

Mathématiques 2013–2014

## Cours d'Algèbre Matricielle

?? ??

Bureau n° ??

???@univ-rouen.fr

Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem

Avenue de l'Université, BP.12,

F76801 Saint-Étienne-du-Rouvray.

Rédigé avec  $\LaTeX$

par Hicham AMARIR

le 31 mai 2026

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>3</b>
1.1	Définition d'un espace vectoriel . . . . .	3
1.2	Famille libre . . . . .	4
1.3	Sous-espace vectoriel . . . . .	5
1.4	Sous-espace vectoriel engendré . . . . .	6
1.5	Théorème de la base incomplète . . . . .	7
1.6	Somme de sous-espaces . . . . .	8
1.7	Somme directe . . . . .	9
1.7.1	Le cas de deux sous-espaces . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Matrices</b>	<b>10</b>
2.1	Définitions et opérations sur les matrices . . . . .	10
2.2	Produit matriciel . . . . .	11
2.2.1	Produit matriciel des matrices carrées . . . . .	12
2.3	Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	13
2.3.1	Permutations et transpositions . . . . .	15
2.3.2	Propriétés du déterminant . . . . .	16
2.3.3	Matrice transposée . . . . .	17
2.3.4	Méthode de calcul du déterminant (Développement par cofacteurs) . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Endomorphismes</b>	<b>23</b>
3.1	Définitions et opérations sur les applications linéaires . . . . .	23
3.2	Homomorphismes et endomorphismes des espaces vectoriels . . . . .	28
3.3	Matrice d'une application linéaire . . . . .	29
3.4	Matrice de passage et changement de base . . . . .	30
3.5	Polynôme d'un endomorphisme . . . . .	33
3.6	Rappels sur les polynômes . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b>	<b>38</b>
4.1	Introduction . . . . .	38
4.2	Valeurs propres d'un endomorphisme . . . . .	38
4.3	Calcul du polynôme caractéristique . . . . .	41
4.4	Diagonalisation . . . . .	44
4.4.1	Retour sur la diagonalisation . . . . .	45
4.5	Trigonalisation (des matrices et des endomorphismes) . . . . .	49
4.6	Polynôme minimal . . . . .	51
4.7	Lemme des Noyaux . . . . .	53
4.8	Récapitulatif et Décomposition de Dunford . . . . .	55

# Chapitre 1

## Espaces vectoriels

### 1.1 Définition d'un espace vectoriel

#### Définition 1.1 : (Espace vectoriel)

Soit  $\mathbb{K}$  un corps.

On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un **espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$**  si les conditions suivantes sont réunies :

- ①  $(E, +)$  est un groupe commutatif.
- ② Loi externe :  $(\forall u \in E) (\forall a \in \mathbb{K}), \quad a \cdot u \in E.$
- ③  $a(bu) = (ab)u.$
- ④  $a(u + v) = au + av.$
- ⑤  $(a + b)u = au + bu.$
- ⑥  $1 \cdot u = u$  et  $0 \cdot u = \vec{0}.$

#### Exemple :

- ① L'ensemble  $\mathbb{R}^d = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R} \right\}$ , muni de l'addition composante par composante et de la multiplication par un scalaire de  $\mathbb{R}$ , est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
- ② De même,  $\mathbb{C}^d$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , avec les mêmes opérations composante par composante.
- ③ L'ensemble  $\mathcal{C}([0; 1])$  des fonctions réelles continues sur  $[0; 1]$ , muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire réel, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . C'est un exemple d'espace vectoriel de dimension infinie.
- ④ L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $d$  (avec  $d \geq 1$ ), muni de l'addition de polynômes et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

## 1.2 Famille libre

### Définition 1.2 : (Famille libre)

Soit  $F = (u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille d'éléments de  $E$ .

La famille  $F$  est **libre** si et seulement si :

$$\forall (c_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n c_i u_i = \vec{0} \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad c_i = 0$$

Si la famille n'est pas libre, elle est dite **liée**.

### Exemple :

- ⊛ Dans  $\mathbb{R}^2$ , considérons les vecteurs  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

La famille  $(u_1, u_2)$  est **libre** car :

$$\begin{aligned} c_1 u_1 + c_2 u_2 = \vec{0} &\iff c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff c_1 = 0 \text{ et } c_2 = 0 \end{aligned}$$

- ⊛ En revanche, considérons  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

On remarque que  $2u_1 - u_2 = \vec{0}$  avec  $c_1 = 2 \neq 0$  et  $c_2 = -1 \neq 0$ .

La famille  $(u_1, u_2)$  est donc **liée**.

### 1.3 Sous-espace vectoriel

#### Définition 1.3 : (Sous-espace vectoriel)

Soit  $F \subset E$  avec  $F \neq \emptyset$ .

Si  $(F, +, \cdot)$  est un espace vectoriel, alors on dit que c'est un **sous-espace vectoriel de**  $(E, +, \cdot)$ .

#### Propriété 1.4 : (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit  $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Alors  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

#### Preuve :

⊛ Montrons que  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$ .

Chaque  $F_\alpha$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , donc en particulier un espace vectoriel. Tout espace vectoriel contient le vecteur nul, donc :

$$\forall \alpha \in I, \quad \vec{0} \in F_\alpha$$

Par conséquent :

$$\vec{0} \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

⊛ Soient  $u \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  et  $v \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ .

Donc :

$$\forall \alpha \in I, \quad u \in F_\alpha \text{ et } v \in F_\alpha$$

Comme  $F_\alpha$  est un sous-espace vectoriel :

$$\forall \alpha \in I, \quad u + v \in F_\alpha$$

D'où :

$$u + v \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

L'intersection  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  est donc stable par addition.

⊛ Soient  $a \in \mathbb{K}$  et  $u \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ .

Donc :

$$\forall \alpha \in I, \quad u \in F_\alpha$$

Comme  $F_\alpha$  est un sous-espace vectoriel :

$$\forall \alpha \in I, \quad a \cdot u \in F_\alpha$$

D'où :

$$a \cdot u \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

L'intersection  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  est donc stable par multiplication par un scalaire.

**Conclusion :** L'intersection  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  est donc non vide, stable par addition et par multiplication par un scalaire : les 3 points

montrent donc que  $c$ 'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## 1.4 Sous-espace vectoriel engendré

### Propriété 1.5 : (Existence du sous-espace engendré)

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F' \subset E$ .

Il existe un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  qui respecte les deux points suivants :

- ①  $F' \subset F$
- ② Si  $\tilde{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $F' \subset \tilde{F}$ , alors  $F \subset \tilde{F}$

Dans ce cas,  $F$  est unique.

On appelle  $F$  le **sous-espace vectoriel engendré par  $F'$** .

### Preuve :

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F' \subset E$ . Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  qui contiennent  $F'$ .

$$\mathcal{F} = \{H \mid H \text{ sous-espace vectoriel de } E, F' \subset H\}$$

Notons que  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  car  $E$  est lui-même un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $F'$ , donc :

$$E \in \mathcal{F} \implies \mathcal{F} \neq \emptyset$$

Posons :

$$F = \bigcap_{H \in \mathcal{F}} H$$

Par la propriété précédente,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Vérification de la propriété ① :** Montrons que  $F' \subset F$ .

Comme  $\forall H \in \mathcal{F}, F' \subset H$ , donc :

$$F' \subset \bigcap_{H \in \mathcal{F}} H = F$$

**Vérification de la propriété ② :** Montrons que  $F$  est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $F'$ .

Si  $\tilde{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $F' \subset \tilde{F}$ , alors par définition de  $\mathcal{F}$  :

$$\tilde{F} \in \mathcal{F}$$

Donc :

$$F = \bigcap_{H \in \mathcal{F}} H \subset \tilde{F}$$

**Unicité de  $F$  :** Montrons que  $F$  est unique.

Supposons que  $F_1$  et  $F_2$  vérifient tous les deux les propriétés ① et ②.

D'une part,  $F_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  vérifiant  $F' \subset F_2$  (propriété ① de  $F_2$ ). Donc par la propriété ② de  $F_1$  :

$$F_1 \subset F_2$$

D'autre part,  $F_1$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  vérifiant  $F' \subset F_1$  (propriété ① de  $F_1$ ). Donc par la propriété ② de  $F_2$  :

$$F_2 \subset F_1$$

Par double inclusion, on conclut que  $F_1 = F_2$ , ce qui établit l'unicité.

## 1.5 Théorème de la base incomplète

### **Théorème 1.6 :** (Théorème de la base incomplète (lemme de Steinitz))

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$  une famille libre et  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une famille génératrice.

Alors il existe une rénumérotation de  $(v_1, \dots, v_n)$  telle que la famille  $(u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$  soit génératrice (en particulier  $m \leq n$ ).

### **Preuve :**

On démontre par récurrence que pour  $k = 0, 1, \dots, m$ , il existe des vecteurs  $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$  tels que :

**Initialisation :**  $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$  engendre  $E$  (\*)

Pour  $k = 0$ , l'hypothèse  $(v_1, \dots, v_n)$  engendre  $E$ .

Pour  $k \leq m - 1$ , (\*) est vraie.

On peut supposer que alors  $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$  engendre  $E$ .

$$\text{Alors } u_{k+1} = \sum_{i=1}^k c_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} d_j v_j.$$

Si  $\forall j \in \llbracket 1, n - k \rrbracket \quad d_j = 0$ , alors on obtient une contradiction avec l'hypothèse que  $(u_1, \dots, u_m)$  est libre.

$$\implies \exists j_0 \in \llbracket 1, n - k \rrbracket \quad d_{j_0} \neq 0$$

$$d_{j_0} v_{j_0} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k c_i u_i - \sum_{j \neq j_0} d_j v_j$$

$$d_{j_0} \neq 0 \implies v_{j_0} = \frac{1}{d_{j_0}} \left( u_{k+1} - \sum_{i=1}^k c_i u_i - \sum_{j \neq j_0} d_j v_{k+j} \right)$$

$\implies$  dans la famille  $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ , on peut remplacer  $v_{j_0}$  par  $u_{k+1}$ , la famille reste génératrice.

$\implies$  la famille  $(u_1, \dots, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, v_{j_0-1}, v_{j_0+1}, \dots, v_n)$  engendre  $E$ .

### **Corollaire 1.7 :** (Dimension d'un espace vectoriel)

Si  $F' = (u_1, \dots, u_n)$  et  $F'' = (v_1, \dots, v_m)$  sont deux familles libres et génératrices, alors  $n = m$ .

Le nombre  $n = m$  s'appelle la **dimension de  $E$**  (de l'espace vectoriel).

La famille qui est à la fois libre et génératrice s'appelle **base de l'espace vectoriel**.

### **Propriété 1.8 :** (Coordonnées dans une base)

Soit  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $E$ .

Alors  $\forall v \in E, \exists! (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$$

L'application

$$\varphi_{\mathcal{B}} : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

### Preuve :

\* **Existence** : il existe  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$  tel que  $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ , car  $\mathcal{B}$  est génératrice.

\* **Unicité** : soient  $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i = \sum_{i=1}^n y_i u_i$  deux décompositions de  $v$ . Alors

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) u_i = 0$$

Comme  $\mathcal{B}$  est libre, ceci implique  $x_i - y_i = 0$  pour tout  $i$ , d'où  $x_i = y_i$ .

Vérifions la linéarité : soient  $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^n y_i u_i$  et  $a \in \mathbb{K}$ .

$$(av)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = av_{\mathcal{B}}, \quad (v+w)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = v_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}.$$

Ainsi  $\varphi_{\mathcal{B}} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  est linéaire, et c'est un isomorphisme.

### Définition 1.9 : (Vecteur des coordonnées)

Avec les notations de la proposition précédente, le vecteur

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

est appelé **vecteur des coordonnées** de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et l'isomorphisme  $\varphi_{\mathcal{B}}$  est appelé **isomorphisme des coordonnées**.

## 1.6 Somme de sous-espaces

### Définition 1.10 : (Somme de sous-espaces)

Soient  $F_1, \dots, F_k$  des sous-espaces de  $E$ .

La **somme des sous-espaces**  $F_i$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $\bigcup_{i=1}^k F_i$ .

Elle est notée  $F_1 + F_2 + \dots + F_k$ .

Alors  $v \in F_1 + \dots + F_k$  si et seulement si  $\exists (u_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \prod_{i=1}^k F_i$  tel que  $v = \sum_{i=1}^k u_i$ .

Le sous-espace vectoriel somme est le sous-espace vectoriel engendré par la famille  $\bigcup_{i=1}^k F_i$ .

## 1.7 Somme directe

### Définition 1.11 : (Somme directe)

Les sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_k$  forment une **somme directe** notée  $\bigoplus_{i=1}^k F_i$  si pour tout  $v \in F_1 + \dots + F_k$ , l'expression :

$$v = \sum_{i=1}^k x_i u_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K} \text{ et } u_i \in F_i$$

est unique. C'est-à-dire que si pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $x_i \in \mathbb{K}$ ,  $x'_i \in \mathbb{K}$ ,  $u_i \in F_i$  et  $u'_i \in F_i$  on a :

$$v = \sum_{i=1}^k x_i u_i = \sum_{i=1}^k x'_i u'_i \implies \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad x_i = x'_i \text{ et } u_i = u'_i$$

### 1.7.1 Le cas de deux sous-espaces

#### Propriété 1.12 : (Caractérisation de la somme directe par l'intersection)

Soient  $F'$  et  $F''$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Alors la somme  $F' + F''$  est directe si et seulement si  $F' \cap F'' = \{0\}$  (c'est-à-dire  $\vec{0}$ ).

