

Mathématiques 2013–2014

TD d'Algèbre Matricielle

?? ??

Bureau n° M.?.??

???.???@univ-rouen.fr

Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem

Avenue de l'Université, BP.12,

F76801 Saint-Étienne-du-Rouvray.

Rédigé avec \LaTeX

par Hicham AMARIR

le 31 mai 2026

Table des matières

Fiche n°1 – Révisions des premières notions d’algèbre linéaire	3
Corrigé fiche n°1 – Révisions des premières notions d’algèbre linéaire	8
Fiche n°1bis – Changement de base, rang et applications	41
Corrigé fiche n°1bis – Changement de base, rang et applications	43
Fiche n°2 – Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation, trigonalisation	44
Corrigé fiche n°2 – Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation, trigonalisation	47
Fiche n°3 – Endomorphismes	48
Corrigé fiche n°3 – Endomorphismes	51

Fiche 1. Révisions des premières notions d'algèbre linéaire.

Exercice 1.

Pour chacun des espaces vectoriels réels suivants, donner la dimension et la base canonique :

$$E = \mathbb{R}, \quad E = \mathbb{R}^2, \quad E = \mathbb{R}^3, \quad E = \mathbb{R}^n, \quad E = \mathbb{C}, \quad E = \mathbb{R}_2[X], \quad E = \mathbb{R}_3[X], \quad E = \mathbb{R}_n[X], \quad E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 2.

On considère $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (2, 3, -1)$, $u_3 = (-1, 1, -3)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3.

On considère :

$$P = X^3 - 1, \quad Q = -2X^3 + X^2 - X, \quad R = X^3 + 2X^2 + X + 3, \quad S = -3X^3 + 2X^2 - 2X + 1.$$

Montrer que $\mathcal{B} = (P, Q, R, S)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4.

On considère les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Montrer que le sous-ensemble F suivant est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

Donner une base de F et en déduire la dimension de F .

Exercice 6.

Montrer que le sous-ensemble H suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } a + b + c - d = 0 \right\}$$

Donner une base de H ; en déduire la dimension de H .

Exercice 7.

Montrer que le sous-ensemble K suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$K = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid 2P(0) - P(1) = 0\}$$

Donner une base de K ; en déduire la dimension de K .

Exercice 8.

On considère :

$$f : x \mapsto \sin x ; \quad g : x \mapsto \cos x ; \quad h : x \mapsto \sin(2x) ; \quad k : x \mapsto e^x.$$

Démontrer que la famille (f, g, h, k) est une famille libre de l'espace vectoriel réel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f((x, y)) = (2x - y, x + y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
2. Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 .
3. Déterminer $\text{Ker } f$. f est-elle bijective?
4. Déterminer $\text{Im } f$.

Exercice 10.

Soit l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 telle que :

$$f((x, y, z)) = (x - y + z, 2x + y - z, 3x + 3y - 3z).$$

1. Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $\text{Ker } f$. f est-elle bijective?
3. Déterminer $\text{Im } f$.
4. On prend comme deuxième base de \mathbb{R}^3 la base \mathcal{B} de l'exercice 2.
 - (a) Écrire la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} .
 - (b) Quelles sont les composantes du vecteur $a = (-1, 1, 3)$ dans la base \mathcal{B} ?
 - (c) Déterminer la matrice de f relativement à la base \mathcal{B} .

Exercice 11.

Soit f un endomorphisme de E , espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 4, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_4)$ une base de E .

On suppose que pour tout $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \in E$, on a :

$$f(x) = x_1 e_1 + (x_2 + x_3) e_2 + (x_3 + x_4) e_3 + x_4 e_4.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base \mathcal{E} .
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Montrer que $A - I_4$ est nilpotente. Expliciter la relation entre I_4, A, A^2 et A^n .
4. Soit $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_4)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$e'_2 = e_2 - e_3 + e_4$$

$$e'_3 = e_3$$

$$e'_4 = e_4$$

Montrer que \mathcal{E}' est une base de E .

5. Déterminer A' matrice de f dans la base \mathcal{E}' .

Exercice 12.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$ et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le noyau et l'image de u (on précisera une base de $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$).

Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires?

- On complète une base de $\text{Ker } u$ en une base \mathcal{B}' de E .

Écrire la matrice M' de u dans cette base \mathcal{B}' .

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

On appelle **projection sur F parallèlement à G** l'application p de E dans E définie par :

$$p(x_F + x_G) = x_F \quad (*)$$

où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et D_u la droite vectorielle engendrée par $u = e_1 + e_2 + e_3$.

- Expliquer pourquoi p est définie par la relation (*) ci-dessus.
- Démontrer que p est une application linéaire.
- Soit H le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2 . Montrer que $E = H \oplus D_u$.
- Soit p la projection sur H parallèlement à D_u . Donner la matrice de p dans la base \mathcal{B} .

Exercice 14.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les opérations de matrices suivantes :

$$A + C \quad -2A \quad AC \quad CA \quad A^2 \quad B^2 \quad A^t \quad B^t$$

Exercice 15.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuer tous les produits possibles de deux matrices prises parmi les matrices précédentes.

Exercice 16.

On considère l'ensemble :

$$G = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid M = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C} \right\}$$

1. Montrer que G est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , mais pas sur \mathbb{C} .
2. Déterminer une base de l'espace et donner la dimension.
3. Montrer que $A, B \in G \Rightarrow AB \in G$.

Montrer que l'ensemble $G_0 = G \setminus \{0_2\}$ est un groupe abélien par rapport à la multiplication matricielle.

Exercice 17.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A_1, A_2, A_3 et A_4 en utilisant le développement par rapport à une ligne/colonne.
2. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_1$ et $\det A_2$.
3. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_3$.
4. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_4$.
5. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_5$.

Exercice 18.

Calculer chacun des déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha + z_1 \bar{z}_1 & z_1 \bar{z}_2 & \cdots & z_1 \bar{z}_n \\ z_2 \bar{z}_1 & \alpha + z_2 \bar{z}_2 & \cdots & z_2 \bar{z}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n \bar{z}_1 & z_n \bar{z}_2 & \cdots & \alpha + z_n \bar{z}_n \end{vmatrix}$$

où $\alpha = z_1 \bar{z}_1 + \cdots + z_n \bar{z}_n$.

Exercice 19.

Soient M et U les matrices carrées de taille n données par :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq b, \quad U := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que quel que soit $x \in \mathbb{R}$ on ait $\det(M + xU) = \alpha x + \beta$.

2. Calculer $\det(M - aU)$ et $\det(M - bU)$. En déduire $\det(M)$.

Fiche 1. Révisions des premières notions d'algèbre linéaire. — Corrigé.

Exercice 1.

Pour chacun des espaces vectoriels réels suivants, donner la dimension et la base canonique :

$$E = \mathbb{R}, \quad E = \mathbb{R}^2, \quad E = \mathbb{R}^3, \quad E = \mathbb{R}^n, \quad E = \mathbb{C}, \quad E = \mathbb{R}_2[X], \quad E = \mathbb{R}_3[X], \quad E = \mathbb{R}_n[X], \quad E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 1.

- ⊛ $E = \mathbb{R}$ est de dimension 1 sur \mathbb{R} .

Base canonique $\mathcal{B} = (1)$ (tout réel non nul convient à la place de 1).

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = x \times 1$.

- ⊛ $E = \mathbb{R}^2$ est de dimension 2 sur \mathbb{R} .

Base canonique :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

L'écriture dans la base canonique est unique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ⊛ $E = \mathbb{R}^3$ est de dimension 3 sur \mathbb{R} .

Base canonique :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- ⊛ $E = \mathbb{R}^n$ est de dimension n sur \mathbb{R} .

Base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ où e_j est le vecteur colonne ayant un 1 en position j et des 0 ailleurs :

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

- ⊛ $E = \mathbb{C}$ est de dimension 2 sur \mathbb{R} .

Base canonique $\mathcal{B} = (1, i)$.

Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

⊙ $E = \mathbb{C}$ est de dimension 1 sur \mathbb{C} .

Base canonique $\mathcal{B} = (1)$.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = z \times 1$.

⊙ $E = \mathbb{R}_2[X] = \{a + bX + cX^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

Donc E est de dimension 3.

⊙ $E = \mathbb{R}_3[X] = \{a + bX + cX^2 + dX^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$

Donc E est de dimension 4.

⊙ $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$

Donc E est de dimension $n + 1$.

⊙ $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Base canonique :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc E est de dimension 4.

⊙ $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Base canonique :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc E est de dimension 9.

Exercice 2.

On considère $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (2, 3, -1)$, $u_3 = (-1, 1, -3)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Correction de l'exercice 2.

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

c'est-à-dire :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

De plus, dans un espace de dimension 3, toute famille libre de 3 vecteurs est génératrice, c'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3.

On considère :

$$P = X^3 - 1, \quad Q = -2X^3 + X^2 - X, \quad R = X^3 + 2X^2 + X + 3, \quad S = -3X^3 + 2X^2 - 2X + 1.$$

Montrer que $\mathcal{B} = (P, Q, R, S)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction de l'exercice 3.

On écrit les coordonnées de P, Q, R, S dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$:

$$(P)_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (Q)_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (R)_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (S)_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R + \lambda_4 S = 0$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_4 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_4 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

La famille $\mathcal{B} = (P, Q, R, S)$ est libre.

Dans un espace de dimension 4, toute famille libre de 4 vecteurs est génératrice, donc \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4.

On considère les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 4.

On identifie chaque matrice à un vecteur colonne de \mathbb{R}^4 via la base canonique $\mathcal{B}_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_2 &= (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_3 &= 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_4 &= (-3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où les vecteurs de coordonnées :

$$(A_1)_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (A_2)_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A_3)_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (A_4)_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On forme la matrice A dont les colonnes sont ces vecteurs et on la réduit par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{8}{3}L_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice est échelonnée avec un pivot par colonne, donc la famille $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est **libre**.

