!}f^{(p)}(x_0) + o((x-x_0)^p)$$

avec  $a_p = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} \neq 0$ .

La tangente en  $x_0$  est  $T(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$ , et :

$$f(x) - T(x) = (x-x_0)^p [a_p + \varepsilon(x-x_0)] \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow 0$$

Donc  $f(x) - T(x)$  a le signe de  $a_p(x-x_0)^p$  pour  $|x-x_0|$  petit.

— Si  $p$  est pair :  $(x-x_0)^p > 0$ , donc  $f - T$  est du signe de  $a_p$  des deux côtés de  $x_0$ .

— Si  $p$  est impair : le signe de  $f - T$  change au passage de  $x_0$ .

### Exemple :

Pour  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ , le DL en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

La tangente en 0 est  $T(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ .

On a  $f(x) - T(x) = -\frac{1}{8}x^2 + o(x^2) < 0$  au voisinage de 0.

Donc le graphe de  $f$  est **en-dessous** de sa tangente en 0.

## 5.7.2 Branches infinies

La droite  $x \mapsto ax + b$  est une **asymptote** au graphe de  $f$  en  $+\infty$  si  $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ , i.e.  $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ .

**Méthode de détermination :**

1. On calcule  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
2. Si  $a$  est fini, on calcule  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ .

Si  $f(x) = ax + b + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  avec  $a_1 \neq 0$ , alors  $f(x) - (ax + b) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_1}{x}$ , ce qui précise la **position relative** du graphe par rapport à l'asymptote.

**Exemple :**

On étudie  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

On a  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus ]0, 1]$ .

**En  $+\infty$  :** pour  $x > 1$ ,

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = x\sqrt{\frac{x}{x-1}} = x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2}$$

On utilise le DL de  $(1-u)^{-1/2}$  en 0 à l'ordre 2 (avec  $u = \frac{1}{x}$ ) :

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

L'asymptote en  $+\infty$  est  $y = x + \frac{1}{2}$ .

Comme  $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0$  pour  $x$  grand, le graphe est **au-dessus** de l'asymptote.

**En  $-\infty$  :** pour  $x < 0$ ,  $f(x) = -x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$ , et le même calcul donne :

$$f(x) = -x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

L'asymptote en  $-\infty$  est  $y = -x - \frac{1}{2}$ .

Comme  $f(x) - \left(-x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) < 0$  pour  $x \rightarrow -\infty$ , le graphe est **en-dessous** de l'asymptote.