#### Preuve :

Supposons que la somme  $F' + F''$  est directe.

Soit  $u \in F' \cap F''$  et  $u \neq 0$ .

Alors  $u = x' u' = x'' u''$  avec  $x' = x'' = 1$ .

En prenant  $u' \in F'$  et  $u'' \in F''$  :

$$u = u' = u''$$

$$u = 0u' + 1u''$$

$$u = 1u' + 0u'' \quad (\text{contradiction avec l'unicité de l'écriture})$$

Donc  $F' \cap F'' = \{0\}$ .

#### Preuve :

**Autre démonstration** : supposons que la somme  $F' + F''$  n'est pas directe.

Alors  $\exists u' \in F', \exists v' \in F', \exists u'' \in F'', \exists v'' \in F''$  tels que :

$$\exists w \in E \quad w = u' + u'' = v' + v'' \quad \text{avec } u' \neq v' \text{ et } u'' \neq v''$$

Par conséquent  $\underbrace{u' - v'}_{\in F'} = \underbrace{v'' - u''}_{\in F''} \neq 0$ .

Donc  $F' \cap F''$  contient un vecteur non nul, donc  $F' \cap F'' \neq \{0\}$ .

## Chapitre 2

# Matrices

### 2.1 Définitions et opérations sur les matrices

#### Définition 2.1 : (Ensemble des matrices)

On note par  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  l'**ensemble des matrices** avec  $n$  lignes et  $m$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Si  $n = m$ , on note  $\mathcal{M}_n$  **matrice carrée**.

Si  $m = 1$  : unicolonne ou **vecteur colonne**.

Si  $n = 1$  : uniligne ou **vecteur ligne**.

#### Définition 2.2 : (Opérations sur les matrices)

Soient  $a \in \mathbb{K}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ .

- ⊛ On définit la multiplication de  $A$  par le scalaire  $a$  par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad (aA)_{ij} = a \cdot A_{ij}$$

- ⊛ On définit la somme de deux matrices  $A$  et  $B$  de même taille par

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

#### Propriété 2.3 : (Espace vectoriel des matrices)

$\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n \times m$ .

#### Exemple :

Pour  $n = 2$  et  $m = 3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une base.

Il y a bien  $2 \times 3$  éléments dans cette base. Donc  $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{K})$  est de dimension 6.

## 2.2 Produit matriciel

### Définition 2.4 : (Produit matriciel)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  et soit  $B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ .

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{matrix} & & & \text{colonne } j \\ & & & \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \\ \text{ligne } i & \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \end{matrix} = ((AB)_{ij})$$

Le  $k$ -ième élément de la ligne  $i$  est multiplié par le  $k$ -ième élément de la colonne  $j$ .

### Propriété 2.5 : (Stabilité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par le produit matriciel)

Le produit matriciel est une loi de composition interne pour  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

### Propriété 2.6 : (Associativité du produit matriciel)

Le produit matriciel est associatif (l'associativité n'est pas restreinte aux matrices carrées) :

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{si tous les produits sont définis})$$

### Propriété 2.7 : (Non-commutativité du produit matriciel)

Le produit matriciel n'est pas commutatif :

$$AB \neq BA \quad \text{en général}$$

### Définition 2.8 : (Matrice identité)

La **matrice identité** d'ordre  $n$  est

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

et vérifie

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AI_n = I_n A = A$$

### Définition 2.9 : (Matrice diagonale)

Une matrice  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **diagonale** si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i \neq j \implies D_{ij} = 0$$

c'est-à-dire  $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$ .

**Définition 2.10 :** (Matrice triangulaire)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **triangulaire inférieure** si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad j > i \implies A_{ij} = 0$$

par exemple  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ g & f & c \end{pmatrix}$ .

Une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **triangulaire supérieure** si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad j < i \implies B_{ij} = 0$$

par exemple  $\begin{pmatrix} a & d & g \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ .

### 2.2.1 Produit matriciel des matrices carrées

**Définition 2.11 :** (Matrices inversibles)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **inversible** s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Cette matrice  $B$  est alors unique; on l'appelle **matrice inverse de**  $A$  et on la note  $A^{-1}$ .

L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un groupe non commutatif pour le produit matriciel, appelé **groupe linéaire** et noté  $GL_n(\mathbb{K})$ .

**Propriété 2.12 :** (Inverse d'un produit de matrices inversibles)

Le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

**Propriété 2.13 :** (Inversibilité et liberté des colonnes)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  peut être vue comme une suite de ses vecteurs colonnes.

Soient  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les vecteurs colonnes de  $A$ .

Alors  $A$  est inversible si et seulement si la famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est libre,

ce qui équivaut encore à dire que  $A$  admet  $n$  pivots après réduction par la méthode du pivot de Gauss.

## 2.3 Déterminant d'une matrice carrée

### Définition 2.14 : (Déterminant — définition axiomatique)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $A$  représentée par  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  vecteurs colonnes.

$$\det A = f(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

C'est une fonction  $f$  avec  $f : (\mathbb{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{K}$  satisfaisant :

(i)  $f$  est **multilinéaire** : si  $a \in \mathbb{K}$  et  $b \in \mathbb{K}$ , alors

$$\begin{aligned} & f(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, av'_i + bv''_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &= af(v_1, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_n) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, v''_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

(ii)  $f$  est **alternée** : si  $1 \leq i < j \leq n$ , alors

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

(iii)  $f$  est **normalisée** :  $f(e_1, \dots, e_n) = 1$  avec  $(e_1, \dots, e_n)$  base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ème ligne.}$$

### Définition 2.15 : (Déterminant — formule de Leibniz)

Soit  $S_n$  le groupe symétrique : c'est l'ensemble (ou groupe) de toutes les permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

$\varepsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$$

Alors :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma(i)}$$

### Exemple :

**Attention :** en pratique, on ne calcule *jamais* un déterminant par la formule de Leibniz — le coût est  $n!$  termes, soit 720 pour une matrice  $6 \times 6$ . Cette formule sert uniquement dans les *preuves*. On utilise en pratique le développement par cofacteurs ou la méthode du pivot de Gauss. L'exemple suivant est uniquement là pour comprendre comment fonctionne la formule. Calculons  $\det(A)$  pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

en appliquant rigoureusement la formule de Leibniz :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^3 A_{i,\sigma(i)}$$

$S_3$  contient  $3! = 6$  permutations. La signature d'une permutation  $\sigma \in S_3$  se calcule par :

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod_{i < j} (i - j)}$$

Le dénominateur est commun à toutes les permutations. Dans  $S_3$  le dénominateur vaut toujours :

$$\prod_{i < j} (i - j) = (1 - 2)(1 - 3)(2 - 3) = (-1)(-2)(-1) = -2$$

**Permutation 1 :**  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , donc  $\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2, \sigma_1(3) = 3$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_1) &= \frac{(\sigma_1(1) - \sigma_1(2))(\sigma_1(1) - \sigma_1(3))(\sigma_1(2) - \sigma_1(3))}{-2} \\ &= \frac{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)}{-2} = \frac{(-1)(-2)(-1)}{-2} = \frac{-2}{-2} = +1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\sigma_1) \cdot A_{1,1} \cdot A_{2,2} \cdot A_{3,3} = (+1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = +6$$

**Permutation 2 :**  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , donc  $\sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 1, \sigma_2(3) = 3$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_2) &= \frac{(\sigma_2(1) - \sigma_2(2))(\sigma_2(1) - \sigma_2(3))(\sigma_2(2) - \sigma_2(3))}{-2} \\ &= \frac{(2 - 1)(2 - 3)(1 - 3)}{-2} = \frac{(1)(-1)(-2)}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\sigma_2) \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,1} \cdot A_{3,3} = (-1) \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-3) = +12$$

**Permutation 3 :**  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , donc  $\sigma_3(1) = 3, \sigma_3(2) = 2, \sigma_3(3) = 1$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_3) &= \frac{(\sigma_3(1) - \sigma_3(2))(\sigma_3(1) - \sigma_3(3))(\sigma_3(2) - \sigma_3(3))}{-2} \\ &= \frac{(3 - 2)(3 - 1)(2 - 1)}{-2} = \frac{(1)(2)(1)}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\sigma_3) \cdot A_{1,3} \cdot A_{2,2} \cdot A_{3,1} = (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1 = +3$$

**Permutation 4 :**  $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , donc  $\sigma_4(1) = 1, \sigma_4(2) = 3, \sigma_4(3) = 2$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_4) &= \frac{(\sigma_4(1) - \sigma_4(2))(\sigma_4(1) - \sigma_4(3))(\sigma_4(2) - \sigma_4(3))}{-2} \\ &= \frac{(1 - 3)(1 - 2)(3 - 2)}{-2} = \frac{(-2)(-1)(1)}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\sigma_4) \cdot A_{1,1} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,2} = (-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = -20$$

**Permutation 5 :**  $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , donc  $\sigma_5(1) = 2, \sigma_5(2) = 3, \sigma_5(3) = 1$

$$\varepsilon(\sigma_5) = \frac{(\sigma_5(1) - \sigma_5(2))(\sigma_5(1) - \sigma_5(3))(\sigma_5(2) - \sigma_5(3))}{-2}$$

$$= \frac{(2-3)(2-1)(3-1)}{-2} = \frac{(-1)(1)(2)}{-2} = \frac{-2}{-2} = +1$$

$$\varepsilon(\sigma_5) \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,1} = (+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = +2$$

**Permutation 6 :**  $\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , donc  $\sigma_6(1) = 3, \sigma_6(2) = 1, \sigma_6(3) = 2$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_6) &= \frac{(\sigma_6(1) - \sigma_6(2))(\sigma_6(1) - \sigma_6(3))(\sigma_6(2) - \sigma_6(3))}{-2} \\ &= \frac{(3-1)(3-2)(1-2)}{-2} = \frac{(2)(1)(-1)}{-2} = \frac{-2}{-2} = +1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\sigma_6) \cdot A_{1,3} \cdot A_{2,1} \cdot A_{3,2} = (+1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = +60$$

Donc en appliquant la formule de Leibniz, on obtient :

$$\det(A) = 6 + 12 + 3 + (-20) + 2 + 60 = 63$$

On peut faire le lien entre les deux définitions précédentes :

**Propriété 2.16 :** (Développement du déterminant par multilinéarité dans la base canonique)

Soit  $A = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$v_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} e_i$$

Alors :

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = f\left(\sum_{i=1}^n A_{i1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n A_{in} e_i\right)$$

Si  $f$  est multilinéaire (i), alors :

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i_1=1}^n A_{i_1,1} f(e_{i_1}, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n A_{i_1,1} \dots A_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

Les propositions (ii) et (iii) de la définition axiomatique nous permettent d'écrire  $f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)$ .

### 2.3.1 Permutations et transpositions

**Définition 2.17 :** (Transposition)

La transposition est une permutation telle que :

$$\text{Transposition } \tau_{ij} \text{ est une permutation tel que } \tau_{ij}(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \neq i \text{ et } k \neq j \\ i & \text{si } k = j \\ j & \text{si } k = i \end{cases} \quad (\text{on échange } i \text{ et } j)$$

### 2.3.2 Propriétés du déterminant

**Remarque :**

Le déterminant a été défini à partir des vecteurs colonnes, mais il peut également être défini à partir des vecteurs lignes.

**Notation 2.18 :** (*Notation du déterminant*)

On note aussi

$$\det A = |A|$$

**Exemple :**

Pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , on note son déterminant de la façon suivante :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Propriété 2.19 :** (*Homogénéité du déterminant*)

Si on multiplie par une constante  $\lambda \in \mathbb{K}$  une colonne (ou une ligne) de  $A$ , le déterminant est multiplié par  $\lambda$  :

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,j} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & \dots & \lambda A_{2,j} & \dots & A_{2,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & \lambda A_{m,j} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & \dots & A_{2,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix}$$

**Propriété 2.20 :** (*Additivité du déterminant*)

Le déterminant est additif (multilinéaire) par rapport à chaque colonne (ou ligne) :

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A'_{1,i} + A''_{1,i} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & \dots & A'_{2,i} + A''_{2,i} & \dots & A_{2,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A'_{m,i} + A''_{m,i} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A'_{1,i} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & \dots & A'_{2,i} & \dots & A_{2,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A'_{m,i} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A''_{1,i} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & \dots & A''_{2,i} & \dots & A_{2,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A''_{m,i} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix}$$

**Propriété 2.21 :** (*Nullité du déterminant en cas de colonnes identiques*)

Si deux colonnes (ou deux lignes) de  $A$  sont égales, alors  $\det A = 0$ .

**Propriété 2.22 :** (*Invariance par opération élémentaire*)

Si on remplace la colonne (ou la ligne)  $v_i$  par  $v_i + \sum_{j \neq i} \beta_j v_j$ , le déterminant ne change pas.