De plus, un pivot par ligne signifie que la famille est **génératrice**.

C'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Autre méthode. On peut aussi construire explicitement la base canonique à partir de \mathcal{B} . On pose :

$$A' = A_4 - 2A_1 - 2A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$A_1 + A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{22}$$

$$A_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$$

$$A_2 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21}$$

On a ainsi obtenu la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ comme combinaisons linéaires de \mathcal{B} , donc \mathcal{B} est génératrice.

Étant génératrice dans un espace de dimension 4 avec 4 éléments, \mathcal{B} est libre et

Donc \mathcal{B} est bien une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Montrer que le sous-ensemble F suivant est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

Donner une base de F et en déduire la dimension de F .

Correction de l'exercice 5.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

On utilise la caractérisation par stabilité par combinaison linéaire.

* **Montrons que F est non-vide :** $(0, 0, 0)$ vérifie $2 \times 0 + 0 - 0 = 0$, donc $(0, 0, 0) \in F$ donc $F \neq \emptyset$.

* **Montrons que F est stable par combinaison linéaire :**

Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in F, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Donc :

$$2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2 + y_2 - z_2 = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2(ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2) - (az_1 + bz_2) &= a(2x_1 + y_1 - z_1) + b(2x_2 + y_2 - z_2) \\ &= a \times 0 + b \times 0 = 0 \end{aligned}$$

donc $a \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in F$.

F est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Base et dimension de F .

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$ vérifie $2x + y - z = 0 \iff z = 2x + y$, donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En posant $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (obtenu pour $x = 0, y = 1$) et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (obtenu pour $x = 1, y = 0$), tout élément de F s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 , donc $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

La famille (u_1, u_2) est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de F :

$$\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

et $\dim(F) = 2$.

Autre méthode (noyau d'une application linéaire). On considère l'application :

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto 2x + y - z$$

L est une application linéaire et $F = \ker(L)$. Tout noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel, ce qui redonne que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Par le théorème du rang :

$$\dim(\ker(L)) + \dim(\text{Im}(L)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Or $\text{Im}(L) = \mathbb{R}$ donc $\dim(\text{Im}(L)) = 1$, d'où $\dim(F) = \dim(\ker(L)) = 2$.

Exercice 6.

Montrer que le sous-ensemble H suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } a + b + c - d = 0 \right\}$$

Donner une base de H ; en déduire la dimension de H .

Correction de l'exercice 6.

H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Non-vide : La matrice nulle vérifie $0 + 0 + 0 - 0 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$ et $H \neq \emptyset$.

Stabilité : Soient $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in H$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in H$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a $a_1 + b_1 + c_1 - d_1 = 0$ et $a_2 + b_2 + c_2 - d_2 = 0$.

Pour la somme :

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) &= (a_1 + b_1 + c_1 - d_1) + (a_2 + b_2 + c_2 - d_2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

donc $M_1 + M_2 \in H$.

Pour la multiplication scalaire :

$$\alpha M_1 = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$$\alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1 - \alpha d_1 = \alpha (a_1 + b_1 + c_1 - d_1) = \alpha \times 0 = 0$$

donc $\alpha M_1 \in H$.

H est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Base et dimension de H .

Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ vérifie $a + b + c - d = 0 \iff d = a + b + c$, donc :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenus respectivement pour $(a = 1, b = 0, c = 0)$, $(a = 0, b = 1, c = 0)$ et $(a = 0, b = 0, c = 1)$, tout élément de H s'écrit $A = aA_1 + bA_2 + cA_3$, donc (A_1, A_2, A_3) est une famille génératrice de H .

Liberté : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On lit directement $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. La famille est libre.

(A_1, A_2, A_3) est donc une base de H et $\dim(H) = 3$.

Exercice 7.

Montrer que le sous-ensemble K suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$K = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid 2P(0) - P(1) = 0\}$$

Donner une base de K ; en déduire la dimension de K .

Correction de l'exercice 7.

K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Non-vide : Le polynôme nul vérifie $2 \times 0 - 0 = 0$, donc $0 \in K$ et $K \neq \emptyset$.

Stabilité : Soient $P, Q \in K$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $2P(0) - P(1) = 0$ et $2Q(0) - Q(1) = 0$. Calculons $2(\lambda P + Q)(0) - (\lambda P + Q)(1)$:

$$\begin{aligned} 2(\lambda P + Q)(0) - (\lambda P + Q)(1) &= 2\lambda P(0) + 2Q(0) - \lambda P(1) - Q(1) \\ &= \lambda[2P(0) - P(1)] + [2Q(0) - Q(1)] \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda P + Q \in K$.

K est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Base et dimension de K .

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$. On a :

$$P(0) = c, \quad P(1) = a + b + c$$

La condition $P \in K$ s'écrit :

$$2P(0) - P(1) = 0 \iff 2c - (a + b + c) = 0 \iff c - a - b = 0 \iff c = a + b$$

Donc :

$$P(x) = ax^2 + bx + a + b = a(x^2 + 1) + b(x + 1)$$

Tout élément de K s'écrit comme combinaison linéaire de $x^2 + 1$ et $x + 1$, donc la famille $(X^2 + 1, X + 1)$ est génératrice de K .

Liberté : Les polynômes $X^2 + 1$ et $X + 1$ sont de degrés distincts (2 et 1), donc ils sont linéairement indépendants.

Ainsi $\mathcal{B}_K = (X + 1, X^2 + 1)$ est une base de K et $\dim(K) = 2$.

Exercice 8.

On considère :

$$f : x \mapsto \sin x ; \quad g : x \mapsto \cos x ; \quad h : x \mapsto \sin(2x) ; \quad k : x \mapsto e^x.$$

Démontrer que la famille (f, g, h, k) est une famille libre de l'espace vectoriel réel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 8.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \sin(2x) + \lambda_4 e^x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (E)$$

En évaluant en des valeurs particulières de x :

Pour $x = 0$:

$$\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \quad (1)$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lambda_1 + \lambda_4 e^{\pi/2} = 0 \quad (2)$$

Pour $x = \pi$:

$$-\lambda_2 + \lambda_4 e^\pi = 0 \quad (3)$$

(1) + (3) donne :

$$\begin{aligned} \lambda_4(1 + e^\pi) &= 0 \\ 1 + e^\pi \neq 0 &\implies \boxed{\lambda_4 = 0} \end{aligned}$$

En remplaçant λ_4 dans (1), on obtient $\boxed{\lambda_2 = 0}$.

En remplaçant λ_4 dans (2) on obtient $\boxed{\lambda_1 = 0}$.

En remplaçant λ_1, λ_2 et λ_4 par 0 dans (E), il vient que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \sin(2x) + \lambda_4 e^x &= 0 \\ \implies \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_3 \sin(2x) &= 0 \end{aligned}$$

Comme il existe des valeurs $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(2x) \neq 0$ on conclue que $\boxed{\lambda_3 = 0}$.

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, et la famille (f, g, h, k) est bien une famille libre de l'espace vectoriel réel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f((x, y)) = (2x - y, x + y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
2. Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 .
3. Déterminer $\text{Ker } f$. f est-elle bijective?
4. Déterminer $\text{Im } f$.

Correction de l'exercice 9.

1. f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x, y) + \lambda f(x', y') &= (2x - y, x + y) + \lambda(2x' - y', x' + y') \\ &= (2x - y + 2\lambda x' - \lambda y', x + y + \lambda x' + \lambda y') \\ &= (2(x + \lambda x') - (y + \lambda y'), (x + \lambda x') + (y + \lambda y')) \\ &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= f((x, y) + \lambda(x', y')) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire, et comme $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, c'est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

2. Matrice de f dans la base canonique.

La base canonique de \mathbb{R}^2 est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On calcule :

$$f(1, 0) = (2 \times 1 - 0, 1 + 0) = (2, 1),$$

$$f(0, 1) = (2 \times 0 - 1, 0 + 1) = (-1, 1)$$

La matrice de f dans la base canonique est :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie : pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x f(1, 0) + y f(0, 1) \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Noyau de f et f est-elle bijective?

$(x, y) \in \ker f$ si et seulement si $f(x, y) = (0, 0)$, soit :

$$f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = y \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -x \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker f = \{(0, 0)\}$.

f est un endomorphisme avec son noyau est réduit vecteur nul, donc f est injective.

f est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, donc d'après le théorème du rang, f est surjective, et donc **bijective**.

4. Image de f .

f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 , donc par le théorème du rang :

$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Or $\dim(\ker f) = 0$, donc $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, d'où :

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$$

Exercice 10.

Soit l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 telle que :

$$f((x, y, z)) = (x - y + z, 2x + y - z, 3x + 3y - 3z).$$

1. Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$. f est-elle bijective?
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
4. On prend comme deuxième base de \mathbb{R}^3 la base \mathcal{B} de l'exercice 2.
 - (a) Écrire la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} .
 - (b) Quelles sont les composantes du vecteur $a = (-1, 1, 3)$ dans la base \mathcal{B} ?
 - (c) Déterminer la matrice de f relativement à la base \mathcal{B} .

Correction de l'exercice 10.

1. Matrice de f dans la base canonique.

On calcule l'image des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$:

$$f(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$$

$$f(0, 1, 0) = (-1, 1, 3)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, -1, -3)$$

La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = M_{\mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Noyau de f et f est-elle bijective?