**Exemple :**

Opération  $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$  :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-2 \\ 3 & 0 & 1-0 \\ 0 & 1 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Propriété 2.23 : (Inversibilité et déterminant)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$A \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0$$

**Preuve :**

$A$  est inversible si et seulement si la famille de colonnes (la famille de lignes) de  $A$  est libre.

Supposons  $(v_1, \dots, v_n)$  n'est pas libre.

Alors une colonne est une combinaison linéaire des autres colonnes.

Supposons  $v_1 = \sum_{k=2}^n c_k v_k$ .

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_n) &= \det\left(v_1 - \sum_{k=2}^n c_k v_k, v_2, \dots, v_n\right) \\ &= \det(0, v_2, \dots, v_n) = 0 \end{aligned}$$

Si une colonne (ou une ligne) est égale à  $\vec{0}$ , le déterminant est 0.

**2.3.3 Matrice transposée**

**Définition 2.24 : (Matrice transposée)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Sa transposée, notée  $A^t = (A_{ji})$ , est la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes.

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Propriété 2.25 : (Déterminant de la transposée)**

$$\det(A^t) = \det(A)$$

**Preuve :**

Par la formule de Leibniz 2.15, on a :

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma(i)}^t \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{\sigma(i), i} \end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice  $j = \sigma(i)$ , soit  $i = \sigma^{-1}(j)$ . Donc :

$$\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i), i} = \prod_{j=1}^n A_{j, \sigma^{-1}(j)}$$

De plus,  $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$  car :

$$\frac{\overbrace{\sigma(i)}^k - \overbrace{\sigma(j)}^\ell}{\underbrace{i}_{\sigma^{-1}(k)} - \underbrace{j}_{\sigma^{-1}(\ell)}} = \frac{k - \ell}{\sigma^{-1}(k) - \sigma^{-1}(\ell)}$$

Donc, quand  $\sigma$  parcourt  $S_n$ ,  $\sigma^{-1}$  aussi :

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n A_{j, \sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^n A_{j, \tau(j)} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

**Remarque :**

Puisque  $\det(A) = \det(A^t)$  et que la transposition échange lignes et colonnes, toute propriété du déterminant énoncée pour les colonnes est également valable pour les lignes, et réciproquement.

**Propriété 2.26 : (Déterminant du produit)**

Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Alors :

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

**Preuve :**

Soit  $v_i = \begin{pmatrix} A_{1,i} \\ \vdots \\ A_{n,i} \end{pmatrix}$  les colonnes de la matrice  $A$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \dots & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

La  $k$ -ième colonne de  $AB$  c'est  $\sum_{j=1}^n B_{jk} \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n B_{jk} v_j$ .

Donc :

$$\det(AB) = \det\left(\sum_{j=1}^n B_{j,1} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n B_{j,n} v_j\right)$$

En utilisant la multilinéarité :

$$= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n \underbrace{B_{j_1,1} \cdots B_{j_n,n}}_{\prod_{i=1}^n B_{j_i,i}} \det(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$$

Si  $(j_1, \dots, j_n)$  n'est pas une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , alors 2 colonnes sont égales.

Dans le cas d'égalité de 2 colonnes,  $\det(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}) = 0$ .

Par conséquent,  $\det(AB)$  devient :

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n B_{\sigma(i),i} \det(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

Alors on a  $\det(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \underbrace{\det(v_1, \dots, v_n)}_{\det(A)}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n B_{\sigma(i),i} \varepsilon(\sigma) \det(A) \\ &= \det(A) \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n B_{\sigma(i),i}}_{\det(B') = \det(B)} \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

### Propriété 2.27 : (Déterminant d'une matrice triangulaire)

Si  $A$  est triangulaire, alors  $\det(A)$  est le produit des termes de la diagonale.

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & A_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n A_{i,i}$$

### Preuve :

Supposons  $A$  triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & A_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Par la formule de Leibniz 2.15, on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}$$

Un terme  $\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}$  est non nul seulement si  $A_{i,\sigma(i)} \neq 0$  pour tout  $i$ . Comme  $A$  est triangulaire supérieure,  $A_{i,j} = 0$  dès que  $j < i$ , donc  $\sigma(i) \geq i$  pour tout  $i$ . La seule permutation vérifiant cette condition est  $\sigma = \text{Id}$ .

Donc :

$$\det(A) = \varepsilon(\text{Id}) \prod_{i=1}^n A_{i,i} = \prod_{i=1}^n A_{i,i}$$

Autrement dit,  $\det(A)$  est le produit des termes  $A_{i,i}$  qui sont sur la diagonale de  $A$ .

**Propriété 2.28 :** (*Condition d'inversibilité*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$A$  est inversible  $\iff \det(A) \neq 0$

$\iff$  la famille des vecteurs colonnes (resp. lignes) de  $A$  est libre.

**Preuve :**

**Sens direct :** Soit  $A$  inversible.

Alors la famille des colonnes de  $A$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

Notons les vecteurs colonnes de  $A$  par  $v_1, \dots, v_n$ .

Pour un produit  $AB$  on a :

$$AB = \left( \sum_{j=1}^n B_{j,1} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n B_{j,n} v_j \right)$$

$(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ , alors pour tout  $k$  on peut choisir les  $B_{jk}$  tels que :

$$\sum_{j=1}^n B_{jk} v_j = e_k \quad (k\text{-ième vecteur de la base canonique de } \mathbb{K}^n)$$

Alors  $AB = \text{Id}$ , donc  $\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = \det(\text{Id}) = 1$ .

D'où  $\det(A) \neq 0$ .

**Réciproquement :** On veut montrer que :

$$\det(A) \neq 0 \implies A \text{ inversible}$$

Ce qui revient, par contraposée, à montrer que :

$$A \text{ non inversible} \implies \det(A) = 0$$

Supposons que  $A$  n'est pas inversible.

Donc, par la propriété 2.13, la famille des vecteurs colonnes  $(v_1, \dots, v_n)$  n'est pas libre.

Donc elle est liée (voir définition 1.2), c'est-à-dire qu'il existe  $k_0$  et des scalaires  $c_j \in \mathbb{K}$  tels que :

$$v_{k_0} = \sum_{j \neq k_0} c_j v_j$$

Par additivité et homogénéité du déterminant (propriétés 2.20 et 2.19) :

$$\det(A) = \sum_{j \neq k_0} c_j \det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

Chaque terme contient deux colonnes égales ( $v_j$  apparaît en position  $j$  et en position  $k_0$ ), donc par alternance (propriété ??), chaque déterminant est nul. Donc :

$$\det(A) = 0$$

## 2.3.4 Méthode de calcul du déterminant (Développement par cofacteurs)

### Définition 2.29 : (Mineur et cofacteur)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On élimine la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de  $A$ , ce qui donne une matrice de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ .

On note  $\det_{ij}(A)$  le déterminant de cette matrice, appelé **mineur**.

On appelle **cofacteur** le scalaire :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det_{ij}(A)$$

### Propriété 2.30 : (Développement de Laplace)

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

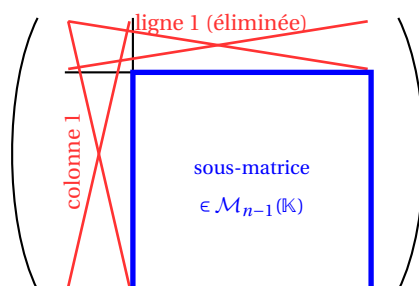
$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n A_{i,k} C_{i,k} \\ &= \sum_{j=1}^n A_{k,j} C_{k,j} \end{aligned}$$

### Exemple :

**Pour  $k = 1$  :** on développe selon la première colonne.

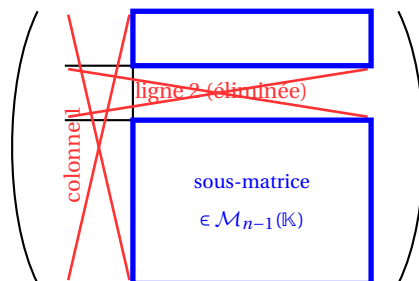
Pour chaque ligne  $i$ , on élimine la ligne  $i$  et la colonne 1 — ci-dessous pour  $i = 1$  :

**1<sup>ère</sup> étape :** on calcule  $\det_{1,1}(A)$ , le déterminant de la matrice restante après retrait de la ligne 1 et de la colonne 1.



On multiplie par  $A_{1,1}$  et par  $(-1)^{1+1}$  pour obtenir le cofacteur  $C_{1,1} = (-1)^{1+1} \det_{1,1}(A)$ .

**2<sup>ème</sup> étape :** on élimine la ligne 2 et la colonne 1 pour obtenir  $C_{2,1}$  :



et ainsi de suite jusqu'à  $C_{n,1}$ .

Donc :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,1} C_{i,1}$$

**Exemple concret** avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ , développement selon la colonne 1 :

**Cofacteur**  $C_{1,1}$  : on retire la ligne 1 et la colonne 1, ce qui donne la sous-matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ .

$$C_{1,1} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = (+1) [(-1)(-3) - (2)(5)] = 3 - 10 = -7$$

**Cofacteur**  $C_{2,1}$  : on retire la ligne 2 et la colonne 1, ce qui donne la sous-matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ .

$$C_{2,1} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = (-1) [(1)(-3) - (3)(5)] = (-1)(-18) = 18$$

**Cofacteur**  $C_{3,1}$  : on retire la ligne 3 et la colonne 1, ce qui donne la sous-matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$C_{3,1} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (+1) [(1)(2) - (3)(-1)] = 2 + 3 = 5$$

Donc :

$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{1,1} C_{1,1} + A_{2,1} C_{2,1} + A_{3,1} C_{3,1} \\ &= 2 \cdot (-7) + 4 \cdot 18 + 1 \cdot 5 \\ &= -14 + 72 + 5 = 63 \end{aligned}$$

### Explication simplifiée — développement selon la ligne 2 :

Précédemment nous avons développé selon la première colonne. Pour varier, nous allons développer selon la ligne 2.

Les signes des cofacteurs  $(-1)^{i+j}$  pour la ligne 2 sont -, +, - en vert :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \times (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times (-1) \times (1 \times (-3) - 3 \times 5) + (-1) \times (+1) \times (2 \times (-3) - 3 \times 1) \\ &\quad + 2 \times (-1) \times (2 \times 5 - 1 \times 1) \\ &= 4 \times (-1) \times (-18) + (-1) \times (+1) \times (-9) + 2 \times (-1) \times 9 \\ &= 72 + 9 - 18 = 63 \end{aligned}$$

Les éléments en rouge sont ceux de la ligne 2 (les  $A_{2,j}$ ), les éléments en vert sont les signes des cofacteurs  $(-1)^{2+j}$ , et on retrouve bien  $\det(A) = 63$ .

## Chapitre 3

# Endomorphismes

### 3.1 Définitions et opérations sur les applications linéaires

#### Définition 3.1 : (Application linéaire)

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $L : E \rightarrow F$  une application.

On dit que  $L$  est une **application linéaire** (ou **homomorphisme**) si elle est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire si :

$$\forall a \in \mathbb{K}, \forall b \in \mathbb{K}, \forall u_1 \in E, \forall u_2 \in E, \quad L(au_1 + bu_2) = aL(u_1) + bL(u_2)$$

Si  $L$  est une application linéaire et que  $F = \mathbb{K}$  (c'est-à-dire que l'ensemble d'arrivée est le corps  $\mathbb{K}$  du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ ), alors on dit que  $L$  est une **forme linéaire** sur  $E$ .

Si  $L$  est une application linéaire bijective, alors on dit que  $L$  est un **isomorphisme** de  $E$  dans  $F$ .

Si  $L$  est une application linéaire et que  $F = E$ , alors on dit que  $L$  est un **endomorphisme** de  $E$ .

Si  $L$  est une application linéaire bijective et que  $F = E$ , alors on dit que  $L$  est un **automorphisme** de  $E$ .

#### Propriété 3.2 : (Combinaison linéaire d'applications)

Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux applications linéaires de  $E \rightarrow F$  et  $a \in \mathbb{K}$ ,  $b \in \mathbb{K}$ .

L'application  $aL_1 + bL_2$  définie par :

$$(aL_1 + bL_2)(u) = aL_1(u) + bL_2(u)$$

est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

#### Preuve :

Soient  $u \in E$ ,  $v \in E$ ,  $x \in \mathbb{K}$ ,  $y \in \mathbb{K}$ .

Alors :

$$\begin{aligned} (aL_1 + bL_2)(xu + yv) &= aL_1(xu + yv) + bL_2(xu + yv) \\ &= a(xL_1(u) + yL_1(v)) + b(xL_2(u) + yL_2(v)) \\ &= x(aL_1(u) + bL_2(u)) + y(aL_1(v) + bL_2(v)) \\ &= x(aL_1 + bL_2)(u) + y(aL_1 + bL_2)(v) \end{aligned}$$

Donc  $aL_1 + bL_2$  est bien linéaire.

#### Propriété 3.3 : (Détermination par une base)

Soit  $L : E \rightarrow F$  linéaire, et  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $E$ .

Alors  $L$  est entièrement déterminée par les valeurs de  $L(u_i)$ ,

c'est-à-dire que si l'on connaît  $L(u_1), \dots, L(u_n)$ , alors pour tout  $w \in E$ , l'image  $L(w)$  est entièrement connue.