Soit $\vec{u} = (x, y, z)$. On a $\vec{u} \in \operatorname{ker} f \iff f(x, y, z) = 0$, soit :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne $x + y - z = 0$. En ajoutant la première et la troisième :

$$2x = 0 \implies x = 0$$

La deuxième équation donne alors $y - z = 0$, puis $y = z$. Donc :

$$\operatorname{ker} f = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\operatorname{ker} f \neq \{0\}$, donc f n'est pas injective et donc pas bijective.

3. Image de f .

Par le théorème du rang : $\dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2$.

On cherche les conditions sur (a, b, c) pour que $f(x, y, z) = (a, b, c)$ ait une solution. On réduit la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 & b \\ 3 & 3 & -3 & c \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & -3 & b - 2a \\ 0 & 6 & -6 & c - 3a \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & -3 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & c - 3a - 2b + 4a \end{array} \right)$$

Le système est compatible si et seulement si $c - 3a - 2b + 4a = 0$, soit $a - 2b + c = 0$. Donc :

$$\text{Im } f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b + c = 0\}$$

4. Matrice de passage et matrice de f dans la base \mathcal{B} .

La base de l'exercice 2 est $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ avec :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Matrice de passage de \mathcal{B}_E à \mathcal{B} .

La matrice de passage P (dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B} dans la base canonique) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1} par la méthode du pivot sur $(P \mid I_3)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}]{L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}]{L_3 \leftarrow (-1)L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -\frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{7}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{7}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $P \times P^{-1} = I_3$:

$$P \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{7}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} + \frac{2}{5} - 1 & -\frac{7}{5} + \frac{2}{5} + 1 & -1 + 0 + 1 \\ -\frac{8}{5} + \frac{3}{5} + 1 & \frac{7}{5} + \frac{3}{5} - 1 & 1 + 0 - 1 \\ \frac{16}{5} - \frac{1}{5} - 3 & -\frac{14}{5} - \frac{1}{5} + 3 & -2 + 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(b) **Composantes du vecteur $a = (-1, 1, 3)$ dans la base \mathcal{B} .**

On calcule $(a)_{\mathcal{B}} = P^{-1}(a)_{\mathcal{B}_E}$:

$$(a)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{7}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} - \frac{7}{5} - 3 \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + 0 \\ -1 - 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(c) **Matrice de f dans la base \mathcal{B} .**

On utilise la formule de changement de base :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$$

On calcule d'abord AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{24}{5} & -6 & 6 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Puis $M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}(AP)$:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{7}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{24}{5} & -6 & 6 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

La relation fondamentale est :

$$\begin{aligned} P(u)_{\mathcal{B}} &= (u)_{\mathcal{B}_E} \\ \Leftrightarrow AP(u)_{\mathcal{B}} &= A(u)_{\mathcal{B}_E} \\ &= (f(u))_{\mathcal{B}_E} \\ \Leftrightarrow P^{-1}AP(u)_{\mathcal{B}} &= P^{-1}(f(u))_{\mathcal{B}_E} \\ &= (f(u))_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

ce qui confirme que $M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$.

Exercice 11.

Soit f un endomorphisme de E , espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 4, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_4)$ une base de E .

On suppose que pour tout $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \in E$, on a :

$$f(x) = x_1 e_1 + (x_2 + x_3) e_2 + (x_3 + x_4) e_3 + x_4 e_4.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base \mathcal{E} .
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Montrer que $A - I_4$ est nilpotente. Expliciter la relation entre I_4 , A , A^2 et A^n .

4. Soit $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_4)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$e'_2 = e_2 - e_3 + e_4$$

$$e'_3 = e_3$$

$$e'_4 = e_4$$

Montrer que \mathcal{E}' est une base de E .

5. Déterminer A' matrice de f dans la base \mathcal{E}' .

Correction de l'exercice 11.

1. Matrice de f dans la base \mathcal{E} .

Pour $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$, on a $f(x) = x_1 e_1 + (x_2 + x_3) e_2 + (x_3 + x_4) e_3 + x_4 e_4$.

On calcule l'image des vecteurs de la base \mathcal{E} :

$$f(e_1) = e_1$$

$$f(e_2) = e_2$$

$$f(e_3) = e_2 + e_3$$

$$f(e_4) = e_3 + e_4$$

La matrice de f dans la base \mathcal{E} est donc :

$$A = M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Noyau et image de f .

Soit $u \in \ker f$. On a $f(u) = 0$, soit :

$$x_1 e_1 + (x_2 + x_3) e_2 + (x_3 + x_4) e_3 + x_4 e_4 = 0$$

Comme (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \implies x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 0$$

Donc $\ker f = \{0\}$, et f est **injective**.

f est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, donc f est aussi **surjective** (bijectif). Par le théorème du rang :

$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E = 4 \implies 0 + \dim(\operatorname{Im} f) = 4 \implies \operatorname{Im} f = E$$

3. $A - I_4$ est nilpotente. Relation entre I_4, A, A^2 et A^n .

On calcule :

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(A - I_4)^3 = 0$: $A - I_4$ est bien **nilpotente** (d'indice 3).

En développant $(A - I_4)^3 = 0$ par la formule du binôme :

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I_4 = 0 \implies A^3 = 3A^2 - 3A + I_4$$

On en déduit par récurrence que tout A^n pour $n \geq 2$ s'exprime dans $\text{Vect}(I_4, A, A^2)$. En particulier :

$$A^4 = 3A^3 - 3A^2 + A = 6A^2 - 8A + 3I_4$$

$$A^5 = 10A^2 - 15A + 6I_4$$

Par récurrence, on montre que :

$$A^n = \frac{n(n-1)}{2} A^2 - n(n-2) A + \frac{(n-1)(n-2)}{2} I_4$$

4. \mathcal{E}' est une base de E .

Les vecteurs de \mathcal{E}' dans la base \mathcal{E} sont :

$$e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_2 - e_3 + e_4, \quad e'_3 = e_3, \quad e'_4 = e_4$$

La matrice de passage $P = M_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On réduit la matrice $(P | I_4)$ par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On a réduit P à I_4 , donc la matrice de droite est P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, donc \mathcal{E}' est une famille libre et, étant de cardinal $4 = \dim E$, c'est une **base de E** .

On trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Matrice de f dans la base \mathcal{E}' .

On utilise la formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$:

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relation fondamentale est $P(u)_{\mathcal{E}'} = (u)_{\mathcal{E}}$, $AP(u)_{\mathcal{E}'} = (f(u))_{\mathcal{E}}$ et $P^{-1}AP(u)_{\mathcal{E}'} = (f(u))_{\mathcal{E}'}$, ce qui confirme $M_{\mathcal{E}'}(f) = P^{-1}AP$.

Exercice 12.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$ et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le noyau et l'image de u (on précisera une base de $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$).

Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?

- On complète une base de $\text{Ker } u$ en une base \mathcal{B}' de E .

Écrire la matrice M' de u dans cette base \mathcal{B}' .

Correction de l'exercice 12.

1. Noyau et image de u .

L'endomorphisme u est défini par M : pour $v = (x, y, z, t)$,

$$Mv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z+t \\ 2x+y+t \\ 3x+y+z+2t \\ 4x+y+2z+3t \end{pmatrix},$$

donc :

$$u(x, y, z, t) = (x + z + t, 2x + y + t, 3x + y + z + 2t, 4x + y + 2z + 3t)$$

Noyau : $(x, y, z, t) \in \text{Ker } u$ si et seulement si $u(x, y, z, t) = 0$ qui donne le système :

$$\begin{cases} x + z + t = 0 & (L1) \\ 2x + y + t = 0 & (L2) \\ 3x + y + z + 2t = 0 \\ 4x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

$(L2) \leftarrow (L2) - 2 \times (L1)$ donne $y - 2z - t = 0$. On a donc le système

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \\ 3x + y + z + 2t = 0 \\ 4x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \\ 3x + 3z + 3t = 0 \\ 4x + 4z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ x + z + t = 0 \end{cases}$$

On a donc le système réduit :

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z - t \\ y = 2z + t \end{cases}$$

En fixant z et t libres :

$$(x, y, z, t) \in \text{Ker } u \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z - t \\ 2z + t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\text{ker } u = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \implies \dim(\text{ker } u) = 2$$

Par le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{ker } u) \\ \iff 4 &= \dim(\text{Im } u) + 2 \\ \iff \dim(\text{Im } u) &= 4 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Image : Les images des vecteurs de la base canonique sont les colonnes de M :

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $u(e_2) + u(e_3) = u(e_4)$ et $2u(e_2) + u(e_3) = u(e_4)$.

La famille $(u(e_2), u(e_3))$ est libre (vecteurs non colinéaires) de $\text{Im } u$ et comme $\dim(\text{Im } u) = 2$ la famille est génératrice de $\text{Im } u$, donc :

$$\mathcal{B}_{\text{Im } u} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\text{Im } u$.

On peut aussi caractériser $\text{Im } u$ par des équations. On cherche les conditions sur (a, b, c, d) pour que (a, b, c, d) soit combinaison linéaire de $u(e_2)$ et $u(e_3)$. On réduit la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & \\ 1 & 0 & b & \\ 1 & 1 & c & \\ 1 & 2 & d & \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 - L_2 \end{array}]{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & \\ 1 & 0 & b & \\ 0 & 0 & c - a - b & \\ 0 & 0 & d - 2a - b & \end{array} \right)$$

donc :

$$\text{Im } u = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c - a - b = 0 \text{ et } d - 2a - b = 0\}$$

Supplémentarité : Soit $(a, b, c, d) \in \ker u \cap \text{Im } u$. On a :

$$(a, b, c, d) \in \ker u \iff a + c + d = 0 \text{ et } b = 2c + d$$

$$(a, b, c, d) \in \text{Im } u \iff c = a + b \text{ et } d = 2a + b$$

En substituant : $b + d = 2a + 2c + b + d$ donne $0 = 2a + 2c$, soit $a = -c$. Puis $d = 0$ et $b = 2c = -2a$. On peut prendre $a = -3, b = 6, c = 3, d = 0$, ce qui donne un vecteur non nul dans $\ker u \cap \text{Im } u$.