**Preuve :**

Soit  $w \in E$ .

Alors il existe des uniques  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$w = \sum_{i=1}^n x_i u_i$$

Donc :

$$L(w) = L\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i L(u_i)$$

**Propriété 3.4 :** (Représentation matricielle d'une application linéaire)

Soient  $E$  de dimension  $n$  et  $F$  de dimension  $k$ , munis des bases  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  et  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_k)$  respectivement.

Soit  $L : E \rightarrow F$  un homomorphisme.

Alors il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$  telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L(u_j) = \sum_{i=1}^k A_{i,j} v_i$$

**Remarque :**

La multiplication par  $A$  permet de passer de  $\mathbb{K}^n$  à  $\mathbb{K}^k$ . On note :

$$\begin{array}{ccc} \varphi: E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ u & \longmapsto & (u)_{\mathcal{B}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \psi: F & \longrightarrow & \mathbb{K}^k \\ v & \longmapsto & (v)_{\mathcal{F}} \end{array}$$

les applications qui associent à chaque vecteur son vecteur colonne de coordonnées dans la base respective.

Les deux chemins de  $E$  vers  $\mathbb{K}^k$  dans le diagramme ci-dessous donnent alors le même résultat :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^k \end{array}$$

c'est-à-dire  $\psi(L(u)) = A\varphi(u)$  pour tout  $u \in E$  (on dit que le diagramme *commute*).

**Exemple :**

Soit  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $L(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix}$ .

On munit  $\mathbb{R}^2$  de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  et  $\mathbb{R}^3$  de sa base canonique  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ .

Comme on utilise les bases canoniques (cas simple pour illustrer), les applications coordonnées  $\varphi$  et  $\psi$  sont immédiates :

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \psi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

(le vecteur des coordonnées est égal au vecteur lui-même dans la base canonique).

Calculons  $L(e_1)$  et  $L(e_2)$  :

$$L(e_1) = L(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 f_1 + 1 f_2 + 2 f_3$$

$$L(e_2) = L(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 f_1 + (-1) f_2 + 0 f_3$$

Par définition, la matrice  $A$  de  $L$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{F}$  a pour colonnes  $(L(e_1))_{\mathcal{F}}$  et  $(L(e_2))_{\mathcal{F}}$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions les deux chemins du diagramme pour  $u = (x, y)$  :

**Chemin 1 (bas) :**  $E \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^k$

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies A\varphi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix}$$

**Chemin 2 (haut puis droite) :**  $E \xrightarrow{L} F \xrightarrow{\psi} \mathbb{K}^k$

$$L(u) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix} \implies \psi(L(u)) = \psi \left( \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix}$$

Les deux chemins aboutissent au même vecteur, donc le diagramme commute bien.

### Propriété 3.5 : (Isomorphisme canonique associé à une base)

Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ .

Il existe un isomorphisme  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  tel que  $\varphi(u_i) = e_i$  ( $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ).

#### Preuve :

On découpe la preuve en deux grandes parties : d'abord la **construction** de  $\varphi$ , puis la **vérification** que c'est un isomorphisme.

#### 1. Existence — Construction de $\varphi$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ .

- ⊙ **Sur les vecteurs de la base :** on pose  $\varphi(u_i) = e_i$ , où  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .
- ⊙ **Prolongement à tout  $E$  :** soit  $w \in E$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , il existe des uniques  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$w = \sum_{i=1}^n x_i u_i$$

On définit alors

$$\varphi(w) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

L'unicité de l'écriture de  $w$  dans la base  $\mathcal{B}$  garantit que  $\varphi(w)$  ne dépend pas du choix des coefficients :  $\varphi$  est donc **bien définie**.

On a ainsi construit une application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  vérifiant  $\varphi(u_i) = e_i$  pour tout  $i$ .

#### 2. Isomorphisme — Vérification des propriétés.

Montrons maintenant que  $\varphi$  est un isomorphisme, c'est-à-dire une application linéaire bijective.

- ⊙ **Linéarité.** Soient  $w_1 \in E$ ,  $w_2 \in E$  et  $c \in \mathbb{K}$ .

Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , il existe des uniques  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  et  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$  tels que :

$$w_1 = \sum_{i=1}^n x_i u_i \quad \text{et} \quad w_2 = \sum_{i=1}^n y_i u_i$$

*Homogénéité.* On a :

$$\begin{aligned} c w_1 &= c \sum_{i=1}^n x_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^n (c x_i) u_i \end{aligned}$$

donc par définition de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi(c w_1) &= \sum_{i=1}^n (c x_i) e_i \\ &= c \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ &= c \varphi(w_1) \end{aligned}$$

*Additivité.* On a :

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i \end{aligned}$$

donc par définition de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi(w_1 + w_2) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \varphi(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i + \sum_{i=1}^n y_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i) + \sum_{i=1}^n y_i \varphi(u_i) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) + \varphi\left(\sum_{i=1}^n y_i u_i\right) \\ &= \varphi(w_1) + \varphi(w_2) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est linéaire.

⊙ **Surjectivité.** Soit  $v \in \mathbb{K}^n$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ , il existe des uniques  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tels que :

$$v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Posons  $w = \sum_{i=1}^n x_i u_i \in E$ . Alors par définition de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n x_i e_i \\
&= v
\end{aligned}$$

Ainsi, tout vecteur  $v \in \mathbb{K}^n$  admet un antécédent  $w \in E$  par  $\varphi$  :  $\varphi$  est donc surjective.

⊙ **Injectivité.** Soient  $w_1 \in E$ ,  $w_2 \in E$  tels que  $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$ .

Par linéarité de  $\varphi$ , on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(w_1) = \varphi(w_2) &\implies \varphi(w_1) - \varphi(w_2) = 0 \\
&\implies \varphi(w_1 - w_2) = 0
\end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et que  $w_1 - w_2 \in E$ , il existe des uniques  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$w_1 - w_2 = \sum_{i=1}^n x_i u_i$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(w_1 - w_2) = 0 &\iff \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i) = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0
\end{aligned}$$

Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ , on a  $x_i = 0$  pour tout  $i$ , donc  $w_1 - w_2 = 0$ , soit  $w_1 = w_2$ .

Ainsi  $\varphi$  est injective.

**Conclusion :**  $\varphi$  est une application linéaire bijective, donc un isomorphisme. Ceci achève la preuve.

## 3.2 Homomorphismes et endomorphismes des espaces vectoriels

### Définition 3.6 : (Vecteur des coordonnées)

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels avec des bases  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ .

Alors :

$$\forall u \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Le vecteur  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$  est le **vecteur des coordonnées** de  $u$  dans la base  $\mathcal{E}$ . On le note  $(u)_{\mathcal{E}}$  :

$$(u)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

### Remarque :

On a déjà montré que l'application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  définie par  $u \mapsto \varphi(u) = (u)_{\mathcal{E}}$  est un isomorphisme.

De même, notons  $\psi : F \rightarrow \mathbb{K}^k$  l'isomorphisme défini par  $\psi(v) = (v)_{\mathcal{F}}$ , où  $v = \sum_{i=1}^k y_i f_i$  on a donc :

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi\left(\sum_{i=1}^k y_i f_i\right) \\ &= (v)_{\mathcal{F}} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il existe alors une matrice  $A$  telle que  $L : E \rightarrow F$  rende le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^k \end{array}$$

### 3.3 Matrice d'une application linéaire

#### Définition 3.7 : (Matrice d'une application linéaire)

Soit  $L : E \rightarrow F$  un homomorphisme,  $E$  de dimension  $n$  de base  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $F$  de dimension  $k$  de base  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k)$ .  
On appelle **matrice de  $L$  dans les bases  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$**  l'unique matrice  $A \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^k \end{array}$$

c'est-à-dire  $\psi(L(u)) = A\varphi(u)$  pour tout  $u \in E$ .

#### Remarque :

##### Comment trouver la matrice $A$ ?

Soit  $e_i \in \mathcal{E}$ . Comme  $L : E \rightarrow F$ ,  $L(e_i)$  est une combinaison linéaire des vecteurs de la base  $\mathcal{F}$ , ce qui s'écrit :

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^k A_{j,i} f_j$$

Donc la  $i$ -ème colonne de  $A$  est :

$$\begin{pmatrix} A_{1,i} \\ \vdots \\ A_{k,i} \end{pmatrix} = (L(e_i))_{\mathcal{F}}$$

Pour  $u \in E$  tel que  $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , on a par linéarité de  $L$  :

$$\begin{aligned} L(u) &= \sum_{i=1}^n x_i L(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^k A_{j,i} f_j \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n A_{j,i} x_i \right) f_j \end{aligned}$$

Donc :

$$(L(u))_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{k,i} x_i \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\varphi(u) = \psi(L(u))$$

La matrice  $A$  a  $k$  lignes et  $n$  colonnes, soit  $A \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ .

#### Corollaire 3.8 : (Isomorphisme des espaces d'applications linéaires)

Soit  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace des homomorphismes (applications linéaires) de  $E$  dans  $F$ , avec  $\dim(E) = n$  et  $\dim(F) = k$ .

$\mathcal{L}(E, F)$  est isomorphe à l'espace des matrices  $\mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ .

Par conséquent  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension  $k \times n$ .

On note alors :

$$\mathcal{L}(E, F) \cong \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$$

**Propriété 3.9 :** (Matrice d'une combinaison linéaire)

Soient  $L_1$  et  $L_2$  des applications linéaires de  $E \rightarrow F$ .

Soient  $a \in \mathbb{K}$ ,  $b \in \mathbb{K}$ .

Si  $A$  est la matrice de  $L_1$  et  $B$  la matrice de  $L_2$  dans les bases  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ , alors  $aA + bB$  est la matrice de  $aL_1 + bL_2$ .

**Propriété 3.10 :** (Matrice d'une composée)

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  des espaces vectoriels avec les bases  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ .

Soient  $L_1 : E \rightarrow F$  et  $L_2 : F \rightarrow G$  des homomorphismes,  $A$  la matrice de  $L_1$  et  $B$  la matrice de  $L_2$ .

Alors  $L_2 \circ L_1 : E \rightarrow G$  est un homomorphisme dont la matrice dans les bases  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}$  est égale à  $BA$ .

### 3.4 Matrice de passage et changement de base

**Définition 3.11 :** (Matrice de passage)

Soient  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  deux bases de  $E$ .

On appelle **matrice de passage** de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{E}$ , ou **matrice de passage** de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{E}$ , ou encore **matrice de passage** de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{E}$ , la matrice de  $\mathcal{E}$  exprimée dans  $\mathcal{F}$  notée  $P$ , c'est-à-dire dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{E}$  exprimés dans la base  $\mathcal{F}$  :

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (e_1)_{\mathcal{F}} & \dots & (e_n)_{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout  $u \in E$ , on a la relation :

$$(u)_{\mathcal{F}} = P(u)_{\mathcal{E}}$$

c'est-à-dire que la **matrice de passage**  $P$  de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{E}$  transforme des coordonnées exprimées dans  $\mathcal{E}$  en coordonnées exprimées dans  $\mathcal{F}$ .

**Remarque :**

Les bases interviennent dans l'ordre opposé à celui de la terminologie. Ce qui est très souvent source de confusion et d'erreur.

**Explication du nom** (principe de **contravariance**) : Son nom indique le sens du remplacement de base, pas celui du calcul sur les coordonnées. Le mot «passage» dans «matrice de passage» désigne la **transition du système de référence** lui-même — c'est la *base* qui passe de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{E}$ . On abandonne  $\mathcal{F}$  et on adopte  $\mathcal{E}$ , en exprimant les vecteurs de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ . Or, il existe un principe fondamental appelé **contravariance** : *quand les vecteurs de base se transforment dans un sens, les coordonnées se transforment dans le sens inverse.*

**Analogie.** Si l'on passe d'une règle graduée en centimètres ( $\mathcal{F}$ ) à une règle graduée en millimètres ( $\mathcal{E}$ ) — les unités deviennent dix fois plus petites — alors les coordonnées d'une longueur fixée deviennent dix fois plus grandes. La base a changé dans un sens, les nombres ont changé dans l'autre.

Ainsi, la matrice dite «de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{E}$ » encode le **passage de la base**  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ , et par contravariance, elle agit sur les **coordonnées** dans le sens contraire :  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ .

C'est là l'explication du paradoxe apparent : le nom décrit le sens du **changement de base** (de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{E}$ ), tandis que la transformation effective des coordonnées est dans le **sens opposé** (de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{F}$ ).

Le paradoxe naît d'une attente naturelle mais non respectée par la convention : on s'attend à ce que le nom indique la direction de l'action sur les coordonnées. Or, en algèbre linéaire française, le nom indique la direction du changement de base géométrique, pas celle du calcul matriciel.