Donc $\ker u \cap \text{Im } u \neq \{0\}$ et $\ker u$ et $\text{Im } u$ **ne sont pas supplémentaires**.

2. Base \mathcal{B}' et matrice M' de u dans \mathcal{B}' .

On complète la base de $\ker u$ par des vecteurs canoniques pour former une base de E :

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1} par la méthode du pivot en réduisant $(P \mid I_4)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite $M' = P^{-1}MP$:

$$P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ -8 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$M' = (P^{-1}M)P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ -8 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes sont nulles, ce qui traduit le fait que les deux premiers vecteurs de \mathcal{B}' appartiennent à $\ker u$.

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

On appelle **projection sur F parallèlement à G** l'application p de E dans E définie par :

$$p(x_F + x_G) = x_F \quad (*)$$

où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et D_u la droite vectorielle engendrée par $u = e_1 + e_2 + e_3$.

1. Expliquer pourquoi p est définie par la relation (*) ci-dessus.
2. Démontrer que p est une application linéaire.
3. Soit H le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2 . Montrer que $E = H \oplus D_u$.

4. Soit p la projection sur H parallèlement à D_u . Donner la matrice de p dans la base \mathcal{B} .

Correction de l'exercice 13.

1. p est bien définie par la relation (*).

Comme $E = F \oplus G$, tout élément $x \in E$ s'écrit de manière **unique** comme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

La composante x_F étant unique, l'application $p(x) = p(x_F + x_G) = x_F$ est parfaitement définie.

2. p est une application linéaire.

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On écrit $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$. Alors :

$$\begin{aligned} p(x + \lambda y) &= p((x_F + x_G) + \lambda(y_F + y_G)) \\ &= p(x_F + x_G + \lambda y_F + \lambda y_G) \\ &= p\left(\underbrace{(x_F + \lambda y_F)}_{\in F} + \underbrace{(x_G + \lambda y_G)}_{\in G}\right) \\ &= x_F + \lambda y_F \\ &= p(x) + \lambda p(y) \end{aligned}$$

Donc p est bien une application linéaire.

3. $E = H \oplus D_u$.

$E = H + D_u$: Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in E$. On écrit :

$$\vec{u} = xe_1 + ye_2 + ze_3 = \underbrace{(x-z)e_1 + (y-z)e_2}_{\in H} + \underbrace{z(e_1 + e_2 + e_3)}_{\in D_u}$$

Donc $\vec{u} \in H + D_u$, et comme $H \subset E$ et $D_u \subset E$ sont évidents, on a $H + D_u = E$.

$H \cap D_u = \{0\}$: Soit $u_1 = (x, y, 0) \in H$ et $u_2 = \beta(e_1 + e_2 + e_3) \in D_u$ tels que $u_1 + u_2 = 0$. Alors :

$$(x + \beta)e_1 + (y + \beta)e_2 + \beta e_3 = 0$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base, on obtient $\beta = 0$, puis $x = y = 0$. Donc $H \cap D_u = \{0\}$.

Ainsi $E = H \oplus D_u$.

4. Matrice de p dans la base \mathcal{B} .

Pour $\vec{u} = (x, y, z) \in E$, la décomposition $\vec{u} = u_H + u_{D_u}$ donne :

$$p(\vec{u}) = u_H = (x-z)e_1 + (y-z)e_2 = \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule sur les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$p(e_1) = e_1 \quad (\text{car } e_1 \in H)$$

$$p(e_2) = e_2 \quad (\text{car } e_2 \in H)$$

$$p(e_3) = ?$$

Pour $p(e_3)$, on cherche $x, y \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$e_3 = \underbrace{(xe_1 + ye_2)}_{\in H} + \underbrace{\beta(e_1 + e_2 + e_3)}_{\in D_u} = (x + \beta)e_1 + (y + \beta)e_2 + \beta e_3$$

Par unicité de la décomposition, $\beta = 1$, $x + 1 = 0$, $y + 1 = 0$, donc $x = y = -1$. Ainsi :

$$e_3 = (-e_1 - e_2) + (e_1 + e_2 + e_3) \implies p(e_3) = -e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de p dans la base \mathcal{B} est donc :

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les opérations de matrices suivantes :

$$A + C \quad -2A \quad AC \quad CA \quad A^2 \quad B^2 \quad A^t \quad B^t$$

Correction de l'exercice 14.

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$-2A = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 0 \times 3 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ (-2) \times (-1) + 5 \times 3 & (-2) \times 0 + 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & 5 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \times 1 + 0 \times (-2) & (-1) \times 0 + 0 \times 5 \\ 3 \times 1 + 1 \times (-2) & 3 \times 0 + 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On remarque que $AC \neq CA$: le produit matriciel n'est pas commutatif en général.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 + (-10) & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 25 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 6 + 0 & -3 - 3 + 0 & 0 + 3 + 0 \\ -2 - 2 + 0 & 6 + 1 + 0 & 0 - 1 + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuer tous les produits possibles de deux matrices prises parmi les matrices précédentes.

Correction de l'exercice 15.

Produit A^2 : $A (1 \times 3)$ par $A (1 \times 3)$: $3 \neq 1$, donc le produit est impossible.

Produit AB : $A (1 \times 3)$ par $B (2 \times 1)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit AC : $A (1 \times 3)$ par $C (3 \times 2)$ donne une matrice de taille 1×2 :

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times (-1) + 1 \times 3 + 3 \times (-4) & 3 \times 2 + 1 \times 0 + 3 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit AD : $A (1 \times 3)$ par $D (2 \times 2)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit AE : $A (1 \times 3)$ par $E (3 \times 3)$ donne une matrice de taille 1×3 :

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 1 \times 0 + 3 \times (-1) & 3 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 0 & 3 \times 4 + 1 \times 0 + 3 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit AF : $A (1 \times 3)$ par $F (2 \times 3)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit BA : $B (2 \times 1)$ par $A (1 \times 3)$ donne une matrice de taille 2×3 :

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \times 3 & -1 \times 1 & -1 \times 3 \\ 2 \times 3 & 2 \times 1 & 2 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit B^2 : $B (2 \times 1)$ par $B (2 \times 1)$: $1 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit BC : $B (2 \times 1)$ par $C (3 \times 2)$: $1 \neq 3$, donc le produit est impossible.

Produit BD : $B (2 \times 1)$ par $D (2 \times 2)$: $1 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit BE : $B (2 \times 1)$ par $E (3 \times 3) : 1 \neq 3$, donc le produit est impossible.

Produit BF : $B (2 \times 1)$ par $F (2 \times 3) : 1 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit CA : $C (3 \times 2)$ par $A (1 \times 3) : 2 \neq 1$, donc le produit est impossible.

Produit CB : $C (3 \times 2)$ par $B (2 \times 1)$ donne une matrice de taille 3×1 :

$$\begin{aligned} CB &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \times (-1) + 2 \times 2 \\ 3 \times (-1) + 0 \times 2 \\ (-4) \times (-1) + 1 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit C^2 : $C (3 \times 2)$ par $C (3 \times 2) : 2 \neq 3$, donc le produit est impossible.

Produit CD : $C (3 \times 2)$ par $D (2 \times 2)$ donne une matrice de taille 3×2 :

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \times 3 + 2 \times (-2) & (-1) \times 1 + 2 \times (-3) \\ 3 \times 3 + 0 \times (-2) & 3 \times 1 + 0 \times (-3) \\ (-4) \times 3 + 1 \times (-2) & (-4) \times 1 + 1 \times (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 9 & 3 \\ -14 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit CE : $C (3 \times 2)$ par $E (3 \times 3) : 2 \neq 3$, donc le produit est impossible.

Produit CF : $C (3 \times 2)$ par $F (2 \times 3)$ donne une matrice de taille 3×3 :

$$\begin{aligned} CF &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \times 0 + 2 \times (-1) & (-1) \times 1 + 2 \times 0 & (-1) \times (-2) + 2 \times 1 \\ 3 \times 0 + 0 \times (-1) & 3 \times 1 + 0 \times 0 & 3 \times (-2) + 0 \times 1 \\ (-4) \times 0 + 1 \times (-1) & (-4) \times 1 + 1 \times 0 & (-4) \times (-2) + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit DA : $D (2 \times 2)$ par $A (1 \times 3) : 2 \neq 1$, donc le produit est impossible.

Produit DB : $D (2 \times 2)$ par $B (2 \times 1)$ donne une matrice de taille 2×1 :

$$\begin{aligned} DB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times (-1) + 1 \times 2 \\ (-2) \times (-1) + (-3) \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit DC : $D (2 \times 2)$ par $C (3 \times 2)$: $2 \neq 3$, donc le produit est impossible.

Produit D^2 : $D (2 \times 2)$ par $D (2 \times 2)$ donne une matrice de taille 2×2 :

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times (-2) & 3 \times 1 + 1 \times (-3) \\ (-2) \times 3 + (-3) \times (-2) & (-2) \times 1 + (-3) \times (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 7I_2 \end{aligned}$$

Produit DE : $D (2 \times 2)$ par $E (3 \times 3)$: $2 \neq 3$, donc le produit est impossible.

Produit DF : $D (2 \times 2)$ par $F (2 \times 3)$ donne une matrice de taille 2×3 :

$$\begin{aligned} DF &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 0 + 1 \times (-1) & 3 \times 1 + 1 \times 0 & 3 \times (-2) + 1 \times 1 \\ (-2) \times 0 + (-3) \times (-1) & (-2) \times 1 + (-3) \times 0 & (-2) \times (-2) + (-3) \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit EA : $E (3 \times 3)$ par $A (1 \times 3)$: $3 \neq 1$, donc le produit est impossible.