La  $j$ -ème colonne de  $P$  est  $(e_j)_{\mathcal{F}}$ . Donc pour tout  $u = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ , on a :

$$P(u)_{\mathcal{E}} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Or, multiplier une matrice par un vecteur colonne revient à faire la combinaison linéaire de ses colonnes avec les coefficients du vecteur. Ainsi, comme la  $j$ -ème colonne de  $P$  est  $(e_j)_{\mathcal{F}}$ , on obtient :

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j (e_j)_{\mathcal{F}} = \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right)_{\mathcal{F}} = (u)_{\mathcal{F}}$$



**Exemple :**

Base  $\mathcal{E}$  (base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= (e_1, e_2) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Nouvelle base  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (f_1, f_2) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On exprime les vecteurs de  $\mathcal{E}$  dans la base  $\mathcal{F}$ .

Pour cela, on cherche, pour chaque  $e_j$ , les scalaires  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $e_j = \alpha f_1 + \beta f_2$ .

**Expression de  $e_1$  dans  $\mathcal{F}$  :** On résout  $\alpha f_1 + \beta f_2 = e_1$ , soit :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation à la première :  $\alpha = 1$ , puis  $\beta = -\alpha = -1$ . Donc :

$$(e_1)_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Expression de  $e_2$  dans  $\mathcal{F}$  :** On résout  $\alpha f_1 + \beta f_2 = e_2$ , soit :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation à la première :  $\alpha = -1$ , puis  $\beta = 1 - \alpha = 2$ . Donc :

$$(e_2)_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{E}$  a pour colonnes  $(e_1)_{\mathcal{F}}$  et  $(e_2)_{\mathcal{F}}$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si  $(u)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , alors :

$$(u)_{\mathcal{F}} = P(u)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :  $1 \times f_1 + 1 \times f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$

**Propriété 3.12 :** (*Changement de base*)

Soit  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $A$  la matrice de  $L$  dans la base  $\mathcal{E}$ .

Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{F}$  vers la base  $\mathcal{E}$ .

Alors  $PAP^{-1}$  est la matrice de  $L$  dans la base  $\mathcal{F}$ .

**Preuve :**

Par définition de  $P$ , on a :

$$\forall u \in E, \quad P(u)_{\mathcal{E}} = (u)_{\mathcal{F}}$$

Les colonnes de  $P$  sont les coordonnées d'une base : elles sont donc libres, donc d'après la propriété 2.28  $P$  est inversible.

On peut donc multiplier la relation ci-dessus à gauche par  $P^{-1}$ , et on obtient :

$$P^{-1}(u)_{\mathcal{F}} = P^{-1}P(u)_{\mathcal{E}}$$

$$P^{-1}(u)_{\mathcal{F}} = (u)_{\mathcal{E}}$$

Soit  $u \in E$ . On calcule  $(L(u))_{\mathcal{F}}$  en enchaînant les relations :

$$\begin{aligned} (L(u))_{\mathcal{F}} &= P(L(u))_{\mathcal{E}} && \text{(car } P(\cdot)_{\mathcal{E}} = (\cdot)_{\mathcal{F}}) \\ &= PA(u)_{\mathcal{E}} && \text{(A est la matrice de L dans } \mathcal{E}) \\ &= PAP^{-1}(u)_{\mathcal{F}} && \text{(car } P^{-1}(\cdot)_{\mathcal{F}} = (\cdot)_{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $u \in E$ ,  $(L(u))_{\mathcal{F}} = PAP^{-1}(u)_{\mathcal{F}}$ , ce qui montre que  $PAP^{-1}$  est bien la matrice de  $L$  dans la base  $\mathcal{F}$ .

**Propriété 3.13 :** (*Indépendance du déterminant par rapport à la base*)

Soit  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme,  $A$  sa matrice dans une base  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  une autre base de  $E$ .

Le déterminant de la matrice de  $L$  ne dépend pas du choix de la base.

Autrement dit, soient  $A$  la matrice de  $L$  dans  $\mathcal{E}$ ,  $B$  la matrice de  $L$  dans  $\mathcal{F}$  et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{E}$ . On a :

$$\det B = \det(PAP^{-1}) = \det A,$$

### Preuve :

D'après la propriété 3.12, la matrice de  $L$  dans la base  $\mathcal{F}$  est  $B = PAP^{-1}$ .  $P$  est inversible car c'est une matrice de passage entre deux bases, donc  $\det(P) \neq 0$ .

De plus,  $PP^{-1} = I_n$  donc, par multiplicativité du déterminant (propriété 2.26) :

$$\det(PP^{-1}) = \det(P) \det(P^{-1}) = \det(I_n) = 1 \implies \det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$$

En appliquant à nouveau la multiplicativité du déterminant à  $B = PAP^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P) \det(A) \det(P^{-1}) \\ &= \det(P) \det(A) \frac{1}{\det(P)} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Ainsi, quelle que soit la base  $\mathcal{F}$  choisie, on obtient :

$$\det(B) = \det(A)$$

Le déterminant de la matrice de  $L$  est donc bien indépendant du choix de la base.

### Définition 3.14 : (Déterminant d'un endomorphisme)

Le déterminant de  $A$  est appelé **déterminant de l'endomorphisme  $L$** .

## 3.5 Polynôme d'un endomorphisme

### Définition 3.15 : (Polynôme d'un endomorphisme)

Soit  $L$  un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit  $L^k$  par :

$$L^0 = \text{Id} \quad L^1 = L \quad L^2 = L \circ L \quad \dots$$

Pour tout polynôme  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ , on appelle **polynôme de l'endomorphisme  $L$**  l'application :

$$P(L) = \sum_{i=0}^n a_i L^i$$

### Propriété 3.16 : (Stabilité et compatibilité des polynômes d'endomorphismes)

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $L$  un endomorphisme de  $E$ .

Alors  $P(L)$  est un endomorphisme de  $E$ , et :

$$(P+Q)(L) = P(L) + Q(L) \quad \text{et} \quad (PQ)(L) = P(L) \circ Q(L) = Q(L) \circ P(L)$$

### Preuve :

Soit  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  et  $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$  deux polynômes de degré  $n$ .

$P(L)$  est un endomorphisme. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $L^k$  est un endomorphisme ( $L^0 = \text{Id}$ , et la composée de deux endomorphismes est un endomorphisme). Donc  $a_i L^i$  est un endomorphisme pour chaque  $i$ , et  $P(L) = \sum_{i=0}^n a_i L^i$  est une combinaison linéaire finie d'endomorphismes. Or  $\mathcal{L}(E)$  est un espace vectoriel, donc  $P(L) \in \mathcal{L}(E)$ .

**Somme.**

$$\begin{aligned} P(L) + Q(L) &= \sum_{i=0}^n a_i L^i + \sum_{i=0}^n b_i L^i \\ &= (a_0 + b_0) \text{Id} + (a_1 + b_1) L + \dots + (a_n + b_n) L^n \\ &= (P + Q)(L) \end{aligned}$$

**Produit.**

$$\begin{aligned} P(L) \circ Q(L) &= \left( \sum_{i=0}^n a_i L^i \right) \circ \left( \sum_{i=0}^n b_i L^i \right) \\ &= a_0 b_0 \text{Id} + (a_0 b_1 + a_1 b_0) L + \dots + a_n b_n L^{2n} \\ &= \sum_{\ell=0}^{2n} c_\ell L^\ell \quad \text{avec } c_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} a_i b_{\ell-i} \\ &= (PQ)(L) \end{aligned}$$

**Exemple :**

Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et  $L : E \rightarrow E$  l'endomorphisme défini par :

$$\begin{aligned} L: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit le polynôme  $P(X) = X^2 + 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$ . Le **polynôme de l'endomorphisme**  $L$  associé à  $P$  est :

$$P(L) = L^2 + 3L + 2\text{Id}$$

**Calcul de  $L^2$  :** Pour tout  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  :

$$L^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \left( L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = L \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à la matrice

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Action de  $P(L)$  sur un vecteur :**

$$\begin{aligned} P(L) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (L^2 + 3L + 2\text{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= L^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\text{Id} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x+3y \\ 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6x+5y \\ 6y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sa matrice est donc :

$$P(A) = A^2 + 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

### 3.6 Rappels sur les polynômes

**Lemme 3.17 :** (*Identité remarquable, factorisation de  $X^i - \alpha^i$* )

Pour tout entier  $i \geq 1$  et tout scalaire  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on a dans  $\mathbb{K}[X]$  :

$$X^i - \alpha^i = (X - \alpha) \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k X^{i-1-k}$$

**Preuve :**

On développe le membre de droite en distribuant  $X$  et  $-\alpha$  sur la somme :

$$\begin{aligned}
(X - \alpha) \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k X^{i-1-k} &= X \left( \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k X^{i-1-k} \right) - \alpha \left( \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k X^{i-1-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k X^{i-k} - \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^{k+1} X^{i-1-k}
\end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice  $j = k + 1$  dans la seconde somme : quand  $k$  varie de 0 à  $i - 1$ ,  $j$  varie de 1 à  $i$ . La seconde somme devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{i-1} \alpha^{k+1} X^{i-1-k} &= \sum_{j=1}^i \alpha^j X^{i-j} \\
&= \sum_{k=1}^i \alpha^k X^{i-k}
\end{aligned}$$

On isole maintenant les termes extrêmes dans chaque somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k X^{i-k} &= X^i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha^k X^{i-k} \\
\sum_{k=1}^i \alpha^k X^{i-k} &= \sum_{k=1}^{i-1} \alpha^k X^{i-k} + \alpha^i
\end{aligned}$$

En soustrayant, les termes intermédiaires  $\sum_{k=1}^{i-1} \alpha^k X^{i-k}$  s'annulent :

$$\begin{aligned}
(X - \alpha) \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k X^{i-1-k} &= \left( X^i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha^k X^{i-k} \right) - \left( \sum_{k=1}^{i-1} \alpha^k X^{i-k} + \alpha^i \right) \\
&= X^i - \alpha^i
\end{aligned}$$

**Définition 3.18 :** (*Racine d'un polynôme*)

Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

$\alpha$  est une racine de  $P$  si et seulement s'il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que :

$$P = (X - \alpha) Q$$

ce qui équivaut à :

$$P(\alpha) = 0$$

**Preuve :**

$\Rightarrow$  Montrons l'implication suivante : **Si**  $P = (X - \alpha) Q$ , **alors**  $P(\alpha) = 0$ .

Si  $P = (X - \alpha) Q$ , il suffit d'évaluer en  $\alpha$  :

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha) Q(\alpha) = 0 Q(\alpha) = 0$$

Donc  $P(\alpha) = 0$ .

$\Leftarrow$  Montrons l'implication suivante : **Si**  $P(\alpha) = 0$ , **alors**  $(X - \alpha)$  **divise**  $P$ .

Soit  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ . Puisque  $P(\alpha) = 0$ , on soustrait  $P(\alpha)$  sans changer  $P$  :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X) - P(\alpha) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i X^i - \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i (X^i - \alpha^i) \end{aligned}$$

Le terme  $i = 0$  est nul :

$$a_0 (X^0 - \alpha^0) = a_0 (1 - 1) = 0$$

Donc les termes de la somme sont non nul à partir de  $i = 1$  :

$$P(X) = \sum_{i=1}^n a_i (X^i - \alpha^i)$$

Pour  $i \geq 1$ , on utilise la factorisation classique 3.17 :

$$X^i - \alpha^i = (X - \alpha) (X^{i-1} + \alpha X^{i-2} + \dots + \alpha^{i-2} X + \alpha^{i-1})$$

Donc chaque terme  $a_i (X^i - \alpha^i)$  est divisible par  $(X - \alpha)$ .

Par conséquent leur somme  $P(X) = \sum_{i=1}^n a_i (X^i - \alpha^i)$  l'est aussi.

Donc  $(X - \alpha)$  divise  $P$ .

Les deux implications étant démontrées, l'équivalence est établie.

**Propriété 3.19 :** (*Division euclidienne*)

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q$  non nul.

Alors il existe des polynômes  $D \in \mathbb{K}[X]$ ,  $R \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $R = 0$  ou  $\deg(R) < \deg(Q)$  et :

$$P = QD + R$$

**Propriété 3.20 :** (*Existence du PGCD*)

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q \in \mathbb{K}[X]$  non nuls.

Alors il existe PGCD  $(P, Q)$ .

**Propriété 3.21 :** (*Identité de Bézout*)

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $D = \text{PGCD}(P, Q)$ .

Alors :

$$\exists U \in \mathbb{K}[X], \exists V \in \mathbb{K}[X], \quad D = UP + VQ$$

**Définition 3.22 :** (*Multiplicité d'une racine*)

Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$  une racine de  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

On dit que  $\alpha$  est une racine de degré  $k \in \mathbb{N}^*$  s'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que :

$$P = (X - \alpha)^k Q \quad \text{et } \alpha \text{ n'est pas une racine de } Q$$

**Définition 3.23 :** (*Polynôme scindé*)

Le polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  est dit **scindé** sur  $\mathbb{K}$  s'il est produit de polynômes de degré 1 de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Théorème 3.24 :** (*Théorème de d'Alembert-Gauss*)

Tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

**Exemple :**

⊙  $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$

⊙  $(X + 1)^2 (X - 1) = (X + 1)(X + 1)(X - 1)$  (scindé dans  $\mathbb{R}$ )

⊙  $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$  (n'est pas scindé dans  $\mathbb{R}$  mais est scindé dans  $\mathbb{C}$ )

**Théorème 3.25 :** (*Théorème du rang*)

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels et  $L : E \rightarrow F$  un homomorphisme. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Im}(L))$$

**Propriété 3.26 :** (*Caractérisation de l'injectivité*)

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels et  $L : E \rightarrow F$  un homomorphisme. Alors :

$$L \text{ est injectif } \iff \text{Ker}(L) = \{0_E\}$$

## Chapitre 4

# Réduction des endomorphismes

### 4.1 Introduction

**Définition 4.1 :** (*Réduction d'un endomorphisme*)

**Réduire un endomorphisme**  $L : E \rightarrow E$  consiste à trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $L$  prend une forme aussi simple que possible — idéalement diagonale, ou à défaut triangulaire. On parle de **diagonalisation** lorsque  $L$  est représenté par une matrice diagonale dans une certaine base, ce qui revient à décomposer  $E$  en une somme directe de sous-espaces stables par  $L$  sur lesquels  $L$  agit comme une simple homothétie.