Produit EB : $E (3 \times 3)$ par $B (2 \times 1)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit EC : $E (3 \times 3)$ par $C (3 \times 2)$ donne une matrice de taille 3×2 :

$$\begin{aligned} EC &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 0 \times 3 + 4 \times (-4) & 1 \times 2 + 0 \times 0 + 4 \times 1 \\ 0 \times (-1) + 1 \times 3 + 0 \times (-4) & 0 \times 2 + 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ (-1) \times (-1) + 0 \times 3 + 1 \times (-4) & (-1) \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -17 & 6 \\ 3 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit ED : $E (3 \times 3)$ par $D (2 \times 2)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit E^2 : $E (3 \times 3)$ par $E (3 \times 3)$ donne une matrice de taille 3×3 :

$$\begin{aligned} E^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 + 4 \times (-1) & 1 \times 0 + 0 \times 1 + 4 \times 0 & 1 \times 4 + 0 \times 0 + 4 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 0 \times 4 + 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times (-1) & (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & (-1) \times 4 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit EF : $E (3 \times 3)$ par $F (2 \times 3)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit FA : $F (2 \times 3)$ par $A (1 \times 3)$: $3 \neq 1$, donc le produit est impossible.

Produit FB : $F (2 \times 3)$ par $B (2 \times 1)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit FC : $F (2 \times 3)$ par $C (3 \times 2)$ donne une matrice de taille 2×2 :

$$\begin{aligned} FC &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times (-1) + 1 \times 3 + (-2) \times (-4) & 0 \times 2 + 1 \times 0 + (-2) \times 1 \\ (-1) \times (-1) + 0 \times 3 + 1 \times (-4) & (-1) \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit FD : $F (2 \times 3)$ par $D (2 \times 2)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Produit FE : $F (2 \times 3)$ par $E (3 \times 3)$ donne une matrice de taille 2×3 :

$$\begin{aligned} FE &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 + (-2) \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 1 + (-2) \times 0 & 0 \times 4 + 1 \times 0 + (-2) \times 1 \\ (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times (-1) & (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & (-1) \times 4 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Produit F^2 : $F (2 \times 3)$ par $F (2 \times 3)$: $3 \neq 2$, donc le produit est impossible.

Exercice 16.

On considère l'ensemble :

$$G = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid M = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C} \right\}$$

1. Montrer que G est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , mais pas sur \mathbb{C} .
2. Déterminer une base de l'espace et donner la dimension.
3. Montrer que $A, B \in G \Rightarrow AB \in G$.

Montrer que l'ensemble $G_0 = G \setminus \{0_2\}$ est un groupe abélien par rapport à la multiplication matricielle.

Correction de l'exercice 16.

1. G est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , mais pas sur \mathbb{C} .

Sous-espace vectoriel sur \mathbb{R} : La matrice nulle vérifie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ car $\bar{0} = 0$, donc $G \neq \emptyset$.

Soient $M_1 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in G$, $M_2 = \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$M_1 + \lambda M_2 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda z_2 & 0 \\ 0 & \lambda \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + \lambda z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + \lambda z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_1 + \lambda z_2} \end{pmatrix}$$

car $\lambda \in \mathbb{R}$ implique $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$. Donc $M_1 + \lambda M_2 \in G$, et G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ sur \mathbb{R} .

G n'est pas un espace vectoriel sur \mathbb{C} : Soit $M = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \in G$ avec $z \neq 0$, et $i \in \mathbb{C}$. Alors :

$$iM = \begin{pmatrix} iz & 0 \\ 0 & i\bar{z} \end{pmatrix}$$

Pour que $iM \in G$, il faudrait que $\overline{iz} = i\bar{z}$. Or, pour $z = a + ib$:

$$\overline{iz} = \overline{i(a + ib)} = \overline{-b + ia} = -b - ia \quad \text{et} \quad i\bar{z} = i(a - ib) = ia + b = b + ia$$

Donc $\overline{iz} \neq i\bar{z}$ en général, et G n'est **pas** un sous-espace vectoriel sur \mathbb{C} .

2. Base et dimension de G .

Tout élément de G s'écrit, avec $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de G . Elle est libre car si $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $a + ib = 0$ et $a - ib = 0$, ce qui donne $a = b = 0$.

Donc \mathcal{B} est une base de G et $\dim_{\mathbb{R}}(G) = 2$.

3. Stabilité par multiplication et structure de groupe abélien.

Soient $M_1 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in G$ et $M_2 = \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \in G$. Alors :

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_1 z_2} \end{pmatrix}$$

car $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$. Donc $M_1 M_2 \in G$, et si $A, B \in G$ alors $AB \in G$.

$G_0 = G \setminus \{0_2\}$ est un groupe abélien pour \times :

- ⊛ **Stabilité :** montrée ci-dessus (le produit de deux éléments non nuls est non nul car $z_1 z_2 \neq 0$ si $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$).
- ⊛ **Associativité :** héritée de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$.
- ⊛ **Élément neutre :** $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_0$ est l'élément neutre.

⊙ **Inverse** : Pour tout $z_1 \neq 0$, il existe $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 \times \frac{1}{z_1} = 1$. Donc :

$$\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{z}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{z}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{z_1}\right) \end{pmatrix} \in G_0$. Tout élément non nul de G est donc inversible dans G .

⊙ **Commutativité** : $M_1 M_2 = \begin{pmatrix} z_1 z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \bar{z}_1 \end{pmatrix} = M_2 M_1$ car \mathbb{C} est commutatif.

Donc (G_0, \times) est un groupe abélien.

Exercice 17.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en utilisant le développement par rapport à une ligne/colonne.
2. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_1$ et $\det A_2$.
3. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_3$.
4. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_4$.
5. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_5$.

Correction de l'exercice 17.

1. Calcul des déterminants par développement.

Calcul de $\det A_1$: On effectue $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$ puis on développe par rapport à la colonne 1 :

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(0+5) = 10$$

$$\det A_1 = 10$$

Calcul de $\det A_2$: On développe par rapport à la colonne 1, en notant que $L_3 = L_4$, puis par rapport à la ligne 1 :

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \times 5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -5 \times 0 = 0$$

$$\det A_2 = 0$$

On pouvait aussi remarquer directement que $L_3 = L_4$, donc le déterminant est nul.

Calcul de $\det A_3$: On effectue $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ puis on développe par rapport à la colonne 2 :

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5(0-1) = 5$$

$$\det A_3 = 5$$

Calcul de $\det A_4$: On effectue $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ puis on développe par rapport à la colonne 2 :

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -5 \times 2 = -10$$

$$\det A_4 = -10$$

Calcul de $\det A_5$: On développe par rapport à la colonne 1 :

$$\det A_5 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -5(2-4) = 10$$

$$\det A_5 = 10$$

2. Déterminer $\det A$ à partir de $\det A_1$ et $\det A_2$.

On note v_1, v_2, v_3, v_4 les colonnes de A , et on remarque que la première colonne de A est la somme des premières colonnes de A_1 et A_2 : $v_1 = v'_1 + v''_1$. Par multilinéarité du déterminant :

$$\det A = \det(v'_1 + v''_1, v_2, v_3, v_4) = \det(v'_1, v_2, v_3, v_4) + \det(v''_1, v_2, v_3, v_4) = \det A_1 + \det A_2 = 10 + 0 = 10$$

On peut aussi retrouver $\det A$ par d'autres relations :

La matrice A s'obtient à partir de A_3 en multipliant la dernière colonne par 2, donc par linéarité :

$$\det A = 2 \det A_3 = 2 \times 5 = 10$$

La matrice A s'obtient à partir de A_4 par échange des lignes 2 et 3 (transposition), donc :

$$\det A = -\det A_4 = -(-10) = 10$$

Enfin, ${}^t A = A_5$, donc $\det A = \det({}^t A) = \det A_5 = 10$.

Exercice 18.

Calculer chacun des déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha + z_1 \bar{z}_1 & z_1 \bar{z}_2 & \cdots & z_1 \bar{z}_n \\ z_2 \bar{z}_1 & \alpha + z_2 \bar{z}_2 & \cdots & z_2 \bar{z}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n \bar{z}_1 & z_n \bar{z}_2 & \cdots & \alpha + z_n \bar{z}_n \end{vmatrix}$$

où $\alpha = z_1 \bar{z}_1 + \cdots + z_n \bar{z}_n$.

Correction de l'exercice 18.

Déterminant 4×4 tridiagonal :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 - C_2 - C_4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien, en développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_3 + C_2 - C_4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Déterminant 5 × 5 tridiagonal : On développe par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

Déterminant de Vandermonde 3 × 3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

On effectue $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Déterminant 3 × 3 : On factorise par 6 sur C_1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6(-2+1) \times (-3) = -18$$

Déterminant 4 × 4 circulant : On effectue $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4}}{=} \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 - C_4}}{=} 8 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \times (-1) \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -8 \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \times (-1) \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8(14+6) = 160$$

Déterminant avec paramètre x : On effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = (4+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$= (4+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2(4+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = x^2(4+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^3(4+x)$$

Déterminant de Vandermonde 3×3 avec variables : On effectue $C_2 \leftarrow C_2 - xC_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - x^2C_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y-x & y^2-x^2 \\ 1 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

Déterminant de Vandermonde 4×4 avec variables : On effectue $C_2 \leftarrow C_2 - xC_1, C_3 \leftarrow C_3 - x^2C_1, C_4 \leftarrow C_4 - x^3C_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & y-x & y^2-x^2 & y^3-x^3 \\ 1 & z-x & z^2-x^2 & z^3-x^3 \\ 1 & t-x & t^2-x^2 & t^3-x^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} 1 & y+x & y^2+xy+x^2 \\ 1 & z+x & z^2+xz+x^2 \\ 1 & t+x & t^2+xt+x^2 \end{vmatrix}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$= (y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} z-y & z^2-y^2+x(z-y) \\ t-y & t^2-y^2+x(t-y) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y) \begin{vmatrix} 1 & x+y+z \\ 1 & x+y+t \end{vmatrix} \\ = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

Exercice 19.

Soient M et U les matrices carrées de taille n données par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq b, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que quel que soit $x \in \mathbb{R}$ on ait $\det(M + xU) = \alpha x + \beta$.
2. Calculer $\det(M - aU)$ et $\det(M - bU)$. En déduire $\det(M)$.

Correction de l'exercice 19.

1. Montrons qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\det(M + xU) = \alpha x + \beta$.

On effectue les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2, C_2 \leftarrow C_2 - C_3, \dots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$:

$$\det(M + xU) = \begin{vmatrix} 1+x & a+x & \cdots & \cdots & a+x \\ b+x & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1+x & a+x \\ b+x & \cdots & \cdots & b+x & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 0 & \cdots & 0 & a+x \\ b-1 & 1-a & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b-1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-a & a+x \\ 0 & \cdots & 0 & b-1 & 1+x \end{vmatrix}$$

Le déterminant obtenu est un polynôme en x de degré au plus 1 (car seule la dernière colonne dépend de x , et le développement par rapport à cette colonne ne fait apparaître qu'un terme de degré 1). Il s'exprime donc sous la

forme $\alpha x + \beta$.

2. Calcul de $\det(M - aU)$ et $\det(M - bU)$.

Pour $x = -a$: la matrice $M + xU = M - aU$ a pour entrées diagonales $1 - a$ et entrées hors diagonale nulles (car $a + x = 0$ et $b + x = b - a$). En effectuant les mêmes opérations sur les colonnes :

$$\det(M - aU) = \begin{vmatrix} 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ b-1 & 1-a & & \vdots \\ 0 & b-1 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & b-1 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^{n-1} \begin{vmatrix} 1-a & 0 \\ b-1 & 1-a \end{vmatrix} \cdots = (1-a)^n$$

donc :

$$\det(M - aU) = (1-a)^n = -\alpha a + \beta$$

Pour $x = -b$: de même :

$$\det(M - bU) = (1-b)^n = -\alpha b + \beta$$

En soustrayant les deux relations :

$$(1-a)^n - (1-b)^n = \alpha(b-a)$$

Comme $a \neq b$:

$$\alpha = \frac{(1-a)^n - (1-b)^n}{b-a} = (1-a)^{n-1} + (1-a)^{n-2}(1-b) + \cdots + (1-a)^{n-k-1}(1-b)^k + \cdots + (1-b)^{n-1}$$

Pour β , on repart de $(1-a)^n = -\alpha a + \beta$:

$$\begin{aligned} \beta &= (1-a)^n + \alpha a = (1-a)^n + \frac{(1-a)^n - (1-b)^n}{b-a} \cdot a \\ &= \frac{(1-a)^n(b-a) + a(1-a)^n - a(1-b)^n}{b-a} = (1-a)^n + \frac{(1-b)^n - (1-a)^n}{a-b} \cdot a \end{aligned}$$

On peut aussi écrire, en additionnant les deux équations pondérées :

$$b(1-a)^n - a(1-b)^n = \beta(b-a) \implies \beta = \frac{b(1-a)^n - a(1-b)^n}{b-a}$$

Déduction de $\det M$: Pour $x = 0$:

$$\det M = \det(M + 0 \cdot U) = \alpha \times 0 + \beta = \beta$$

donc :

$$\det M = \frac{b(1-a)^n - a(1-b)^n}{b-a} = (1-a)^n + \frac{(1-b)^n - (1-a)^n}{a-b}$$

Fiche 1bis. Changement de base, rang et applications.

— I : Changement de base —

Exercice 1.

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2 .
2. Soit I la matrice identité. En déduire que : $M^2 - M - I = 0$.
3. Calculer l'inverse de M . (On utilisera à profit la relation précédente.)
4. Résoudre l'équation du second degré :

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad (1)$$

5. Soient λ_1 et λ_2 les solutions de (1). Déterminer les vecteurs u et v tels que

$$Mu = \lambda_1 u \quad \text{et} \quad Mv = \lambda_2 v$$

6. Montrer que (u, v) est une base et donner la matrice de passage de la base (u, v) vers la base canonique.
7. En déduire la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v) .
8. Écrire la matrice M' de l'endomorphisme associé à M dans la base (u, v) .
9. Exprimer M' en fonction de M et P .
10. En déduire M^n .
11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad U_{n+1} = MU_n, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer U_n en fonction de n .

12. Vérifier que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite de Fibonacci donnée par :

$$\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \quad x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

Exercice 2.

Soient $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ deux bases de \mathbb{R}^2 . On suppose que :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. En échelonnant, donner la matrice de passage de la base \mathcal{C} à \mathcal{B} .
2. Puis celle de \mathcal{B} à \mathcal{C} .

— II : Rang et dimension —

Exercice 3.

1. Soit A une matrice 5×6 . On suppose que $\dim(\text{Ker}(A)) = 3$. Quel est le rang de A ?

2. Soit A une matrice 7×3 . Quel est le rang maximum de A ?

Quelle est la dimension minimum de $\text{Ker}(A)$?

Mêmes questions avec A une matrice 3×7 .

3. Soit A une matrice carrée d'ordre n .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de A pour que la transposée de A soit inversible.

4. Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f^3 = f \circ f \circ f = \text{Id}_3$. Déterminer le noyau de f .

Exercice 4.

1. En échelonnant la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

montrer qu'elle est équivalente à la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

2. En déduire $\text{rg}(A)$, $\dim(\text{Ker}(A))$, $\text{rg}(B)$, $\dim(\text{Ker}(B))$.

Exercice 5.

On considère l'espace vectoriel E des polynômes sur \mathbb{R} .

Montrer que la famille $(1, X, X^2, X^3, \dots)$ est une famille libre. En déduire la dimension de E .

Fiche 1 bis. Changement de base, rang et applications. — Corrigé.

Fiche 2. Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation, trigonalisation.

Exercice 1.

On considère les endomorphismes de \mathbb{R}^n dont les matrices associées dans la base canonique \mathcal{B}_n sont :

$$M_{\mathcal{B}_2}(T_a) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_2}(T_b) = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_3}(T_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{B}_3}(T_d) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_3}(T_e) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_3}(T_f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{B}_4}(T_g) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque endomorphisme donné ci-dessus :

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres.
2. L'endomorphisme est-il diagonalisable? trigonalisable? Si oui, diagonaliser (ou trigonaliser).
3. Déterminer le polynôme minimal.

Exercice 2.

Reprendre l'exercice précédent en prenant \mathbb{C} pour corps de base.

Exercice 3.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de réels définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2(u_n - v_n) \end{cases}$$

Calculer explicitement u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B}_4 est :

$$M_{\mathcal{B}_4}(f) = M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, f est-il diagonalisable?

Exercice 5.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B}_4 est :

$$M_{\mathcal{B}_4}(f) = M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f et trouver une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^4 où f trigonalise sous la forme :

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme f_a (resp. f_b, f_c) de \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^4) dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B}_2 (resp. \mathcal{B}_4) est :

$$M_{\mathcal{B}_2}(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_4}(f_b) = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_4}(f_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B}_3 est :

$$M_{\mathcal{B}_3}(f) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme minimal de f .
2. L'endomorphisme f est-il trigonalisable? Diagonalisable?
3. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que l'application $f : P \mapsto (X - a)P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 9.

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A_{2n+1} = \begin{pmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a+b & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{pmatrix}, \quad A_{2n} = \begin{pmatrix} a & & 0 & 0 & b \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a & b & 0 \\ 0 & & b & a & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ b & & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & a & b \\ b & a & \cdots & b & a \\ \vdots & & & & \vdots \\ a & b & \cdots & a & b \\ b & a & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 10.

Quelles sont les valeurs propres d'un projecteur?

Exercice 11.

E est un espace vectoriel réel de dimension finie et f est un endomorphisme de E . a et b sont deux réels distincts.

On suppose que :

$$(f - a \text{Id}_E) \circ (f - b \text{Id}_E) = 0$$

1. Montrer qu'il existe deux réels non nuls λ et μ tels que $\lambda(f - a \text{Id})$ et $\mu(f - b \text{Id})$ soient des projecteurs.
2. Comparer $\text{Im}(f - b \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - a \text{Id}_E)$.
3. Calculer f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Fiche 2. Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation, trigonalisation. — Corrigé.

Fiche 3. Endomorphismes.

Dans la suite on considérera l'espace vectoriel réel

$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$$

où pour chaque $j = 1, \dots, 4$, e_j est une fonction

$$\begin{aligned} e_j: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e_j(x) \end{aligned}$$

avec $e_1 = \sin x$, $e_2 = \cos x$, $e_3 = \sin(2x)$, $e_4 = \cos(2x)$.

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E .

2. On considère les fonctions :

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x)(4 - 5\cos x), \\ v_2(x) &= \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} + \sin(2x), \\ v_3(x) &= \cos(x)(-\pi + 2\cos x) - 1. \end{aligned}$$

Écrire les vecteurs colonnes $(v_1)_{\mathcal{B}}$, $(v_2)_{\mathcal{B}}$, $(v_3)_{\mathcal{B}}$.