### 4.2 Valeurs propres d'un endomorphisme

**Définition 4.2 :** (*Valeurs et vecteurs propres*)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et s'il existe  $u \in E \setminus \{0\}$  tel que :

$$L(u) = \lambda u$$

alors on dit que  $\lambda$  est une **valeur propre** de  $L$  et que  $u$  est un **vecteur propre** de  $L$  associé à  $\lambda$ .

**Définition 4.3 :** (*Espace propre associé à une valeur propre*)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $L$  alors

$$E_\lambda = \{u \in E \mid L(u) = \lambda u\}$$

est appelé l'**espace propre associé à  $\lambda$**  (ou le sous-espace propre associé à  $\lambda$ ).

**Propriété 4.4 :** (*Caractérisation de l'espace propre*)

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $\lambda$  une valeur propre de  $L$ . On a :

$$E_\lambda = \text{Ker}(L - \lambda \text{Id})$$

**Preuve :**

Pour tout  $u \in E$  :

$$\begin{aligned} u \in E_\lambda &\iff L(u) = \lambda u \\ &\iff L(u) - \lambda u = 0 \\ &\iff (L - \lambda \text{Id})(u) = 0 \\ &\iff u \in \text{Ker}(L - \lambda \text{Id}) \end{aligned}$$

**Propriété 4.5 :** (Structure de  $E_\lambda$ )

$E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Preuve :**

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $\lambda$  une valeur propre de  $L$ .

⊛ **Montrons que  $E_\lambda$  est non-vide.**

Comme  $L$  est un endomorphisme on a donc :

$$\begin{aligned}L(0_E) &= 0_E \\ &= \lambda \times 0_E\end{aligned}$$

donc  $0_E \in E_\lambda$ , donc  $E_\lambda \neq \emptyset$ .

⊛ **Montrons que  $E_\lambda$  est stable.**

Soient  $u \in E_\lambda$ ,  $v \in E_\lambda$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Par définition,  $L(u) = \lambda u$  et  $L(v) = \lambda v$ . Par linéarité de  $L$  :

$$\begin{aligned}L(\alpha u + v) &= \alpha L(u) + L(v) \\ &= \alpha \lambda u + \lambda v \\ &= \lambda(\alpha u + v)\end{aligned}$$

Donc  $\alpha u + v \in E_\lambda$ .

$E_\lambda$  est non vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Propriété 4.6 :** (Somme directe des espaces propres)

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes de  $L$  et  $E_{\lambda_i}$  les espaces propres associés.

Alors les  $E_{\lambda_i}$  sont en somme directe.

**Preuve :**

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes de  $L$ .

Par définition, les  $E_{\lambda_i}$  sont en somme directe si toute décomposition  $\sum_{i=1}^k u_i = 0$  avec  $u_i \in E_{\lambda_i}$  implique  $u_i = 0$  pour tout  $i$ .

**On raisonne par l'absurde :** supposons que les  $E_{\lambda_i}$  ne sont pas en somme directe.

Alors il existe des vecteurs  $v_i \in E_{\lambda_i}$  tels que :

$$\sum_{i=1}^k v_i = 0 \quad \text{et} \quad \exists i \in \llbracket 1, k \rrbracket, v_i \neq 0$$

En appliquant  $L$  à  $\sum_{i=1}^k v_i = 0$  :

$$\begin{aligned}L\left(\sum_{i=1}^k v_i\right) &= L(0) \\ \iff L\left(\sum_{i=1}^k v_i\right) &= 0 \\ \iff \sum_{i=1}^k L(v_i) &= 0 \quad (\text{par linéarité de } L) \\ \iff \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i &= 0 \quad (\text{car } v_i \in E_{\lambda_i}, \text{ donc } L(v_i) = \lambda_i v_i) \quad (*)\end{aligned}$$

Soit  $i_0 \in \llbracket 1, k \rrbracket$  tel que  $\lambda_{i_0} = \min \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . On dispose de :

$$\sum_{i=1}^k v_i = 0 \quad (**)$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0 \quad (*)$$

En calculant  $(*) - \lambda_{i_0} \times (**)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i - \lambda_{i_0} \sum_{i=1}^k v_i &= 0 - \lambda_{i_0} \times 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_{i_0}) v_i &= 0 \end{aligned}$$

Le terme  $i_0$  disparaît car  $\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0} = 0$ , donc :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k (\lambda_i - \lambda_{i_0}) v_i = 0$$

En répétant ce procédé par récurrence sur les termes restants, on se ramène à deux indices  $i \neq j$  vérifiant :

$$v_i + v_j = 0 \quad \text{donc} \quad v_i = -v_j$$

Or  $v_j \in E_{\lambda_j}$  et  $E_{\lambda_j}$  est un sous-espace vectoriel, donc stable par multiplication scalaire :  $-v_j \in E_{\lambda_j}$ , c'est-à-dire  $v_i \in E_{\lambda_j}$ .

Ainsi  $v_i$  appartient à la fois à  $E_{\lambda_i}$  et à  $E_{\lambda_j}$ , donc :

$$L(v_i) = \lambda_i v_i \quad (\text{car } v_i \in E_{\lambda_i})$$

$$L(v_i) = \lambda_j v_i \quad (\text{car } v_i \in E_{\lambda_j})$$

En soustrayant ces deux égalités :

$$(\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0$$

Or  $\lambda_i \neq \lambda_j$  donc  $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ , et  $v_i \neq 0$  : contradiction.

L'hypothèse absurde est donc fautive : les  $E_{\lambda_i}$  sont en somme directe.

#### Propriété 4.7 : (Représentation matricielle d'un endomorphisme)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , muni d'une base  $\mathcal{B}$ , et soit  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

Tout vecteur  $u \in E$  s'identifie à ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$  :

$$u \mapsto (u)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$$

Via cette identification, l'endomorphisme  $L$  correspond à la multiplication par une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Ce qui se résume par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad} & L(u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (u)_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\quad} & (L(u))_{\mathcal{B}} \\ & & = A(u)_{\mathcal{B}} \end{array}$$

Ainsi, étudier les valeurs propres et les vecteurs propres de  $L$  revient à étudier la matrice  $A$ .

### 4.3 Calcul du polynôme caractéristique

**Définition 4.8 :** (*Polynôme caractéristique*)

Soit  $A$  la matrice de l'endomorphisme  $L$  de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'application  $P_c : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  définie par :

$$P_c(x) = \det(A - x \text{Id})$$

est appelée **polynôme caractéristique** de  $L$ .

**Exemple :**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à 2.

Un élément générique de  $E$  est un polynôme de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}$$

On considère l'endomorphisme de dérivation  $L : E \rightarrow E$  défini par :

$$\begin{aligned} L(P) &= P' \\ &= a_1 + 2a_2X \end{aligned}$$

La famille  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  est une base de  $E$  (famille libre et génératrice).

Pour tout  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$ , le vecteur des coordonnées dans  $\mathcal{B}$  est :

$$(P)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Notons  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = (1, X, X^2)$ . On calcule les images des vecteurs de base par  $L$  :

$L(e_1) = L(1)$	$L(e_2) = L(X)$	$L(e_3) = L(X^2)$
$= 0$	$= 1$	$= 2X$
$= 0 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3$	$= 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3$	$= 0 \times e_1 + 2 \times e_2 + 0 \times e_3$

Les colonnes de la matrice  $A$  de  $L$  dans  $\mathcal{B}$  sont les coordonnées de  $L(e_1), L(e_2), L(e_3)$  dans  $\mathcal{B}$ , donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de  $L$  est alors :

$$P_c(x) = \det(A - x \text{Id}) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 2 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3$$

**Propriété 4.9 :** (Indépendance du polynôme caractéristique par rapport aux bases)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ ,  $L: E \rightarrow E$  un endomorphisme, et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

Le polynôme caractéristique de  $L$  ne dépend pas du choix de la base de  $E$  :

la matrice de  $L$  dans  $\mathcal{B}$  et la matrice de  $L$  dans  $\mathcal{B}'$  ont le même polynôme caractéristique.

**Preuve :**

Soient  $A$  la matrice de  $L$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $B$  la matrice de  $L$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

Alors  $B = PAP^{-1}$

$$\begin{aligned} \det(B - x \text{Id}) &= \det(PAP^{-1} - x \text{Id}) \\ &= \det(PAP^{-1} - xPP^{-1}) && \text{(car Id} = PP^{-1}\text{)} \\ &= \det(PAP^{-1} - P x P^{-1}) && \text{(commutatif car } x \in \mathbb{K}\text{)} \\ &= \det(PAP^{-1} - P(x \text{Id})P^{-1}) && \text{(on identifie } x \text{ à } x \text{Id)} \\ &= \det(P(A - x \text{Id})P^{-1}) && \text{(on factorise par } P \text{ à gauche) et par } P^{-1} \text{ à droite)} \\ &= \det P \times \det(A - x \text{Id}) \times \det P^{-1} \\ &= \underbrace{\det P \times \det P^{-1}}_1 \times \det(A - x \text{Id}) \\ &= \det(A - x \text{Id}) \end{aligned}$$

**Propriété 4.10 :** (Caractérisation des valeurs propres par le polynôme caractéristique)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ ,  $L: E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } L \iff P_c(\lambda) = 0$$

**Preuve :**

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A$  la matrice de  $L$  dans  $\mathcal{B}$ .

$\Rightarrow$  Supposons que  $\lambda$  est une valeur propre de  $L$ .

Il existe alors  $u \in E$ ,  $u \neq 0_E$ , tel que  $L(u) = \lambda u$ .

Posons  $\hat{u} = (u)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$  le vecteur des coordonnées de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ .

La relation  $L(u) = \lambda u$  se traduit matriciellement par  $A\hat{u} = \lambda\hat{u}$ , donc :

$$(A - \lambda \text{Id})\hat{u} = 0$$

Comme  $\hat{u} \neq 0$ , la matrice  $A - \lambda \text{Id}$  admet un vecteur non nul dans son noyau : elle n'est donc pas inversible, ce qui implique :

$$P_c(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = 0$$

$\Leftarrow$  Supposons que  $P_c(\lambda) = 0$ .

Alors  $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$ , donc la matrice  $A - \lambda \text{Id}$  n'est pas inversible. Il existe donc  $\hat{u} \in \mathbb{K}^n$ ,  $\hat{u} \neq 0$ , tel que :

$$(A - \lambda \text{Id})\hat{u} = 0$$

Soit  $u \in E$  le vecteur de coordonnées  $\hat{u}$  dans  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire  $(u)_{\mathcal{B}} = \hat{u}$ .

On a  $\hat{u} \neq 0$  donc  $u \neq 0_E$ .

La relation matricielle se traduit alors par :

$$\begin{aligned}(L - \lambda \text{Id}_E)(u) &= 0 \\ \implies L(u) - \lambda \text{Id}_E(u) &= 0 \\ \implies L(u) &= \lambda u\end{aligned}$$

Donc  $\lambda$  est bien une valeur propre de  $L$ .

**Propriété 4.11 :** (*Degré du polynôme caractéristique*)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

Le polynôme caractéristique  $P_c$  de  $L$  est de degré  $n = \dim(E)$ .

**Preuve :**

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $A$  la matrice de  $L$  dans  $\mathcal{B}$ .

Alors :

$$\begin{aligned}P_c(x) &= \det(A - x \text{Id}) \\ &= \begin{vmatrix} A_{1,1} - x & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - x & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} - x \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (A - x \text{Id})_{i, \sigma(i)} \\ &= (A_{1,1} - x)(A_{2,2} - x) \cdots (A_{n,n} - x) + \text{des termes de degré strictement inférieur à } n \\ &= (-x)^n + \cdots \text{ (des termes de degré strictement inférieur à } n)\end{aligned}$$

qui est bien de degré  $n = \dim(E)$ .

## 4.4 Diagonalisation

### Définition 4.12 : (Endomorphisme diagonalisable)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$ ,  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $A$  sa matrice dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . On dit que  $L$  est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $PAP^{-1}$  soit diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $L$  est diagonale.

### Propriété 4.13 : (Condition de diagonalisabilité par les vecteurs propres)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

$L$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $L$ .

### Exemple :

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , et soit  $L : E \rightarrow E$  l'endomorphisme défini par :

$$L(e_1) = e_1, \quad L(e_2) = 2e_2, \quad L(e_3) = 3e_3$$

La base  $\mathcal{B}$  est donc une base de vecteurs propres de  $L$ , et la matrice de  $L$  dans  $\mathcal{B}$  est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Remarque.** La matrice de  $L$  dans une base n'est pas nécessairement unique : deux bases différentes peuvent donner la même matrice. Considérons par exemple un endomorphisme  $L'$  défini par :

$$L'(e_1) = e_1, \quad L'(e_2) = 2e_2, \quad L'(e_3) = 2e_3$$

Sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considérons la base  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2 + e_3, e_2 - e_3)$ .

La matrice de  $L'$  dans  $\mathcal{B}'$  est la même car les nouveaux vecteurs de base sont également des vecteurs propres associés à la valeur propre 2 :

$$\begin{aligned} L'(e_1) &= e_1 & L'(e_2 + e_3) &= L'(e_2) + L'(e_3) & L'(e_2 - e_3) &= L'(e_2) - L'(e_3) \\ & & &= 2e_2 + 2e_3 & &= 2e_2 - 2e_3 \\ & & &= 2(e_2 + e_3) & &= 2(e_2 - e_3) \end{aligned}$$

En effet, sa matrice dans  $\mathcal{B}'$  est

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A''$  est la même que  $A'$ .

**Exemple :**

Soient  $y_1, \dots, y_n$  des fonctions dérivables et  $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On considère le système différentiel :

$$\begin{aligned}
y_1' &= \sum_{j=1}^n A_{1,j} y_j \\
&\vdots \\
y_n' &= \sum_{j=1}^n A_{n,j} y_j
\end{aligned}$$

En posant  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , ce système se réécrit sous forme matricielle :

$$y' = Ay \tag{*}$$

### 4.4.1 Retour sur la diagonalisation

On cherche une base de  $E$  qui rend la matrice de  $L$  diagonale, c'est-à-dire une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $PAP^{-1} = D$  soit diagonale.

**Définition 4.14 :** (*Matrices semblables*)

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont **semblables** s'il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$B = PAP^{-1}$$

**Remarque :**

La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable : son unique valeur propre est  $\lambda = 0$  de multiplicité 2, mais  $\dim E_0 = 1 < 2$ , donc il n'existe pas de base de vecteurs propres.

**Exemple :**

Soit  $E = \mathbb{R}^2$  muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ , et soit  $L : E \rightarrow E$  l'endomorphisme défini par :

$$L(e_1) = e_2, \quad L(e_2) = e_1$$

Sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -1$  (distinctes), donc  $L$  est diagonalisable.

**Exemple :**

**Application aux équations différentielles.**

Reprenons le système (\*) :  $y' = Ay$ .

Soit  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible.

On pose le changement de variable  $z = Py$ , c'est-à-dire  $y = P^{-1}z$ . En dérivant :

$$z' = Py' = PAy = PAP^{-1}z$$

On obtient ainsi le système :

$$z' = PAP^{-1}z \quad (**)$$

Si  $P$  est choisie de sorte que  $D = PAP^{-1}$  soit diagonale, alors le système  $(**)$  ci-dessus est découplé (*c'est-à-dire que chaque équation ne fait intervenir qu'une seule inconnue*) et sa solution est immédiate.

On en déduit alors la solution de  $(*)$  par  $y = P^{-1}z$ .

**Propriété 4.15 :** (*Condition suffisante de diagonalisabilité*)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

Si  $L$  possède  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , alors  $L$  est diagonalisable.

**Preuve :**

Soit  $E_{\lambda_i}$  l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Pour tout  $i$ ,  $E_{\lambda_i} \neq \{0_E\}$  car  $\lambda_i$  est valeur propre.

De plus, les espaces propres  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$  sont en somme directe (voir propriété 4.6). Donc :

$$\dim(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}) = \sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i} \geq n$$

Comme  $\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$  est un sous-espace de  $E$  et que  $\dim(E) = n$ , on a nécessairement :

$$E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n} = E$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , soit  $u_i \in E_{\lambda_i}$  avec  $u_i \neq 0_E$ .

La famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre (les  $E_{\lambda_i}$  sont en somme directe) et de cardinal  $n = \dim(E)$ .

La famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est donc une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $L$ .

$L$  admet donc une base de vecteurs propres, c'est-à-dire  $L$  est diagonalisable au sens de la propriété ??.

**Théorème 4.16 :** (*Condition de diagonalisation*)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$ ,  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $L$ , de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_p$  en tant que racines de  $P_c$ .

On note  $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(L - \lambda_i \text{Id})$  le sous-espace propre associé à  $\lambda_i$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $L$  est diagonalisable.
- (ii)  $\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) = \dim(E) = n$ .
- (iii)  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$ .
- (iv)  $P_c$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et  $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

**Preuve :**

⊙ (i)  $\Rightarrow$  (ii) :

$L$  étant diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  composée de vecteurs propres.

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons  $k_i$  le nombre de vecteurs de  $\mathcal{B}$  appartenant à  $E_{\lambda_i}$  ; ces vecteurs sont libres dans  $E_{\lambda_i}$ , donc

$$k_i \leq \dim(E_{\lambda_i})$$

Puisque  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ ,  $\sum_{i=1}^p k_i = n$ , d'où :

$$n = \sum_{i=1}^p k_i \leq \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i})$$

La somme  $\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$  est un sous-espace de  $E$ , donc

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) \leq n$$

Les deux inégalités précédentes impliquent nécessairement l'égalité suivante :

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) = n$$

\* (ii)  $\Rightarrow$  (iii) :

D'après la propriété 4.6, les sous-espaces propres sont en somme directe.

Notons  $E' = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$ .

$$\dim(E') = \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) = n = \dim(E)$$

Puisque  $E' \subset E$  et  $\dim(E') = \dim(E)$ , on conclut que  $E' = E$ .

\* (iii)  $\Rightarrow$  (i) :

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on choisit une base  $(u_{i,1}, \dots, u_{i,d_i})$  de  $E_{\lambda_i}$ , où  $d_i = \dim(E_{\lambda_i})$ .

Puisque  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$ , la famille

$$\mathcal{B} = \{u_{i,j} \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq d_i\}$$

est une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $L$ .

Donc  $L$  est diagonalisable au sens de la propriété ??.

\* (ii)  $\Rightarrow$  (iv) :

Montrons d'abord que  $\dim(E_{\lambda_i}) \leq m_i$  pour tout  $i$ .

Soit  $d_i = \dim(E_{\lambda_i})$  et choisissons une base de  $E$  dont les  $d_i$  premiers vecteurs forment une base de  $E_{\lambda_i}$ .

Dans cette base, la matrice de  $L$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda_i \text{Id}_{d_i} & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , d'où :

$$P_c(x) = (\lambda_i - x)^{d_i} \times \det(B - x \text{Id})$$

La multiplicité  $m_i$  de  $\lambda_i$  dans  $P_c$  est donc au moins  $d_i$ , soit  $\dim(E_{\lambda_i}) \leq m_i$ .

On en déduit :

$$n = \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) \leq \sum_{i=1}^p m_i \leq \deg(P_c) = n$$

Toutes les inégalités sont des égalités :  $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$  pour tout  $i$ , et  $\sum_{i=1}^p m_i = n$ , ce qui signifie que  $P_c$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  :

$$P_c(x) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - x)^{m_i}$$

⊙ (iv) ⇒ (ii) :

Par hypothèse (iv),  $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$  pour tout  $i$ .

$P_c$  étant scindé,  $\sum_{i=1}^p m_i = \deg(P_c) = n$ , donc :

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^p m_i = n$$

**Exemple :**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Étudions la diagonalisabilité de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  de matrice  $A$  dans la base canonique.

Le polynôme caractéristique est :

$$P_c(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$$

Il y a une unique valeur propre  $\lambda = 1$ , de multiplicité  $m_1 = 2$ .

Le sous-espace propre associé est :

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{Ker}(A - \text{Id}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

*Autre méthode :* on peut aussi calculer  $E_1$  directement depuis la définition,

en cherchant les vecteurs  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  tels que  $AX = \lambda \times X$  autrement dit tels que  $AX = 1 \times X$  :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat.

Donc  $\dim(E_1) = 1 \neq 2 = m_1$ .

La condition (iv) du théorème 4.16 n'est pas satisfaite : l'endomorphisme n'est donc pas diagonalisable.

## 4.5 Trigonalisation (des matrices et des endomorphismes)

### Définition 4.17 : (Endomorphisme trigonalisable)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $L: E \rightarrow E$  un endomorphisme.

On dit que  $L$  est **trigonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $L$  est triangulaire supérieure.

### Propriété 4.18 : (Caractérisation par stabilité des sous-espaces emboîtés)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $L: E \rightarrow E$  un endomorphisme.

$L$  est trigonalisable si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  de  $E$  telle que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$L(b_k) \in \text{Vect}(b_1, \dots, b_k)$$

### Preuve :

Soient  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  une base de  $E$  et  $A$  la matrice de  $L$  dans  $\mathcal{B}$ , de coefficients  $A_{i,j}$ . On note, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\mathcal{B}_k = (b_1, \dots, b_k)$$

Le lien entre  $L$  et  $A$  est résumé par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E \\ \downarrow (\cdot)_{\mathcal{B}} & & \downarrow (\cdot)_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

c'est-à-dire que pour tout  $u \in E$ , si  $(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , autrement dit  $u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ , alors :

$$A(u)_{\mathcal{B}} = (L(u))_{\mathcal{B}}$$

En particulier, si  $u \in \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$ , alors  $(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  et la  $k$ -ième colonne de  $A$  contient les coordonnées de  $L(b_k)$  dans  $\mathcal{B}$  :

$$L(b_k) = \sum_{i=1}^n A_{i,k} b_i \quad \text{soit} \quad (L(b_k))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{1,k} \\ \vdots \\ A_{k,k} \\ A_{k+1,k} \\ \vdots \\ A_{n,k} \end{pmatrix}$$

La condition  $L(b_k) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$  est donc équivalente à  $A_{i,k} = 0$  pour tout  $i > k$ , c'est-à-dire :

$$(L(b_k))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{1,k} \\ \vdots \\ A_{k,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{les entrées sous la diagonale sont nulles})$$

Cela vaut pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  si et seulement si  $A$  est triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

### **Théorème 4.19 :** (Condition de trigonalisation)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

$L$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique  $P_c$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

### **Preuve :**

$\Rightarrow$  : Supposons  $L$  trigonalisable.

Il existe alors une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice  $A$  de  $L$  est triangulaire supérieure.

D'après la propriété 2.27 :

$$\begin{aligned} P_c(x) &= \det(A - x \text{Id}) \\ &= \prod_{i=1}^n (A_{i,i} - x) \end{aligned}$$

Donc  $P_c$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

$\Leftarrow$  : Supposons  $P_c$  scindé sur  $\mathbb{K}$ .

On démontre par récurrence sur  $n = \dim(E)$  que  $L$  est trigonalisable.

*Initialisation* : si  $n = 1$ , toute matrice  $1 \times 1$  est triangulaire supérieure.

*Hérédité* : supposons le résultat vrai pour tout espace de dimension  $n - 1 \geq 1$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme dont  $P_c$  est scindé.

Comme  $P_c$  est scindé,  $L$  admet au moins une valeur propre  $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ .

Par le théorème du rang 3.25 :

$$n = \dim(\text{Ker}(L - \lambda_1 \text{Id})) + \dim(\text{Im}(L - \lambda_1 \text{Id}))$$

Comme  $\text{Ker}(L - \lambda_1 \text{Id}) \neq \{0\}$ , on a  $\dim(\text{Im}(L - \lambda_1 \text{Id})) \leq n - 1$ .

Il existe donc un hyperplan  $F \subset E$  de dimension  $n - 1$  contenant  $\text{Im}(L - \lambda_1 \text{Id})$ .

Ce sous-espace  $F$  est stable par  $L$  : pour tout  $u \in F$ ,

$$L(u) = \underbrace{(L - \lambda_1 \text{Id})(u)}_{\in \text{Im}(L - \lambda_1 \text{Id}) \subset F} + \underbrace{\lambda_1 u}_{\in F} \in F$$

La restriction  $L|_F : F \rightarrow F$  est un endomorphisme de  $F$ .

Son polynôme caractéristique divise  $P_c$  (qui est scindé sur  $\mathbb{K}$ ), donc  $P_c^{L|_F}$  est également scindé.

Par hypothèse de récurrence,  $L|_F$  est trigonalisable : il existe une base  $\mathcal{B}_F = (v_1, \dots, v_{n-1})$  de  $F$  telle que  $L(v_k) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Par le théorème de la base incomplète, il existe  $v_n \in E \setminus F$  tel que  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$  est une base de  $E$ .

Pour  $k \leq n-1$ ,  $L(v_k) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ .

Pour  $k = n$ ,  $L(v_n) \in E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ .

Donc  $\mathcal{B}$  vérifie la condition de la propriété 4.18, et  $L$  est trigonalisable.

### Exemple :

Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Son polynôme caractéristique est :

$$P_c(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

Ce polynôme n'admet pas de racine réelle, donc il n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ .

D'après le théorème 4.19,  $B$  n'est pas trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

En revanche,  $P_c(x) = (x - i)(x + i)$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , donc  $B$  est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

## 4.6 Polynôme minimal

### Rappel :

Voir définition 3.15.

Soient  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $P(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ .

On définit le polynôme appliqué à  $L$  par :

$$P(L) = \sum_{i=0}^m a_i L^i \quad \text{où } L^0 = \text{Id}, \quad L^2 = L \circ L, \quad \text{etc.}$$

### Définition 4.20 : (Polynôme minimal)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

On appelle **polynôme minimal** de  $L$  tout polynôme  $\pi \in \mathbb{K}[X]$  vérifiant :

- (i)  $\pi$  est non nul,
- (ii)  $\pi(L) = 0$ ,
- (iii) pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul tel que  $P(L) = 0$ ,  $\pi$  divise  $P$ .

On le note aussi  $P_m$ .

**Théorème 4.21 :** (*Existence et unicité du polynôme minimal*)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

Le polynôme minimal de  $L$  existe et est unique à une constante multiplicative près dans  $\mathbb{K}^*$ .

**Théorème 4.22 :** (*Théorème de Cayley-Hamilton*)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

En notant  $P_c \in \mathbb{K}[X]$  le polynôme caractéristique de  $L$ , on a :

$$P_c(L) = 0$$

Autrement dit, tout endomorphisme annule son propre polynôme caractéristique.

**Preuve :**

Soit  $n = \dim(E)$ .

Il s'agit de montrer que  $P_c(L)(v) = 0$  pour tout  $v \in E$ .

Le cas  $v = 0$  est trivial.

Soit donc  $v \in E$  non nul.

Considérons l'espace cyclique associé à  $v$  :

$$E_{(v)} = \text{Vect}(v, L(v), L^2(v), \dots)$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ , stable par  $L$  :

$$\forall u \in E_{(v)}, \quad u = \sum_{i=0}^k a_i L^i(v) \implies L(u) = \sum_{i=0}^k a_i L^{i+1}(v) \in E_{(v)}$$

Notons  $m$  le plus petit entier tel que la famille  $(v, L(v), \dots, L^m(v))$  soit liée.

Alors  $\mathcal{B}_v = (v, L(v), \dots, L^{m-1}(v))$  est libre, et il existe des scalaires  $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$  tels que :

$$L^m(v) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j L^j(v)$$

Par récurrence, tout  $L^k(v)$  pour  $k \geq m$  s'exprime dans  $\mathcal{B}_v$ , donc  $\mathcal{B}_v$  est une base de  $E_{(v)}$ .

On complète  $\mathcal{B}_v$  en une base  $\mathcal{B} = (v, L(v), \dots, L^{m-1}(v), v_{m+1}, \dots, v_n)$  de  $E$ .

La matrice de  $L$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{A} & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

où  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  est la matrice compagnon de  $\tilde{L} = L|_{E_{(v)}}$  dans  $\mathcal{B}_v$  :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de  $\tilde{L}$  s'obtient en développant  $\det(\tilde{A} - x \text{Id})$  selon la dernière colonne.

On obtient :

$$P_c^{\tilde{L}}(x) = (-1)^m \left[ x^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \right]$$

Puisque  $E_{(v)}$  est stable par  $L$  et que  $v \in E_{(v)}$ , on a  $L^k(v) = \tilde{L}^k(v)$  pour tout  $k \geq 0$ .

Donc :

$$P_c^{\tilde{L}}(L)(v) = P_c^{\tilde{L}}(\tilde{L})(v) = (-1)^m \left[ L^m(v) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k L^k(v) \right] = 0$$

Or, la décomposition par blocs donne  $P_c^L(x) = P_c^{\tilde{L}}(x) \times \det(C - x \text{Id})$ .

En notant  $q(x) = \det(C - x \text{Id})$ , on a  $P_c^L(L) = q(L) \circ P_c^{\tilde{L}}(L)$ , d'où :

$$P_c^L(L)(v) = q(L) \left( \underbrace{P_c^{\tilde{L}}(L)(v)}_{=0} \right) = 0$$

Comme  $v \in E$  est quelconque,  $P_c^L(L) = 0$ .

### **Théorème 4.23 :** (*Diagonalisation et polynôme minimal*)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  les valeurs propres distinctes de  $L$ .

$L$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est :

$$P_m = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$$

## 4.7 Lemme des Noyaux

### **Lemme 4.24 :** (*Lemme des Noyaux*)

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme et  $Q_1, \dots, Q_p \in \mathbb{K}[X]$  des polynômes deux à deux premiers entre eux.

En notant  $P = Q_1 \cdots Q_p$ , on a :

$$\text{Ker}(P(L)) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(Q_i(L))$$

### **Preuve :**

On raisonne par récurrence sur  $p$ .

*Initialisation :* pour  $p = 1$ , l'égalité est triviale.

*Cas  $p = 2$  :* soient  $Q_1$  et  $Q_2$  deux polynômes premiers entre eux.

D'après l'identité de Bézout, il existe  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $UQ_1 + VQ_2 = 1$ .

En appliquant à  $L$  :

$$U(L) \circ Q_1(L) + V(L) \circ Q_2(L) = \text{Id}$$

**Intersection nulle :** Si  $v \in \text{Ker}(Q_1(L)) \cap \text{Ker}(Q_2(L))$ , alors :

$$v = \text{Id}(v) = U(L) \left( \underbrace{Q_1(L)(v)}_{=0} \right) + V(L) \left( \underbrace{Q_2(L)(v)}_{=0} \right) = 0$$

Donc  $\text{Ker}(Q_1(L)) \cap \text{Ker}(Q_2(L)) = \{0\}$ , et la somme est directe.

**Inclusion  $\supset$  :** Soit  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in \text{Ker}(Q_1(L))$  et  $u_2 \in \text{Ker}(Q_2(L))$ .

Les polynômes en  $L$  commutent entre eux, donc :

$$P(L)(u_1) = Q_2(L) \circ \underbrace{Q_1(L)(u_1)}_{=0} = 0$$

$$P(L)(u_2) = Q_1(L) \circ \underbrace{Q_2(L)(u_2)}_{=0} = 0$$

Donc  $P(L)(u) = 0$ , soit  $u \in \text{Ker}(P(L))$ .

**Inclusion  $\subset$  :** Soit  $u \in \text{Ker}(P(L))$ .

On pose  $u_1 = V(L) \circ Q_2(L)(u)$  et  $u_2 = U(L) \circ Q_1(L)(u)$ .

Par l'identité de Bézout appliquée à  $u$ ,  $u = u_1 + u_2$ .

De plus :

$$Q_1(L)(u_1) = V(L) \circ \underbrace{Q_1(L) \circ Q_2(L)(u)}_{=P(L)} = V(L)(0) = 0$$

$$Q_2(L)(u_2) = U(L) \circ \underbrace{Q_2(L) \circ Q_1(L)(u)}_{=P(L)} = U(L)(0) = 0$$

Donc  $u_1 \in \text{Ker}(Q_1(L))$ ,  $u_2 \in \text{Ker}(Q_2(L))$ , et  $u \in \text{Ker}(Q_1(L)) \oplus \text{Ker}(Q_2(L))$ .

**Hérédité :** supposons le lemme vrai au rang  $p \geq 2$ . Soit  $P = Q_1 \cdots Q_{p+1}$  avec  $Q_1, \dots, Q_{p+1}$  deux à deux premiers entre eux.

On pose  $Q = Q_2 \cdots Q_{p+1}$ ; comme  $Q_1$  est premier avec chaque  $Q_i$  pour  $i \geq 2$ , il est premier avec  $Q$ .

Par le cas  $p = 2$  :

$$\text{Ker}(P(L)) = \text{Ker}(Q_1(L)) \oplus \text{Ker}(Q(L))$$

Par hypothèse de récurrence appliquée aux  $Q_2, \dots, Q_{p+1}$  (deux à deux premiers entre eux) :

$$\text{Ker}(Q(L)) = \bigoplus_{i=2}^{p+1} \text{Ker}(Q_i(L))$$

D'où  $\text{Ker}(P(L)) = \bigoplus_{i=1}^{p+1} \text{Ker}(Q_i(L))$ .

### Preuve :

*Démonstration du théorème 4.23.*

⊙ ( $\Rightarrow$ ) :

Supposons  $L$  diagonalisable. D'après le théorème 4.16,  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$ .

Posons  $Q(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ .

Soit  $u \in E$ ; on écrit  $u = \sum_{i=1}^p u_i$  avec  $u_i \in E_{\lambda_i}$ .

Pour chaque  $j$ , les facteurs  $(L - \lambda_i \text{Id})$  commutent, donc en mettant le facteur  $(L - \lambda_j \text{Id})$  en dernier :

$$Q(L)(u_j) = \left[ \prod_{i \neq j} (L - \lambda_i \text{Id}) \right] \circ \underbrace{(L - \lambda_j \text{Id})(u_j)}_{=0} = 0$$

Donc  $Q(L)(u) = 0$  pour tout  $u \in E$ , soit  $Q(L) = 0$ .

Par minimalité de  $P_m$ ,  $P_m \mid Q$ .

D'autre part, pour toute valeur propre  $\lambda_j$  et tout vecteur propre  $w_j$  associé :

$$P_m(L)(w_j) = P_m(\lambda_j)w_j = 0 \implies P_m(\lambda_j) = 0$$

Donc  $(X - \lambda_j) \mid P_m(X)$  pour tout  $j$ ; les facteurs étant deux à deux premiers entre eux,  $Q \mid P_m$ .

On a ainsi  $P_m \mid Q$  et  $Q \mid P_m$ , d'où  $P_m = cQ$  pour une constante  $c \in \mathbb{K}^*$ .

⊙ (⇐) :

Supposons  $P_m(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ .

Comme  $P_m(L) = 0$ ,  $\text{Ker}(P_m(L)) = E$ .

Les polynômes  $(X - \lambda_i)$  sont deux à deux premiers entre eux, donc le lemme des noyaux 4.24 donne :

$$E = \text{Ker}(P_m(L)) = \bigoplus_{i=1}^p \underbrace{\text{Ker}(L - \lambda_i \text{Id})}_{= E_{\lambda_i}}$$

Donc  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$ , ce qui équivaut à la diagonalisabilité de  $L$  d'après le théorème 4.16.

## 4.8 Récapitulatif et Décomposition de Dunford

### Remarque :

Le tableau suivant résume les conditions de diagonalisabilité et de trigonalisabilité pour un endomorphisme  $L : E \rightarrow E$  de dimension finie  $n$ , de valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de multiplicités  $m_1, \dots, m_p$  :

Diagonalisable	Trigonalisable
$P_c$ scindé et $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i, \forall i$	$P_c$ scindé sur $\mathbb{K}$

La décomposition de Dunford généralise la diagonalisation : lorsque  $P_c$  est scindé mais que  $L$  n'est pas diagonalisable, on décompose  $E$  non plus en somme directe des espaces propres  $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(L - \lambda_i \text{Id})$ , mais en somme directe des *sous-espaces caractéristiques*  $F_{\lambda_i} = \text{Ker}((L - \lambda_i \text{Id})^{m_i})$ .

### Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

La seule valeur propre est  $\lambda = 1$ , de multiplicité  $m_1 = 3$ , et  $P_c(x) = (1 - x)^3$ .

Le sous-espace propre associé est :

$$A - \text{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies E_1 = \text{Ker}(A - \text{Id}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Comme  $\dim(E_1) = 1 \neq 3 = m_1$ ,  $A$  n'est pas diagonalisable. En revanche,  $P_c$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc  $A$  est trigonalisable.

### **Théorème 4.25 :** (Décomposition de Dunford)

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$ ,  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $L$ , de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_p$ .

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on définit le **sous-espace caractéristique** (ou espace propre généralisé) associé à  $\lambda_i$  par :

$$F_{\lambda_i} = \text{Ker}((L - \lambda_i \text{Id})^{m_i})$$

(En dimension finie,  $F_{\lambda_i} = \bigcup_{k \geq 1} \text{Ker}((L - \lambda_i \text{Id})^k)$ , la réunion croissante des noyaux itérés, qui se stabilise en  $k = m_i$ .)

Alors :

- (i)  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_{\lambda_i}$ , et  $\dim(F_{\lambda_i}) = m_i$ .
- (ii) Chaque  $F_{\lambda_i}$  est stable par  $L$ .

(iii) Il existe une unique décomposition  $L = D + N$

où  $D$  est diagonalisable,  $N$  est nilpotente (il existe  $k \geq 1$  tel que  $N^k = 0$ ), et  $D \circ N = N \circ D$ .

**Exemple :**

Pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , la valeur propre  $\lambda = 1$  est de multiplicité 3.

On vérifie que  $(A - \text{Id})^3 = 0$ , donc le sous-espace caractéristique est  $F_1 = \text{Ker}((A - \text{Id})^3) = \mathbb{R}^3$  (l'espace entier).

La décomposition de Dunford de  $A$  est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D=\text{Id}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$$

$D = \text{Id}$  est diagonale (donc diagonalisable) et  $N$  est nilpotente d'ordre 3 :  $N^2 \neq 0$  mais  $N^3 = 0$ .

On vérifie que  $D \circ N = N \circ D = N$  (car  $D = \text{Id}$ ).