Suggestion : utiliser les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (\sin a)^2 + (\cos a)^2 &= 1 \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{aligned}$$

3. On considère les vecteurs colonnes :

$$(w_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (w_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donner les vecteurs correspondants w_1, w_2 dans l'espace E .

Exercice 2.

On introduit l'application :

$$\begin{aligned} T: E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto (T(v))(x) = v(x) + v''(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .

2. Déterminer $T(v_j)$ pour $j = 1, 2, 3$. Ensuite donner les vecteurs colonnes correspondants $(T(v_j))_{\mathcal{B}}$.

3. Donner la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$.

4. Retrouver $(T(v_j))_{\mathcal{B}}$ en utilisant la relation :

$$(T(v_j))_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}(T) (v_j)_{\mathcal{B}}$$

5. À partir de cette matrice, déterminer $\ker T$ et $\text{Im } T$.

Donner une base pour ces deux sous-espaces. Sont-ils supplémentaires?

Exercice 3.

Répondre aux questions de l'exercice 2 pour :

$$\begin{aligned} U: E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto (U(v))(x) = v(0) \cos(x) \end{aligned}$$

Exercice 4.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} W_1: E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto W_1(v)(x) = (U \circ T)(v)(x) = U(T(v))(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que W_1 est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $W_1(v_j)$ pour $j = 1, 2, 3$. Ensuite donner les vecteurs colonnes correspondants $(W_1(v_j))_{\mathcal{B}}$.
3. Donner la matrice $M_{\mathcal{B}}(W_1)$.
4. Retrouver la matrice $M_{\mathcal{B}}(W_1)$ en utilisant la formule :

$$M_{\mathcal{B}}(U \circ T) = M_{\mathcal{B}}(U) M_{\mathcal{B}}(T)$$

5. À partir de cette matrice, déterminer $\ker W_1$ et $\text{Im } W_1$.

Donner une base pour ces deux sous-espaces. Sont-ils supplémentaires?

Exercice 5.

Répondre aux questions de l'exercice 4 pour :

$$\begin{aligned} W_2: E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto W_2(v)(x) = (T \circ U)(v)(x) = T(U(v))(x) \end{aligned}$$

Exercice 6.

On considère la famille :

$$\mathcal{B}' = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4)$$

avec

$$\hat{e}_1(x) = \sin x + \sin(2x) \quad \hat{e}_2(x) = \cos x - \cos(2x) \quad \hat{e}_3(x) = \sin(2x) \quad \hat{e}_4(x) = \cos(2x)$$

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E .
2. Répéter les exercices 1 à 5 en remplaçant la base \mathcal{B} par la base \mathcal{B}' .

Exercice 7.

1. Déterminer les matrices de passage P, P^{-1} définies par les relations :

$$(v)_{\mathcal{B}'} = P^{-1} (v)_{\mathcal{B}}, \quad (v)_{\mathcal{B}} = P (v)_{\mathcal{B}'}$$

pour tout vecteur $v \in E$.

2. Connaissant $(v_1)_{\mathcal{B}}$, déterminer $(v_1)_{\mathcal{B}'}$. Répéter pour $v_2, T(v_1)$ et $T(v_2)$.
3. Connaissant $M_{\mathcal{B}}(T)$, déterminer $M_{\mathcal{B}'}(T)$ en utilisant la relation :

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(T) P$$

Comparer avec l'exercice 6 pour vérifier que la matrice trouvée est correcte.

4. Répéter pour U, W_1 et W_2 .

Exercice 8.

Répéter les exercices 6 et 7 en remplaçant \mathcal{B}' par :

$$\mathcal{B}'' = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$$

avec

$$\tilde{e}_1(x) = \sin x + \cos(2x)$$

$$\tilde{e}_2(x) = \cos x$$

$$\tilde{e}_3(x) = \sin(2x) - \cos x$$

$$\tilde{e}_4(x) = \cos(2x)$$

Fiche 3. Endomorphismes. — Corrigé.

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E .
2. On considère les fonctions :

$$\begin{aligned}v_1(x) &= \sin(x)(4 - 5 \cos x), \\v_2(x) &= \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} + \sin(2x), \\v_3(x) &= \cos(x)(-\pi + 2 \cos x) - 1.\end{aligned}$$

Écrire les vecteurs colonnes $(v_1)_{\mathcal{B}}, (v_2)_{\mathcal{B}}, (v_3)_{\mathcal{B}}$.

Suggestion : utiliser les relations suivantes :

$$\begin{aligned}(\sin a)^2 + (\cos a)^2 &= 1 \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

3. On considère les vecteurs colonnes :

$$(w_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (w_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donner les vecteurs correspondants w_1, w_2 dans l'espace E .

Correction de l'exercice 1.

1. Par construction, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une famille génératrice de E (car E est l'espace vectoriel engendré par \mathcal{B} par définition). Il suffit donc de vérifier que la famille est libre. On cherche quatre réels $\alpha_j, j = 1, \dots, 4$, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_j e_j(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin(2x) + \alpha_4 \cos(2x) = 0$$

Cette relation doit être vérifiée pour tout x , donc en particulier pour $x = 0, x = \pi, x = \pi/2$ et $x = \pi/4$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_4 = 0$.

La troisième donne alors $\alpha_1 = 0$.

Enfin, la quatrième donne $\alpha_3 = 0$.

La famille est donc libre, et c'est bien une base de E .

2. On développe chaque vecteur en utilisant les formules trigonométriques.

Pour v_1 :

$$v_1(x) = \sin(x) [4 - 5 \cos x] = 4 \sin(x) - 5 \sin(x) \cos(x) = 4 \sin(x) - \frac{5}{2} \sin(2x) = 4 e_1(x) - \frac{5}{2} e_3(x)$$

donc :

$$(v_1)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour v_2 :

$$v_2(x) = \cos(x) + \frac{\sin(x)}{2} + \sin(2x) = \frac{1}{2} e_1(x) + e_2(x) + e_3(x)$$

donc :

$$(v_2)_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour v_3 :

$$v_3(x) = \cos(x) [-\pi + 2 \cos x] - 1 = -\pi \cos(x) + 2 \cos^2(x) - 1$$

Or $2 \cos^2(x) - 1 = \cos(2x)$, donc :

$$v_3(x) = -\pi e_2(x) + e_4(x)$$

donc :

$$(v_3)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. On lit les coordonnées dans la base B :

$$w_1(x) = 0 \cdot e_1(x) + 5 \cdot e_2(x) + (-1) \cdot e_3(x) + 0 \cdot e_4(x) = 5 \cos x - \sin(2x)$$

Exercice 2.

On introduit l'application :

$$\begin{aligned} T: E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto (T(v))(x) = v(x) + v''(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $T(v_j)$ pour $j = 1, 2, 3$. Ensuite donner les vecteurs colonnes correspondants $(T(v_j))_{\mathcal{B}}$.
3. Donner la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$.
4. Retrouver $(T(v_j))_{\mathcal{B}}$ en utilisant la relation :

$$(T(v_j))_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}(T) (v_j)_{\mathcal{B}}$$

5. À partir de cette matrice, déterminer $\ker T$ et $\text{Im } T$.

Donner une base pour ces deux sous-espaces. Sont-ils supplémentaires?

Correction de l'exercice 2.

1. Il faut d'abord montrer que T est une application linéaire. Pour tout $v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(v+w)(x) &= (v+w)(x) + (v+w)''(x) = v(x) + w(x) + v''(x) + w''(x) \\ &= T(v)(x) + T(w)(x) \end{aligned}$$

$$T(\lambda v)(x) = (\lambda v)(x) + (\lambda v)''(x) = \lambda v(x) + \lambda v''(x) = \lambda T(v)(x)$$

Donc T est linéaire. Il reste à vérifier que T envoie E dans E , c'est-à-dire que $T(e_j) \in E$ pour tout j (ce qui sera vérifié à la question suivante). T est bien un endomorphisme de E .

2. On calcule T sur les vecteurs de la base \mathcal{B} :

$$T(e_1)(x) = \sin x + (\sin x)'' = \sin x - \sin x = 0$$

$$T(e_2)(x) = \cos x + (\cos x)'' = \cos x - \cos x = 0$$

$$T(e_3)(x) = \sin(2x) + (\sin(2x))'' = \sin(2x) - 4 \sin(2x) = -3 \sin(2x) = -3 e_3(x)$$

$$T(e_4)(x) = \cos(2x) + (\cos(2x))'' = \cos(2x) - 4 \cos(2x) = -3 \cos(2x) = -3 e_4(x)$$

Puis $T(v_1)$ en utilisant la linéarité :

$$T(v_1)(x) = T\left(4e_1 - \frac{5}{2}e_3\right)(x) = 4T(e_1)(x) - \frac{5}{2}T(e_3)(x) = 0 - \frac{5}{2}(-3)\sin(2x) = \frac{15}{2}e_3(x)$$

donc :

$$[T(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. La matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ est formée des colonnes $[T(e_j)]_{\mathcal{B}}$:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Vérification pour v_1 :

$$M_{\mathcal{B}}(T)(v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15/2 \\ 0 \end{pmatrix} = [T(v_1)]_{\mathcal{B}}$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

5. **Noyau.** On cherche $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$ tel que $T(v) = 0$, soit :

$$M_{\mathcal{B}}(T)(v)_{\mathcal{B}} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\alpha_3 \\ -3\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ et α_1, α_2 sont libres. Ainsi :

$$\ker T = \text{Vect}(e_1, e_2)$$

La famille (e_1, e_2) est libre (elle est extraite de la base \mathcal{B}), donc c'est une base de $\ker T$ et $\dim(\ker T) = 2$.

Image. Par le théorème du rang : $\dim(\text{Im } T) = \dim E - \dim(\ker T) = 4 - 2 = 2$. De plus :

$$\text{Im } T = \text{Vect}(T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)) = \text{Vect}(T(e_3), T(e_4))$$

car $T(e_1) = T(e_2) = 0$. La famille $(T(e_3), T(e_4)) = (-3e_3, -3e_4)$ est libre (deux vecteurs proportionnels à des vecteurs de base distincts), donc c'est une base de $\text{Im } T$.

Supplémentarité. Soit $v \in \ker T \cap \text{Im } T$. Alors $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et $v = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$, d'où :

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 = 0$$

Par liberté de \mathcal{B} , on obtient $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Donc $\ker T \cap \text{Im } T = \{0\}$, et comme $\dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T) = 4 = \dim E$, on conclut :

$$E = \ker T \oplus \text{Im } T$$

Exercice 3.

Répondre aux questions de l'exercice 2 pour :

$$\begin{aligned} U: E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto (U(v))(x) = v(0) \cos(x) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.

On étudie $U : v \mapsto v(0) \cos x$.

1. **Linéarité.** Pour tout $v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$U(v+w)(x) = (v+w)(0) \cos x = (v(0) + w(0)) \cos x = U(v)(x) + U(w)(x)$$

$$U(\lambda v)(x) = (\lambda v)(0) \cos x = \lambda v(0) \cos x = \lambda U(v)(x)$$

Donc U est linéaire. On a $e_1(0) = \sin 0 = 0$, $e_2(0) = \cos 0 = 1$, $e_3(0) = \sin 0 = 0$, $e_4(0) = \cos 0 = 1$, donc $U(e_j) \in \text{Vect}(e_2) \subset E$ pour tout j . U est bien un endomorphisme de E .

2. On calcule U sur les vecteurs de base :

$$U(e_1)(x) = e_1(0) \cos x = 0 \cdot \cos x = 0$$

$$U(e_2)(x) = e_2(0) \cos x = \cos x = e_2(x)$$

$$U(e_3)(x) = e_3(0) \cos x = 0$$

$$U(e_4)(x) = e_4(0) \cos x = \cos x = e_2(x)$$

d'où les matrices colonnes :

$$[U(e_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [U(e_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [U(e_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [U(e_4)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de U dans \mathcal{B} est :

$$M_{\mathcal{B}}(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Vérification : $M_{\mathcal{B}}(U) (v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est cohérent avec $v_1(0) = \sin(0) [4 - 5 \cos 0] = 0$.

5. **Noyau.** $M_{\mathcal{B}}(U) (v)_{\mathcal{B}} = 0$ donne $\alpha_2 + \alpha_4 = 0$, les autres composantes étant nulles automatiquement. Donc :

$$\ker U = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 \mid \alpha_2 + \alpha_4 = 0\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3)$$

C'est un sous-espace de dimension 3.

Image. $\text{Im } U = \text{Vect}(e_2)$, de dimension 1.

$\dim(\ker U) + \dim(\text{Im } U) = 3 + 1 = 4 = \dim E$. Comme $e_2 \notin \ker U$ (car son coefficient sur e_4 est nul), on a $\ker U \cap \text{Im } U = \{0\}$, donc :

$$E = \ker U \oplus \text{Im } U$$

Exercice 4.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} W_1: E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto W_1(v)(x) = (U \circ T)(v)(x) = U(T(v))(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que W_1 est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $W_1(v_j)$ pour $j = 1, 2, 3$. Ensuite donner les vecteurs colonnes correspondants $(W_1(v_j))_{\mathcal{B}}$.
3. Donner la matrice $M_{\mathcal{B}}(W_1)$.
4. Retrouver la matrice $M_{\mathcal{B}}(W_1)$ en utilisant la formule :

$$M_{\mathcal{B}}(U \circ T) = M_{\mathcal{B}}(U) M_{\mathcal{B}}(T)$$

5. À partir de cette matrice, déterminer $\ker W_1$ et $\text{Im } W_1$.

Donner une base pour ces deux sous-espaces. Sont-ils supplémentaires?

Correction de l'exercice 4.

On étudie $W_1 = U \circ T$.

1. Composée de deux endomorphismes de E , W_1 est également un endomorphisme de E .
2. On utilise la linéarité et les résultats précédents. On calcule $W_1(e_j) = U(T(e_j))$:

$$W_1(e_1) = U(0) = 0, \quad W_1(e_2) = U(0) = 0$$

$$W_1(e_3) = U(-3e_3) = -3U(e_3) = 0$$

$$W_1(e_4) = U(-3e_4) = -3U(e_4) = -3e_2$$

3. La matrice est :

$$M_{\mathcal{B}}(W_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Vérification par le produit :

$$M_{\mathcal{B}}(U) M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien $M_{\mathcal{B}}(W_1)$.

5. **Noyau.** $M_{\mathcal{B}}(W_1)(v)_{\mathcal{B}} = 0$ donne $-3\alpha_4 = 0$, donc $\alpha_4 = 0$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ libres. Ainsi :

$$\ker W_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3), \quad \dim(\ker W_1) = 3$$

Image. $\text{Im } W_1 = \text{Vect}(-3e_2) = \text{Vect}(e_2)$, $\dim(\text{Im } W_1) = 1$.

Comme $e_2 \notin \ker W_1$ n'est vrai que si $e_2 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, ce qui est faux ($e_2 \in \ker W_1$). Donc $\ker W_1 \cap \text{Im } W_1 = \text{Vect}(e_2) \neq \{0\}$, les deux sous-espaces **ne sont pas supplémentaires**.

Exercice 5.

Répondre aux questions de l'exercice 4 pour :

$$\begin{aligned} W_2: E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto W_2(v)(x) = (T \circ U)(v)(x) = T(U(v))(x) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5.

On étudie $W_2 = T \circ U$.

Par le même raisonnement que pour W_1 , W_2 est un endomorphisme de E . On calcule $W_2(e_j) = T(U(e_j))$:

$$W_2(e_1) = T(0) = 0$$

$$W_2(e_2) = T(e_2) = 0$$

$$W_2(e_3) = T(0) = 0$$

$$W_2(e_4) = T(e_2) = 0$$

Donc $W_2 = 0$ (l'endomorphisme nul). La matrice est :

$$M_{\mathcal{B}}(W_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On vérifie : } M_{\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{B}}(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\ker W_2 = E$ et $\text{Im } W_2 = \{0\}$. Ils ne sont pas supplémentaires (sauf si $E = \{0\}$, ce qui n'est pas le cas ici).

Exercice 6.

On considère la famille :

$$\mathcal{B}' = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4)$$

avec

$$\hat{e}_1(x) = \sin x + \sin(2x)$$

$$\hat{e}_2(x) = \cos x - \cos(2x)$$

$$\hat{e}_3(x) = \sin(2x)$$

$$\hat{e}_4(x) = \cos(2x)$$

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E .
2. Répéter les exercices 1 à 5 en remplaçant la base \mathcal{B} par la base \mathcal{B}' .

Correction de l'exercice 6.

1. On exprime les vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} :

$$\hat{e}_1 = e_1 + e_3, \quad \hat{e}_2 = e_2 - e_4, \quad \hat{e}_3 = e_3, \quad \hat{e}_4 = e_4$$

Pour montrer que \mathcal{B}' est une base, il suffit de montrer que la matrice de passage P est inversible (voir exercice 7).

Exercice 7.

1. Déterminer les matrices de passage P, P^{-1} définies par les relations :

$$(v)_{\mathcal{B}'} = P^{-1}(v)_{\mathcal{B}}, \quad (v)_{\mathcal{B}} = P(v)_{\mathcal{B}'}$$

pour tout vecteur $v \in E$.

2. Connaissant $(v_1)_{\mathcal{B}}$, déterminer $(v_1)_{\mathcal{B}'}$. Répéter pour $v_2, T(v_1)$ et $T(v_2)$.

3. Connaissant $M_{\mathcal{B}}(T)$, déterminer $M_{\mathcal{B}'}(T)$ en utilisant la relation :

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(T) P$$

Comparer avec l'exercice 6 pour vérifier que la matrice trouvée est correcte.

4. Répéter pour U, W_1 et W_2 .

Correction de l'exercice 7.

1. Les vecteurs colonnes de \hat{e}_j dans \mathcal{B} sont :

$$[\hat{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\hat{e}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [\hat{e}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\hat{e}_4]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de passage P (dont les colonnes sont les coordonnées de \hat{e}_j dans \mathcal{B}) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On inverse en exprimant les e_j en fonction des \hat{e}_j :

$$e_1 = \hat{e}_1 - \hat{e}_3, \quad e_2 = \hat{e}_2 + \hat{e}_4, \quad e_3 = \hat{e}_3, \quad e_4 = \hat{e}_4$$

donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On calcule $(v_1)_{\mathcal{B}'} = P^{-1}(v_1)_{\mathcal{B}}$:

$$(v_1)_{\mathcal{B}'} = P^{-1}(v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -13/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. On calcule $M_{\mathcal{B}'}(T) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(T) P$:

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $M_{\mathcal{B}'}(T) = M_{\mathcal{B}}(T)$: la matrice de T est la même dans les deux bases, ce qui est cohérent avec le fait que $T(\hat{e}_3) = -3\hat{e}_3$ et $T(\hat{e}_4) = -3\hat{e}_4$.

Exercice 8.

Répéter les exercices 6 et 7 en remplaçant \mathcal{B}' par :

$$\mathcal{B}'' = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$$

avec

$$\tilde{e}_1(x) = \sin x + \cos(2x)$$

$$\tilde{e}_2(x) = \cos x$$

$$\tilde{e}_3(x) = \sin(2x) - \cos x$$

$$\tilde{e}_4(x) = \cos(2x)$$